

Giuseppe Accascina
Sapienza, Università di Roma

*Geometria dello spazio:
dalle immagini ai modelli*

GFMT, 35° Convegno

sulla

Didattica della Matematica

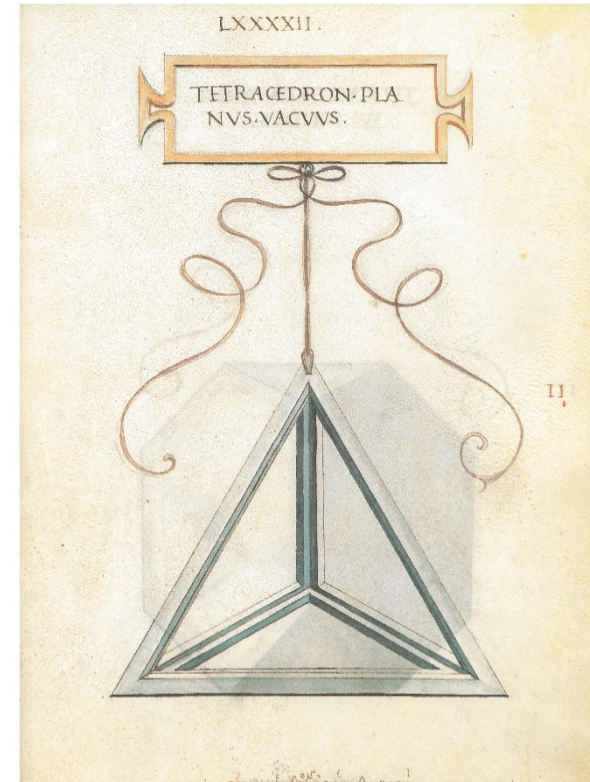
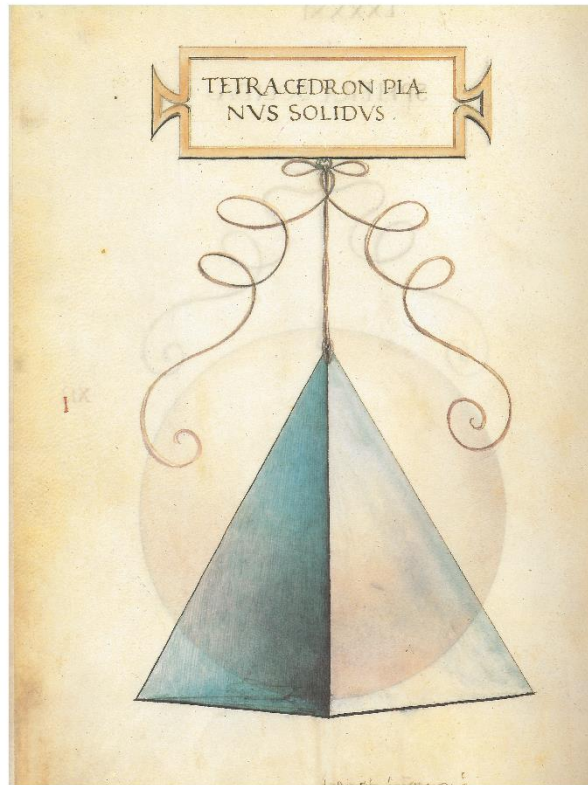
10 Settembre 2018, Lucca
I.C. «Lucca Centro Storico»

I poliedri regolari sono una ricca fonte di problemi a vari livelli di difficoltà, alcuni proponibili a studenti delle scuole superiori o all'inizio dei loro corsi universitari, altri già a studenti degli ultimi anni di scuola elementare o di scuola media (ed è interessante notare che la capacità di affrontare e risolvere tali problemi migliora assai poco al crescere dell'età e della scolarità, in assenza di attività scolastiche mirate) .

Vinicio Villani, *Cominciamo dal punto*, Pitagora Editrice , Bologna, 2006, pagina 271



