Giuseppe Accascina

(Sapienza, Università di Roma)

# *Dalle immagini ai modelli dei poliedri: problemi di interpretazione*[1]

*Educare lo sguardo: intrecci tra arte e matematica*

Sabato 12 Maggio 2018, Teatro Odeion, Facoltà di Lettere

Sapienza, Università di Roma

Vorrei ringraziare innanzitutto Enrico Rogora per avermi invitato. Mi ha fatto molto piacere anche perché la giornata di ieri, in cui hanno parlato tanti storici dell'arte, mi ha fatto tornare indietro di tantissimi anni. Ho infatti passato almeno cinque estati della mia fanciullezza al Museo Regionale di Messina, di cui era direttrice mia zia Maria Accascina[2]. Mi sono venute in mente le tante volte in cui mia zia prendeva per mano Giorgio, mio fratello, e me e ci portava a visitare il museo e, di fronte ad ogni quadro ci sfidava a capire da dove veniva la luce. I primi due quadri sono stati *Resurrezione di Lazzaro* e *Adorazione dei pastori*, opere del Caravaggio del 1609. E poi ricordo le interminabili gare di corsa tra Giorgio e me nella spianata dietro al museo. Le due gare più impegnative erano la *corsa a colonne facile* e la *corsa a colonne difficile* in cui sfruttavamo la particolare conformazione del nostro campo di gara. Per capire, bisogna ricordare che il lungomare di Messina era cinto da una lunghissima colonnata che fu distrutta dal terremoto del 1908. Le colonne sono state poi trasportate e adagiate nella spianata dietro il museo, affiancate una accanto all'altra e una dietro l'altra, in bell'ordine. Molto probabilmente sono ancora lì.

E ora vi chiedo di farvi le prime immagini mentali di questo seminario. Vi chiedo di immaginarvi i percorsi delle seguenti gare:

*Corsa a colonne facile*: Mio fratello ed io corriamo ognuno su una colonna, il percorso è rettilineo, la generatrice di un cilindro, ma la corsia è una semicirconferenza. Finita una colonna si continua sulla successiva.

*Corsa a colonne difficile*. Percorso perpendicolare al precedente. Ora partiamo dalla stessa colonna. La corsia è orizzontale ed estremamente ampia, ma il percorso è dato da tante semicirconferenze tangenti a due a due. E quindi la gara consiste di continui salti da una colonna all'altra.

Fine dei miei ricordi.

---

[1] **Inviato per la pubblicazione negli atti del Convegno il 13 maggio 2018**

[2] Maria Accascina (1898 – 1979), Storica dell'arte, Direttrice del Museo Regionale di Messina dal 1949 al 1966, autrice di numerosi articoli e libri, tra cui *Ottocento Siciliano, Pittura*, Roma, 1939; *Profilo dell'Architettura a Messina dal 1600 al 1800*, Roma, 1964; *I marchi dell'oreficeria e argenteria di Sicilia*, Busto Arsizio, 1976; *Oreficeria di Sicilia dal XII al XIX secolo*, Palermo, 1974.

Queste sono le prime due tavole disegnate da Leonardo da Vinci per il *De Divina Proportione* di Luca Pacioli.

Di questa opera sono rimasti due manoscritti completati nel 1498 a Milano, alla corte di Ludovico il Moro. Il primo è conservato nella Biblioteca Civica di Ginevra[3], il secondo è conservato nella Biblioteca Ambrosiana di Milano[4]. Noi ci riferiremo sempre a quest'ultimo manoscritto. Nel 1509 ne è stata fatta una edizione a stampa a Venezia da Paganino Paganini[5]. Sono state pubblicate le copie anastatiche dei due manoscritti. In rete si trova una riproduzione della versione a stampa. I manoscritti e la versione a stampa non sono sempre facilmente leggibili sia per i caratteri sia, specialmente nella versione a stampa, per le abbreviazioni usate. Esiste però una bella "traduzione" in italiano moderno pubblicata in un CD_ROM curato da Franco Ghione[6].

