

GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 22 settembre 2009

Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [8 punti]

1. Sia $A = (a_{ij}) \in M(\mathbb{R}, 100, 100)$ tale che

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 1 & \text{se } j = 101 - i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare il rango della matrice A .

2. Sia $B = (b_{ij}) \in M(\mathbb{R}, 100, 100)$ tale che

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ -1 & \text{se } j = 101 - i \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Calcolare il rango della matrice B .

SECONDO ESERCIZIO [7 punti] Ricordiamo che il numero 101 è primo.

1. Calcolare l'inverso di $[50]_{101}$ nel campo \mathbb{Z}_{101} .
2. Determinare tutte le soluzioni del sistema di congruenze:

$$\begin{cases} 9x - y \equiv 2 \pmod{101} \\ x + 9y \equiv 5 \pmod{101} \end{cases}$$

TERZO ESERCIZIO [8 punti] Sia f l'endomorfismo di \mathbb{R}^3 associato, relativamente alla base canonica di \mathbb{R}^3 , alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base del nucleo di f .
2. Determinare una base dell'immagine di f .
3. Determinare, se esiste, un endomorfismo non nullo di \mathbb{R}^3 tale che $f \circ g$ sia l'endomorfismo nullo.
4. Determinare, se esiste, un endomorfismo non nullo di \mathbb{R}^3 tale che $g \circ f$ sia l'endomorfismo nullo.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti] Sia data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una matrice di Jordan J e una matrice invertibile M tali che si abbia $J = M^{-1}AM$.
2. Determinare, se esiste, una matrice $N \neq M$ tale che $J = N^{-1}AN$.