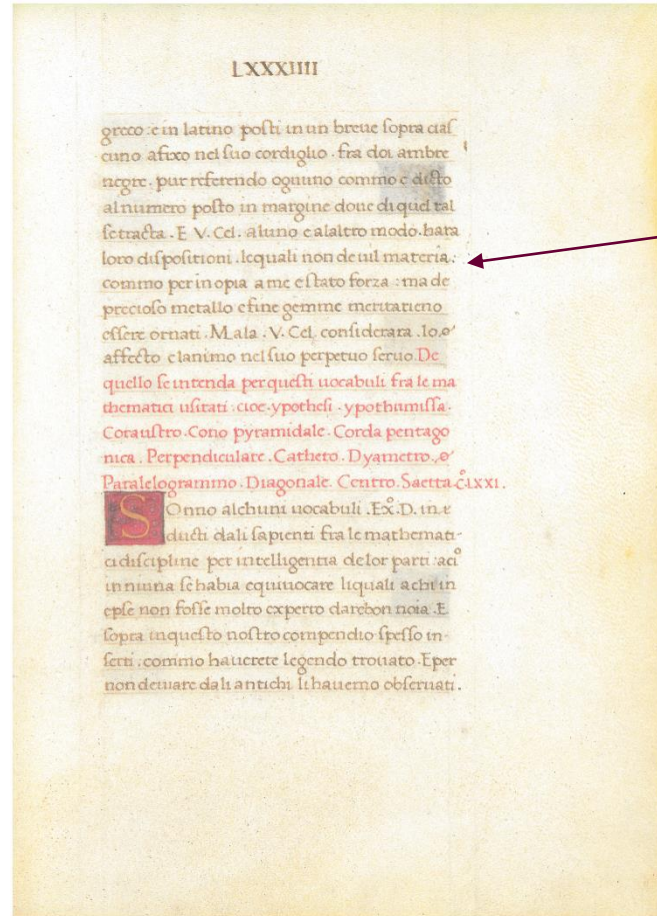
Vinicio Villani



Tavole di Leonardo da Vinci

Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, manoscritto, 1498, Milano, Biblioteca Ambrosiana

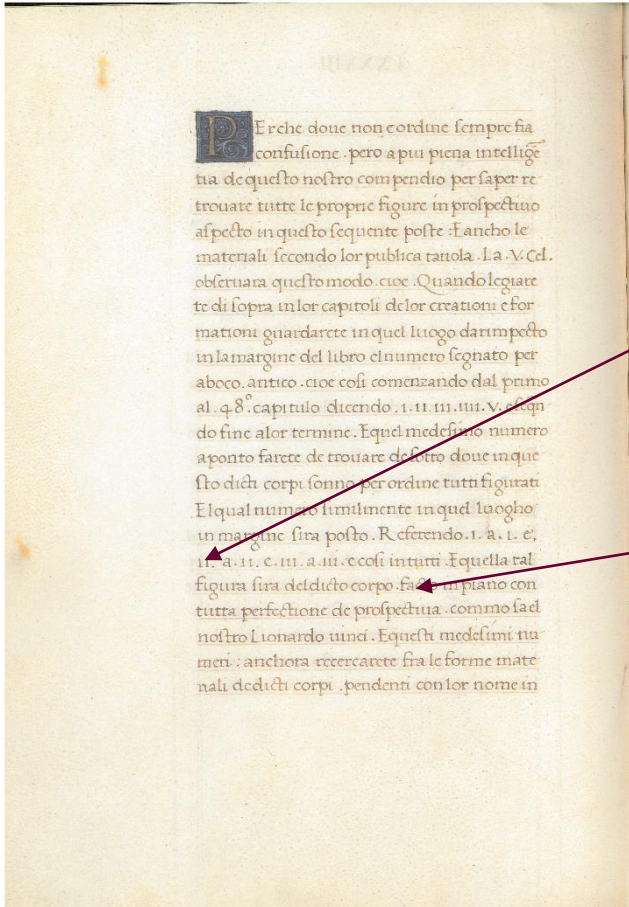
L. Pacioli, *De Divina Proportione*, folio 84r



de vil materia

de vil materia

L. Pacioli, *De Divina Proportione*, folio 83v



11. a. 11. c. 111. a. 111. e così intutti. Equella tal
figura sira del dicto corpo. facto in piano con
tutta perfectione de prospectiva. commo fa el
nostro Lionardo uinci. E questi medesimi nu

*E quella
tal figura sira del dicto corpo facto in piano con
tutta perfectione de prospectiva commo fa el
nostro Lionardi vinci.*

Da Leonardo al percorso didattico

Dalle immagini ai modelli

Leonardo:

modello → immagine

Processo inverso:

immagine → modello

Il percorso didattico

Percorso didattico ideato insieme a **Patrizia Berneschi e Elena Possamai**, responsabili del *Liceo Matematico* nel L.Sc. *Nomentano* di Roma

Sperimentato quest'anno con studenti di:

- **Liceo Scientifico** Nomentano di Roma:
 - 4 prime classi
 - 2 seconde classi
- corso di *Didattica della Matematica*, **Laurea Magistrale in Matematica**, Sapienza, Università di Roma.

Modalità di lavoro

Identica con studenti di scuola e universitari.

Gruppi di 3, 4 studenti.

Ad ogni gruppo vengono date:

una coppia di tavole di Leonardo e una scheda di lavoro in cui si chiede:

1) a partire dalle immagini:

- descrivere il poliedro e sue proprietà geometriche
- determinare tipo e numero di tessere necessarie per costruire un modello reale.