Racconta Pacioli che questi modelli costruiti in *vil materia*[7], immaginiamo in legno, sono stati riportati *in piano con tutta perfectione de prospectiva commo sa el nostro Leonardo Vinci*[8].

Quindi Leonardo, a partire da modelli di poliedri, ha creato le loro immagini.

Voglio presentarvi un percorso didattico che segue il percorso inverso. Partiamo dalle immagini di Leonardo di poliedri e ne costruiamo alcuni modelli.

Questo percorso è stato ideato da Patrizia Berneschi e Elena Possamai, professoresse di matematica presso il Liceo Scientifico Nomentano di Roma, e dal sottoscritto. Abbiamo sperimentato quest'anno la prima parte del percorso in quattro prime classi e due seconde classi del Liceo Nomentano con la collaborazione, oltre che di Berneschi e Possamai, delle Professoresse Claudia Cipriani, Cinzia Fiori, Lucia Cosentino e del Professor Giovanni Armellino. Quest'anno abbiamo

---

3 Luca Pacioli, *De Divina Proportione,* copia anastatica edita da Aboca Edizioni nel 2010, ISBN/EAN: 978-88-95642-42-0, http://www.abocashop.com/it/de-divina-proportione-facsimile-ad-uso-professionale

4 Luca Pacioli, *De Divina Proportione,* copia anastatica edita da Silvana Editoriale nel 2010 ISBN/EAN:9788836617890 http://www.silvanaeditoriale.it/catalogo/prodotto.asp?id=2949

5 Luca Pacioli, *De Divina Proportione, Paganius Paganinus, Venezia, 1509* https://archive.org/details/divinaproportion00paci

6 Franco Ghione (responsabile scientifico), *Divina Proportione*, CD-ROM, 1998, Hockfeiler

7 Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, capitolo LXX. folio LXXXIIII r

8 Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, capitolo LXX. folio LXXXIII v.

svolto tre incontri per ogni classe limitandoci a presentare solo alcune tavole, le più semplici. Completeremo il percorso nei prossimi due anni, quando gli studenti frequenteranno la seconda, terza e quarta classe. Ho poi sperimentato il percorso con gli studenti del mio corso di Didattica della Matematica della Laurea Magistrale in Matematica della Sapienza, Università di Roma. Ho dedicato a ciò cinque incontri, ognuno di due ore. L'attività svolta con gli studenti universitari e con gli studenti liceali è identica. Agli studenti, suddivisi in gruppi di tre o quattro, sono state consegnate di volta in volta coppie di tavole di Leonardo insieme a schede in cui si chiede di descrivere i poliedri rappresentati nelle tavole.

Qui mi limito a presentare solo alcune tavole.

Già con le prime tavole, le due che vedete qui sopra, abbiamo avuto le prime sorprese.

I cartelli posti sopra le figure dichiarano che si tratta di *tetracedron*, un tetraedro (regolare).

Bene, dopo pochi minuti gli studenti, maschi, di un gruppo di seconda liceo, ha cominciato a discutere animatamente: sono rappresentati due poliedri diversi o uno solo? Non hanno prestato la minima attenzione a quel che dicevano loro le studentesse del gruppo vicino "Ma sono lo stesso poliedro! Guardate i titoli delle due tavole!" Gli studenti sono rimasti molto sorpresi quando abbiamo loro detto che le due figure rappresentano lo stesso poliedro ma che si può anche pensare che rappresentino due poliedri diversi.

Molti gruppi hanno poi ragionato sul perché Leonardo ha scelto due diversi punti di vista nelle due tavole.

Una domanda ricorrente in ogni scheda è:

*quante tessere di Polydron*[9] *e di che tipo sono necessarie per costruire un modello reale?*

Una volta avuta la risposta esatta, diamo loro le tessere e chiediamo di costruire il poliedro.

Anche gli studenti universitari ci hanno riservato sorprese. Vari gruppi sono stati in dubbio se le immagini rappresentano:

a) un tetraedro regolare (il poliedro in giallo al centro)

[9] Polydron è un sistema che, come dice il nome, permette di costruire poliedri con molta facilità. Vedi http://www.polydron.co.uk/

b) una piramide retta avente come base un triangolo equilatero e come facce laterali tre triangoli isosceli ma non equilateri (il poliedro in verde a destra)
c) una piramide retta avente come base un triangolo equilatero e come facce laterali tre triangoli isosceli rettangoli (il poliedro rosso a sinistra)

Passiamo ora alle successive due tavole di Leonardo.


Tutti gli studenti, liceali o universitari, non hanno avuto alcuna difficoltà a capire che il poliedro è ottenuto dal tetraedro tagliandone ogni vertice per mezzo di piani passanti per i punti degli spigoli concorrenti nel vertice stesso aventi distanza dal vertice uguale ad un terzo dello spigolo. Il nome assegnato da Pacioli al poliedro è *tetracedron abscissus*, tetraedro (regolare) tronco.

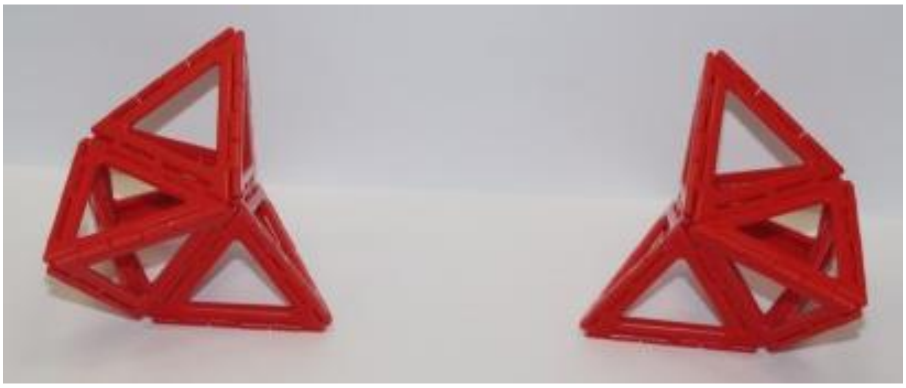
Gli studenti, sia liceali che universitari, hanno invece avuto più di difficoltà a interpretare il poliedro raffigurato nelle successive tavole.


Il nome *tetracedron elevatus*, tetraedro (regolare) elevato, fa capire che esso è ottenuto da un tetraedro. Ma dove sta questo tetraedro?

Pacioli, bravissimo didatta, ben conscio della difficoltà, scrive *quella interiore o che locchio non po veder: ma solo lintellecto la prende*[10]. Il tetraedro elevato è ottenuto elevando su ogni faccia triangolare del tetraedro di partenza una piramide triangolare retta avente come facce laterali triangoli equilateri, cioè un altro tetraedro (regolare).

Tutti i gruppi, sia quelli degli studenti liceali che quelli degli universitari, una volta costruito il modello del tetraedro elevato sono rimasti perplessi. Erano convinti di aver commesso un qualche errore, Anche quando si sono persuasi che non avevano commesso alcun errore hanno tutti detto che il poliedro era proprio brutto. Come dar loro torto? Ma perché ci appare brutto non appena lo guardiamo da un punto di vista differente da quello scelto da Leonardo

Il punto di vista di Leonardo



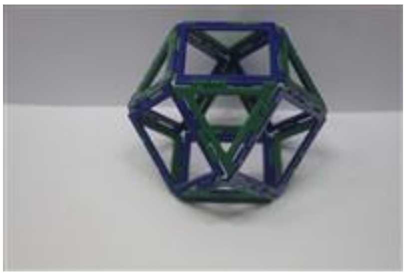
Il poliedro da altri punti di vista

Passiamo alle successive tavole.

[10] Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, capitolo XLVIII, folio LII v.