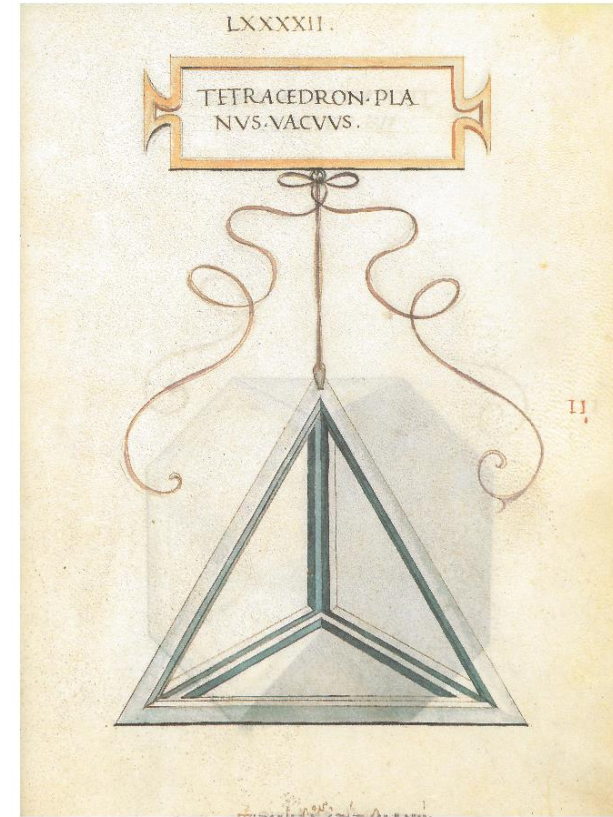
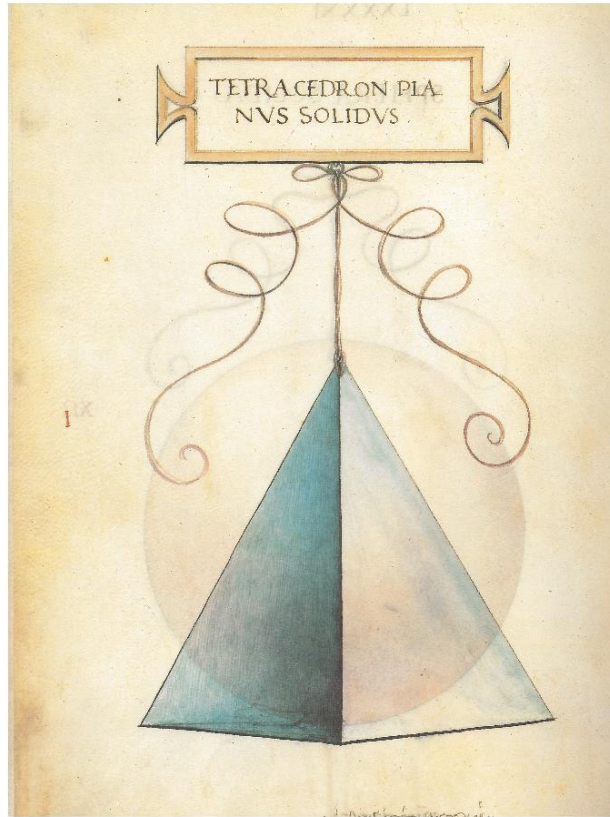
2) costruire un modello reale del poliedro rappresentato nelle tavole.

3) a partire dal modello:

- descrivere il poliedro e sue proprietà geometriche (di nuovo)
- farne una foto
- farne un disegno (nei casi più semplici).

Studenti di Liceo

Dalle immagini ai modelli



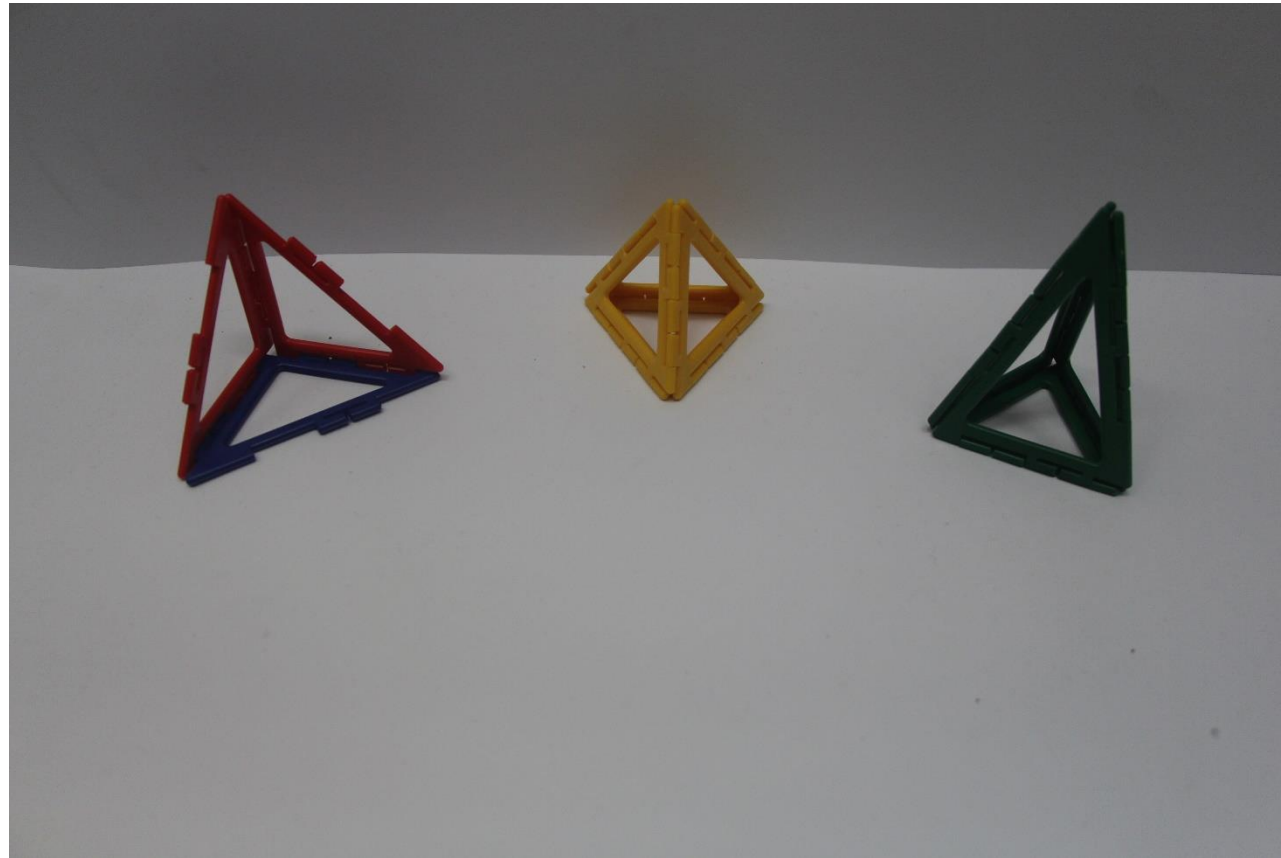
Animata discussione in un gruppo di studenti di seconda Liceo