Rappresentano il cubo e il cubo tronco. Ma come si ottiene il cubo tronco dal cubo? Gli studenti, sia liceali che universitari, hanno avuto qualche difficoltà nel capire che il cubo tronco si ottiene tagliando i vertici del cubo per mezzo di piani passanti per i punti medi degli spigoli. Una volta capito ciò hanno poi costruito il modello di cubo tronco con Polydron.

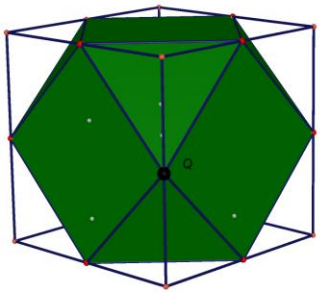


Da notare che, una volta costruito il modello del cubo tronco, ci dimentica subito come si possa riottenere da esso il cubo originario. Moltissimi studenti, sia liceali che universitari, hanno dichiarato che per ottenere il cubo originario si deve elevare su ogni faccia triangolare un tetraedro regolare. Assurdo. Dove sono finiti gli angoli retti del cubo?

Per capire meglio sarebbe necessario un modello reale. Poiché Polydron non dispone di alcune tessere necessarie per la sua costruzione, ho costruito un modello in cartoncino.

L'ho costruito molti anni fa. Troppo tempo per costruirlo. Non lo rifarei mai più. Né lo farei mai costruire agli studenti. Il loro tempo è più prezioso del mio.

Molto più costruttivo far costruire agli studenti un modello virtuale.




Questo modello virtuale è stato costruito qualche anno fa da studenti del terzo e quarto anno dell'Istituto Tecnico Industriale Galilei di Roma nell'ambito del *Progetto Archimede*[11]. Hanno usato il sistema di geometria dinamica *Cabri 3D*. Ancora non esisteva *Geogebra 3D*. Sfruttando il movimento si vede con chiarezza come si passa con continuità dal cubo al cubo tronco. Il tempo impiegato dagli studenti per imparare ad usare Cabri 3D e per costruirlo è stato di molto inferiore al tempo necessario per costruire il modello reale con il cartoncino o con le cannucce e gli scovolini nettapipe.

Torniamo alle tavole di Leonardo.

Abbiamo fatto costruire l'ottaedro e l'icosaedro, sempre a partire dalle tavole di Leonardo. Sia gli studenti liceali che quelli universitari hanno avuto difficoltà a costruire i modelli reali. Se non si ha un progetto bel preciso, è infatti molto facile sbagliarsi nell'attaccare le varie tessere tra loro; anche nel caso dell'ottaedro, in cui sono necessarie solo otto tessere.

Sono molto interessanti le seguenti tavole.

Rappresentano il cubo tronco elevato.

---

[11] Nel *Progetto Archimede*, a cui partecipano fin dall'AA 2012-13 l'Istituto Tecnico Industriale *Galilei*, il Liceo Scientifico *Nomentano*, il Liceo Classico *Tacito*, tutte scuole di Roma, gli studenti stanno studiando i poliedri platonici e gli archimedei. Hanno costruito con Cabri 3D buona parte di essi. Vedere
http://www.sbai.uniroma1.it/~giuseppe.accascina/2013_PLS-Progetto_Archimede/.
Hanno collaborato al *Progetto Archimede* le professoresse Roberta Dalla Volta, e Anna Perrotta, del Galilei, Patrizia Berneschi e Elena Possamai, del Nomentano, Gioia Battilomo e Valentina Raimondi, del Tacito e Benedetta Macina, la quale nella sua tesi ha costruito con Cabri 3D tutti i poliedri archimedei mostrando come 11 di questi si possano ottenere dai poliedri platonici con riga e compasso. Vedere Benedetta Macina *Dai poliedri platonici agli archimedei attraverso costruzioni con riga e compasso*. Tesi di Laurea Magistrale in Matematica, Sapienza, Università di Roma, AA 2015-16.

Quest'anno abbiamo usato queste tavole solo con gli studenti universitari. Essi hanno presto capito, anche dal nome, che questo poliedro è ottenuto dal cubo tronco elevando su ogni faccia del cubo tronco una piramide, triangolare sulle facce triangolari e quadrata su quelle quadrate.

Ho poi chiesto agli studenti di creare un modello del cubo tronco elevato con Polydron distinguendo con il colore le piramidi triangolari (verdi) da quelle quadrate (blu).

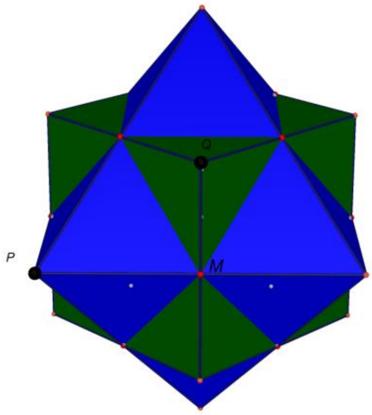
Gli studenti, osservando le tessere blu del modello appena costruito, hanno subito notato la struttura di un ottaedro. Hanno capito che il cubo tronco si può ottenere, oltre che da un cubo, da un ottaedro, sempre tagliandone ogni vertice per mezzo di piani passanti per i punti medi degli spigoli concorrenti nel vertice. La dimostrazione di ciò è molto semplice.

Per questa ragione il poliedro, che Leonardo e Pacioli avevano chiamato *cubo tronco*, viene ora chiamato *cubottaedro*.

Ma quale è la mutua posizione del cubo e dell'ottaedro da cui si ottiene lo stesso cubottaedro?

Il modello virtuale costruito dagli studenti del quarto anno dell'Istituto Tecnico Industriale *Galilei* di Roma nell'ambito del *Progetto Archimede*[12] lo mostra.

[12] http://www.sbai.uniroma1.it/~giuseppe.accascina/2013_PLS-Progetto_Archimede/SECONDO_ANNO/Galilei-Prodotti-2013-14/DA_UN_CUBO_E_DA_UN_OTTAEDRO_A_UN_CUBOTTAEDRO/DA_UN_CUBO_E_DA_UN_OTTAEDRO_A_UN_CUBOTTAEDRO.htm



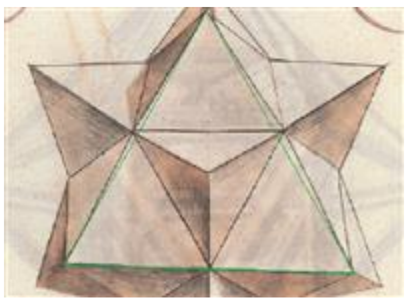

Spostando il punto $P$ in $M$ e trascinando poi il punto $Q$ in $M$ si vede come si passa con continuità dal cubo al cubo tronco. Trascinando infine il punto $P$ lontano da $M$ si vede come si passa con continuità dal cubottaedro all'ottaedro.

Torniamo al nostro cubo tronco elevato. Ora lo chiamiamo *cubottaedro elevato*. Nell'elevare le piramidi quadrate sulle facce quadrate del cubottaedro, non facciamo altro che aggiungere di nuovo le piramidi che avevamo tolto all'ottaedro quando da esso abbiamo ottenuto il cubottaedro. Abbiamo quindi dimostrato che le piramidi quadrate (quelle blu) che si toccano in un punto hanno due spigoli appartenenti alla stessa retta.

Osservate di nuovo la tavola di Leonardo.

Non osservate niente di strano?

Ingrandiamo la figura.



Leonardo ha commesso un errore. Che è ripetuto nelle tavole del manoscritto di Ginevra e della versione a stampa del 1509. Leonardo, Pacioli, e molto probabilmente anche chi ha costruito il modello in legno del poliedro, non hanno capito che il cubo tronco si ottiene anche da un ottaedro.

Ormai non c'è più niente da fare. Siete rovinati. Ogni qual volta che guarderete questa tavola di Leonardo sarete colti come me da un vago senso di malessere.