sono due modelli diversi o uno solo?

Gli studenti di scuola si concentrano sulle immagini dei poliedri. Pochi leggono i cartelli descrittivi. Molti osservano che Leonardo ha scelto due diversi punti di vista e ne danno una giustificazione

Studenti Universitari

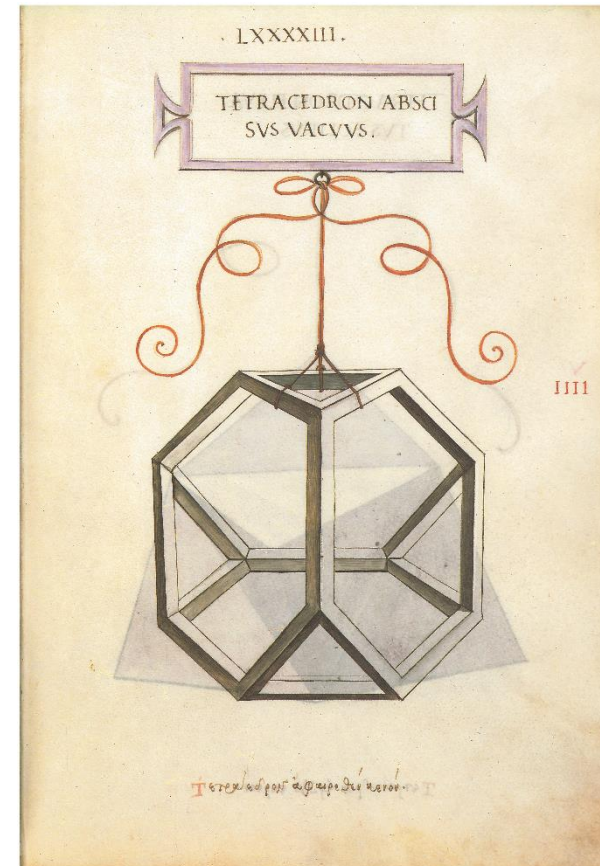
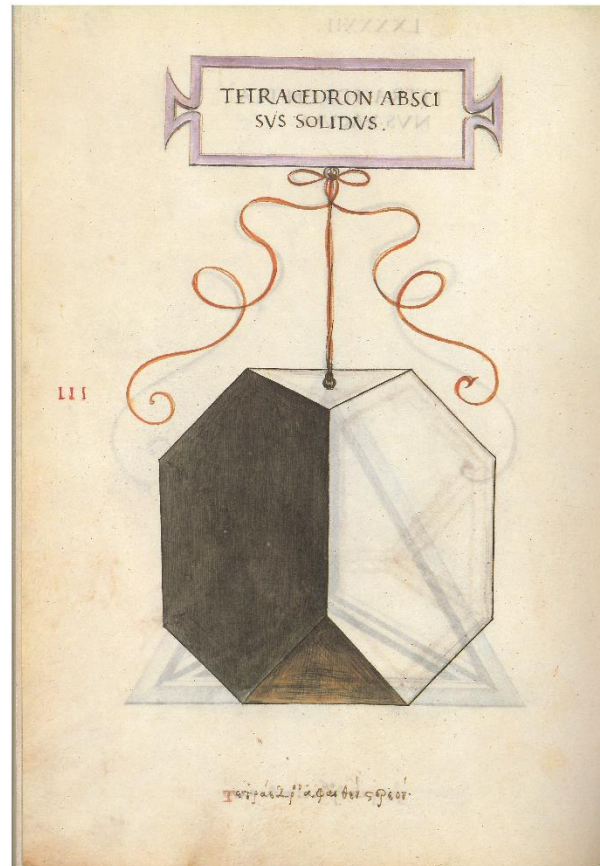
Dalle immagini ai modelli



Quale di questi tre?

Tetraedro tronco

Dalle immagini ai modelli



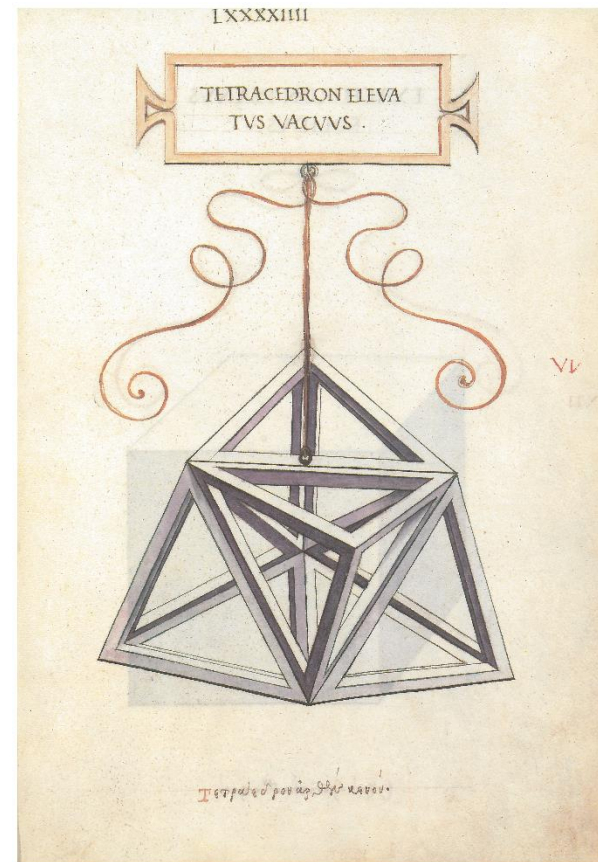
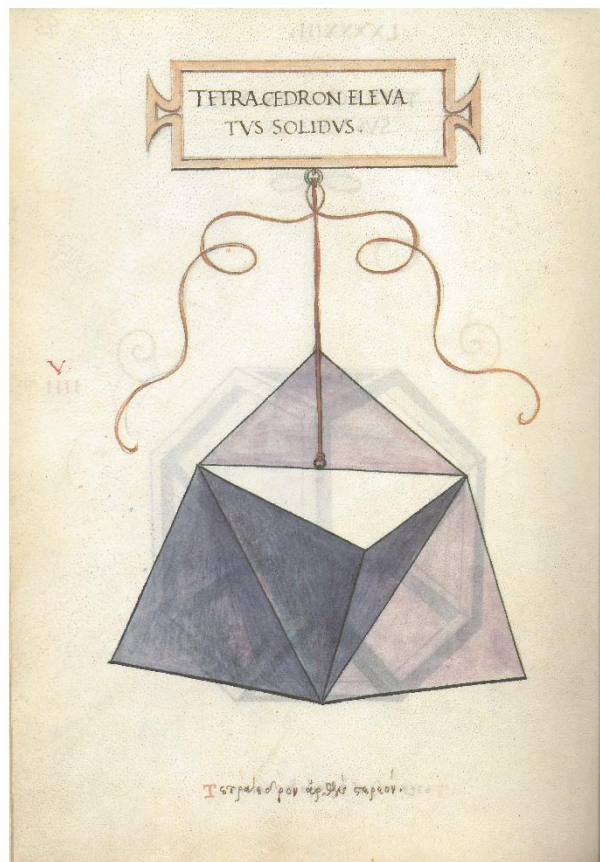
Come si ottiene il tetraedro tronco dal tetraedro?

Poche difficoltà dal punto di vista matematico.

Gli studenti di scuola hanno difficoltà a scrivere quel che hanno scoperto.

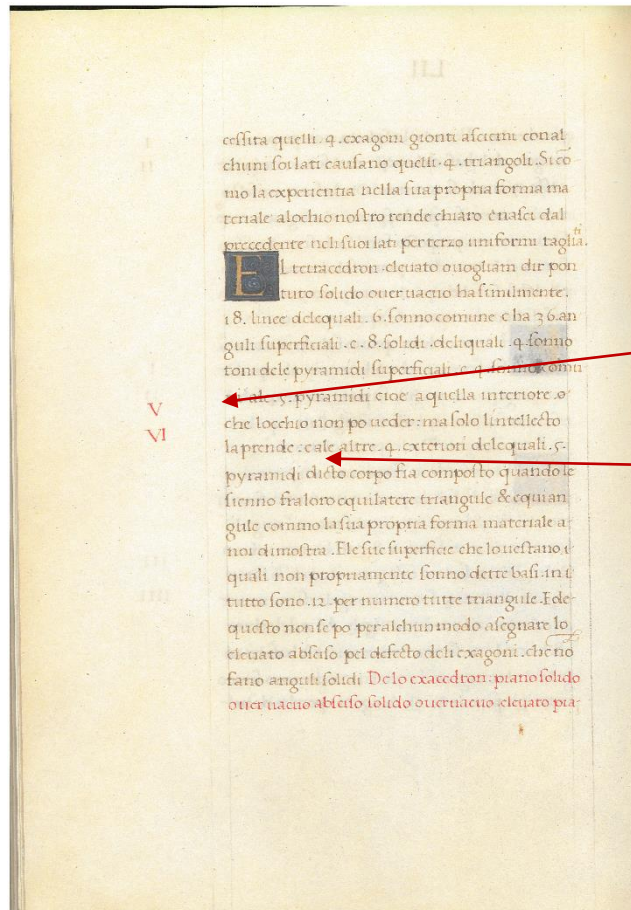
Tetraedro elevato

Dalle immagini ai modelli



*Il tetraedro elevato è ottenuto da un tetraedro.
Dove sta il tetraedro di partenza?*