Nelle tavole di Leonardo sono stati evidenziati vari altri errori[13], di solito meno evidenti di questo. Ma non ha importanza osservare se e perché Leonardo e Pacioli abbiamo commesso un errore, né se questo errore sia stato già notato o meno. E' invece importante osservare quanto, con un po' di geometria, si possano notare particolari che altrimenti non verrebbero notati.

Viene ovviamente in mente la frase di Polya *la geometria è l'arte di fare ragionamenti giusti su figure sbagliate.*

Non ci ha aiutato solo la geometria ma anche il continuo uso di modelli reali e virtuali.

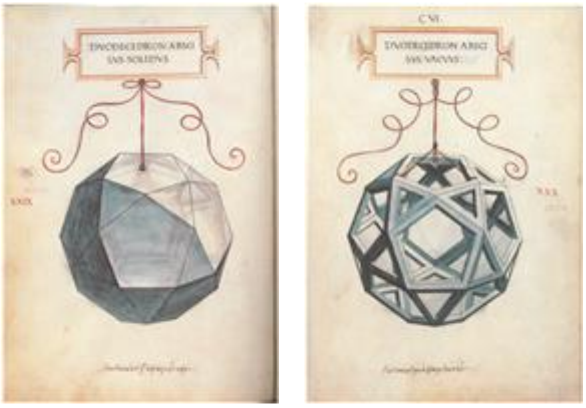
> Quanti più sensi sono coinvolti tanto più una cosa è reale[14].

Passiamo infine al caso del dodecaedro, del dodecaedro tronco e del dodecaedro tronco elevato.

Il dodecaedro

[13] Dirk Huylebrouck, *Observations about Leonardo's drawings for Luca Pacioli*, BSHM Bulletin Journal of the British Society for the History of Mathematics 2013.
DOI 10.1080/17498430.2014.945066, https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1311/1311.2855.pdf

[14] Wilfred Bion, *Learning from Experience*, 1962, London: William Heinemann (trad. it. *Apprendere dall'esperienza*, 1972, Roma: Armando Editore).

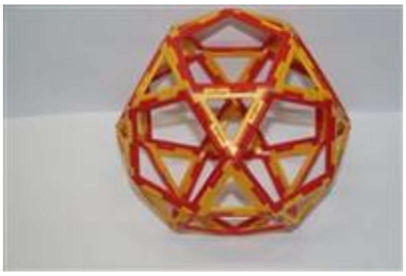
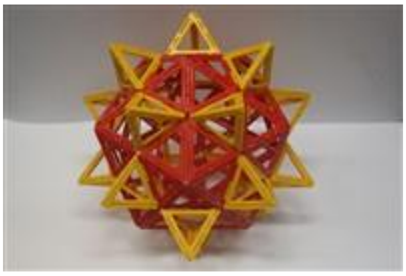


Il dodecaedro tronco

Il dodecaedro tronco elevato

Gli studenti universitari hanno visto senza grosse difficoltà che il dodecaedro tronco è ottenuto dal dodecaedro tagliando ognuno dei suoi vertici per mezzo del piano passante per i punti medi degli spigoli concorrenti nel vertice stesso. Il dodecaedro tronco elevato è poi ottenuto dal dodecaedro tronco elevando sulle sue facce piramidi, a base o triangolare o pentagonale.

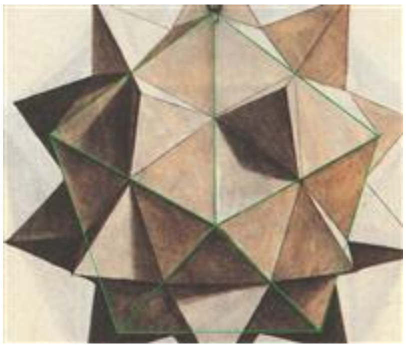
Ecco i modelli del dodecaedro e del dodecaedro tronco elevato costruiti con le tessere di Polydron.


…


Osservando le tessere in rosso del modello del dodecaedro tronco elevato appare la struttura di un icosaedro.