L. Pacioli, *De Divina Proportione*, folio 52v

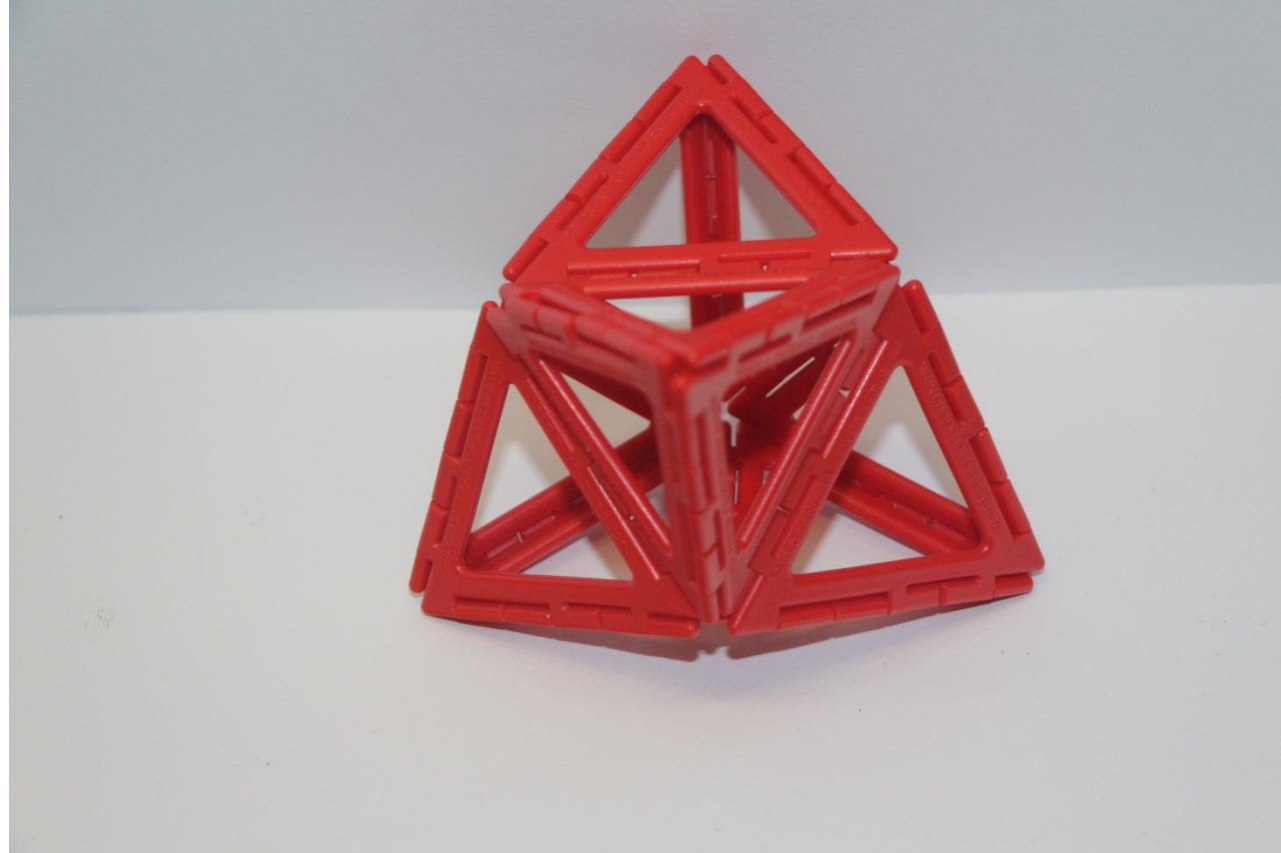


ni ale. 5. pyramidi cioe a quella interiore o
che locchio non po ueder: ma solo l'intellecto
la prende: e ale altre. 4. exteriori de le quali. 5.

*quella interiore o
che locchio non po veder: ma solo l'intellecto
la prende*

Tetraedro elevato

Dalle immagini ai modelli



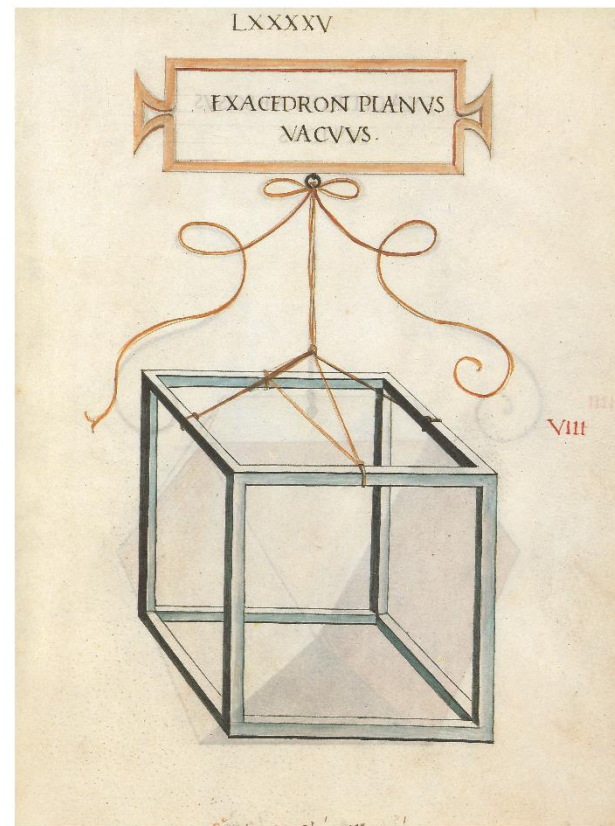
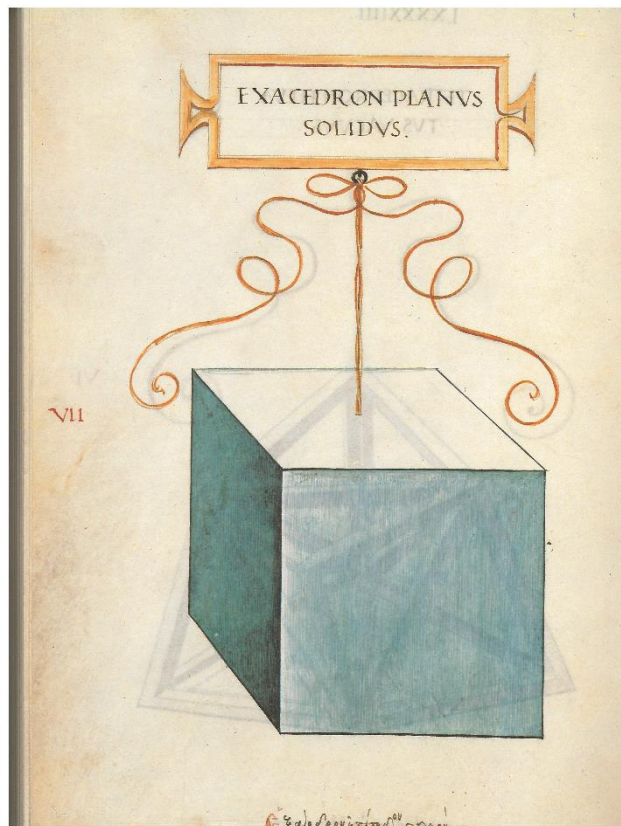
Abbiamo commesso qualche errore?

No!

Quanto è brutto!

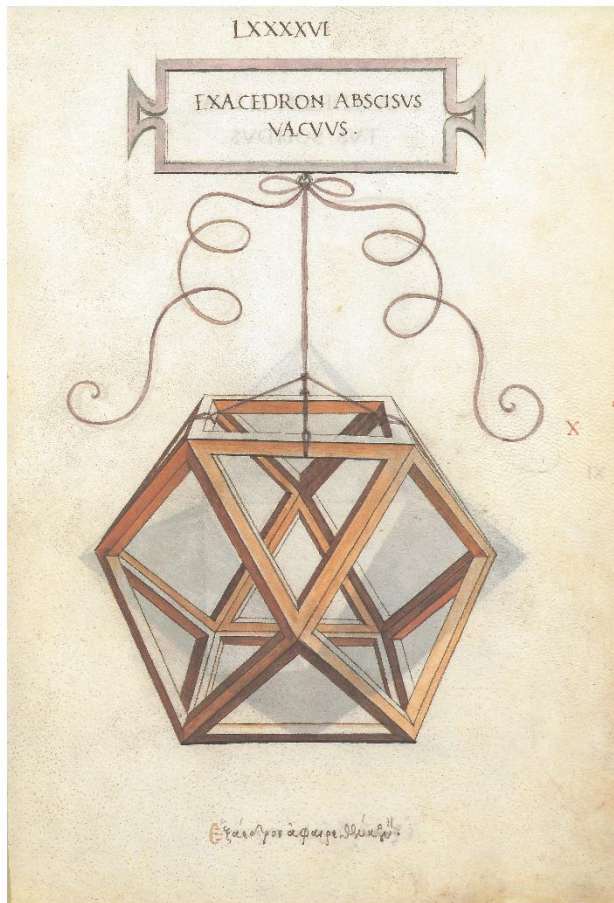
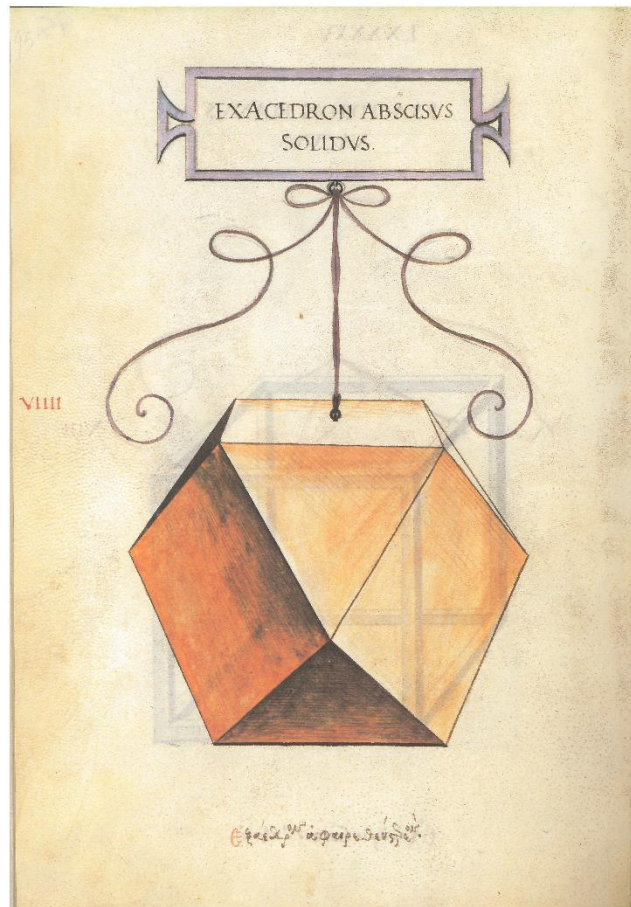
Cubo