Siamo in una situazione analoga a quella vista per il cubo tronco. Il dodecaedro tronco si può ottenere sia dal dodecaedro che dall'icosaedro troncandone ogni vertice per mezzo del piano passante per i punti medi degli spigoli concorrenti in esso. Per questa ragione viene attualmente chiamato *icosidodecaedro*. E quindi abbiamo dimostrato che in un dodecaedro tronco elevato, che ora chiamiamo *icosidodecaedro elevato*, le piramidi a base pentagonale che si toccano in un punto hanno due spigoli giacenti su una stessa retta.

Ci chiediamo se Leonardo abbia commesso gli stessi errori commessi con il cubottaedro elevato.



Anche ingrandendone l'immagine non appare che Leonardo abbia commesso questo errore.

Pacioli non è però interessato a questo argomento. Pone l'attenzione su un altro punto.

*E calcando in piano questo* [il nostro poliedro] *sempre si ferma in 6 ponte over coni pyramidali. Deliquali coni uno sia de pyramide pentagona. Eli altri 5 sonno dele pyramidi triangule. La qualcosa in atere suspecto pare alocchio absurda: che simil ponte sienno a un paro*[15].

Dice Pacioli che, se si pone il poliedro su un piano, questo poggia su 6 punti di cui uno è il vertice di una piramide a base pentagonale e gli altri 5 sono i vertici di piramidi a base triangolare. Se però si sospende il poliedro in aria pare assurdo che questi 6 vertici siano su uno stesso piano.

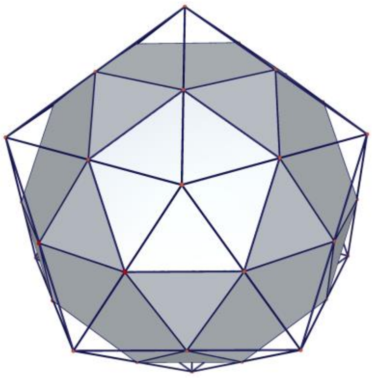
In effetti, se consideriamo la piramide pentagonale al centro in alto, dal cui vertice è appeso tutto il poliedro, e se consideriamo i 5 vertici delle piramidi triangolari che fanno da corona alla piramide centrale, capiamo che, per ragioni di simmetria, i vertici delle 5 piramidi triangolari appartengono ad un piano orizzontale. Ma pare che questo piano si trovi ben sotto il vertice della piramide pentagonale centrale. E ciò appare suffragato se si osservano nell'icosidodecaedro le posizioni delle basi delle 6 piramidi su esse elevate nell'icosidodecaedro elevato.

Conclude però Pacioli *E questo tale Ex° D. e de grandissima abstractione: e de profonda scientia: che chi intende fo non me laffara mentire*[16]. Pacioli afferma che chi è dotato di grandissima astrazione e di profonda conoscenza non lo farebbe mentire. Afferma cioè che i vertici delle sei piramidi sono complanari.

Bene, proviamo l'esperimento descritto da Pacioli. Poggiamo il nostro modello di icosidodecaedro elevato su un tavolo. I sei vertici appaiono giacere sul tavolo. Ma questa non è certamente una dimostrazione. Le tessere di Polydron per loro stessa natura sono una rappresentazione veramente approssimata di triangoli equilateri.

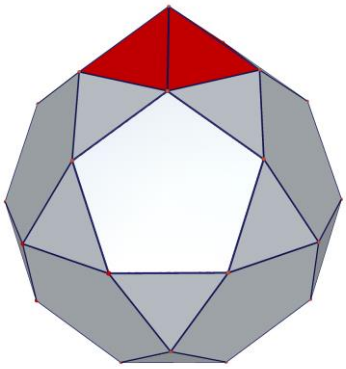
[15] Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, capitolo LII, folio LVIII r.
[16] Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, capitolo LII, folio LVIII r.

Prendiamo allora un modello virtuale di icosidodecaedro costruito con Cabri 3D. Usiamo il modello costruito nel 2015 dagli studenti di quarta del Liceo *Nomentano* partecipanti al *Progetto Archimede*[17].

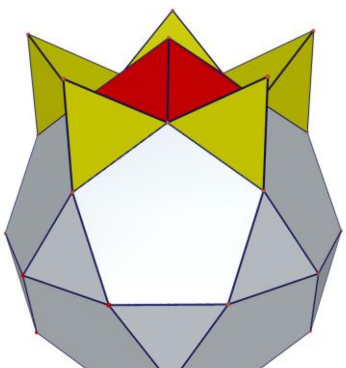


In esso è rappresentato un icosidodecaedro e lo scheletro dell'icosaedro da cui esso è ottenuto per troncamento dei vertici.

Ora nascondiamo l'icosaedro ed eleviamo una piramide sulla faccia pentagonale superiore dell'icosidodecaedro.



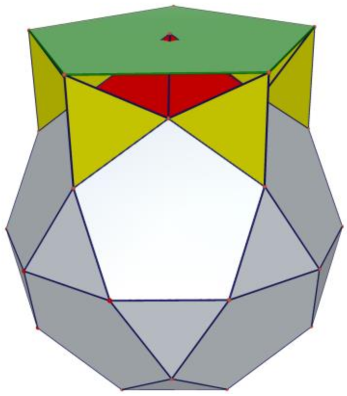
Eleviamo le piramidi sulle cinque facce triangolari dell'icosidodecaedro adiacenti alla faccia pentagonale superiore.



---

[17] www.sbai.uniroma1.it/~giuseppe.accascina/2013_PLSProgetto_Archimede/TERZO_ANNO/20150311_Ottavo_incontro/troncamenti/Nomentano-gruppi_icosaedro.htm

E costruiamo infine il pentagono determinato dai vertici delle cinque piramidi.



Pare proprio che Pacioli si sia sbagliato. Ovviamente anche questa non è una dimostrazione. Cabri 3D potrebbe infatti aver via via fatto delle approssimazioni. Non è così. Effettivamente Pacioli si è sbagliato. Quel che meraviglia che l'errore sia stato notato solo recentemente in un articolo pubblicato nel 2015[18]. Rimandiamo a questo articolo per i particolari. Qui ci limitiamo a dire che la dimostrazione si riduce a circa mezza pagina. Per mezzo di ragionamenti geometrici alla portata di uno studente che frequenti gli ultimi anni del liceo si arriva a calcolare le distanze dei vertici delle piramidi rispetto al piano "orizzontale" passante per il centro del poliedro. La dimostrazione che la distanza della piramide pentagonale sia maggiore di quella delle piramidi triangolari richiede, per dirla con Pacioli, la *subtilissima pratica maxime de algebra & almucabala a rari nota*[19]. Le parole *algebra* e *almucabala* si rifanno a procedure di calcolo descritte da Al-Khuwaritzi, introdotte in Europa da Leonardo Pisano (Fibonacci) nel *Liber Abaci* del 1202 e divulgate da Luca Pacioli a mezzo stampa nel *Summa*[20] pubblicato nel 1494. Per maggiori particolari si rimanda al testo di Catastini, Ghione, Rashed[21].

Ma torniamo alla geometria. Spero di essere riuscito a convincervi che con l'uso di belle figure e di modelli reali e virtuali di poliedri sia possibile *educare lo sguardo* degli studenti introducendoli gradualmente a problemi non banali di geometria dello spazio fin dal primo anno delle scuole secondarie di secondo grado riallacciandosi senza soluzione di continuità con la geometria dello spazio studiata nelle scuole secondarie di primo grado.

[18] Dirk Huylebrouck, *A Divine Error*, Proceedings of *Bridges 2015*: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture http://archive.bridgesmathart.org/2015/bridges2015-93.pdf

[19] Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, capitolo LII, folio LVIII r.

[20] Luca Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, Paganino Paganini, Venezia,1494.

[21] Laura Catastini, Franco Ghione, Roshdi Rashed, *Algebra. Origini e sviluppi tra mondo arabo e mondo latino*. Carocci Editore, 2016.