Dalle immagini ai modelli



Cubo tronco

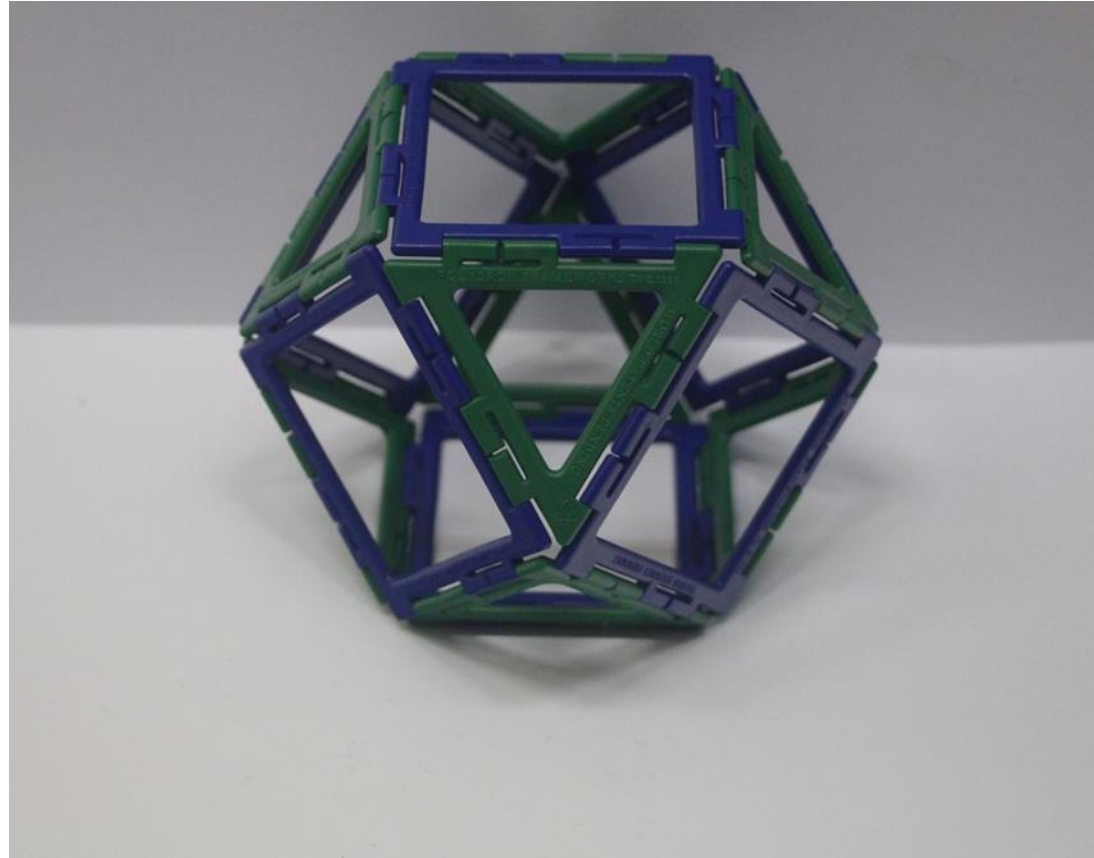
Dalle immagini ai modelli



Come si ottiene il cubo tronco dal cubo?

Troncando ogni vertice con il piano passante per il punto medio degli spigoli concorrenti nel vertice.

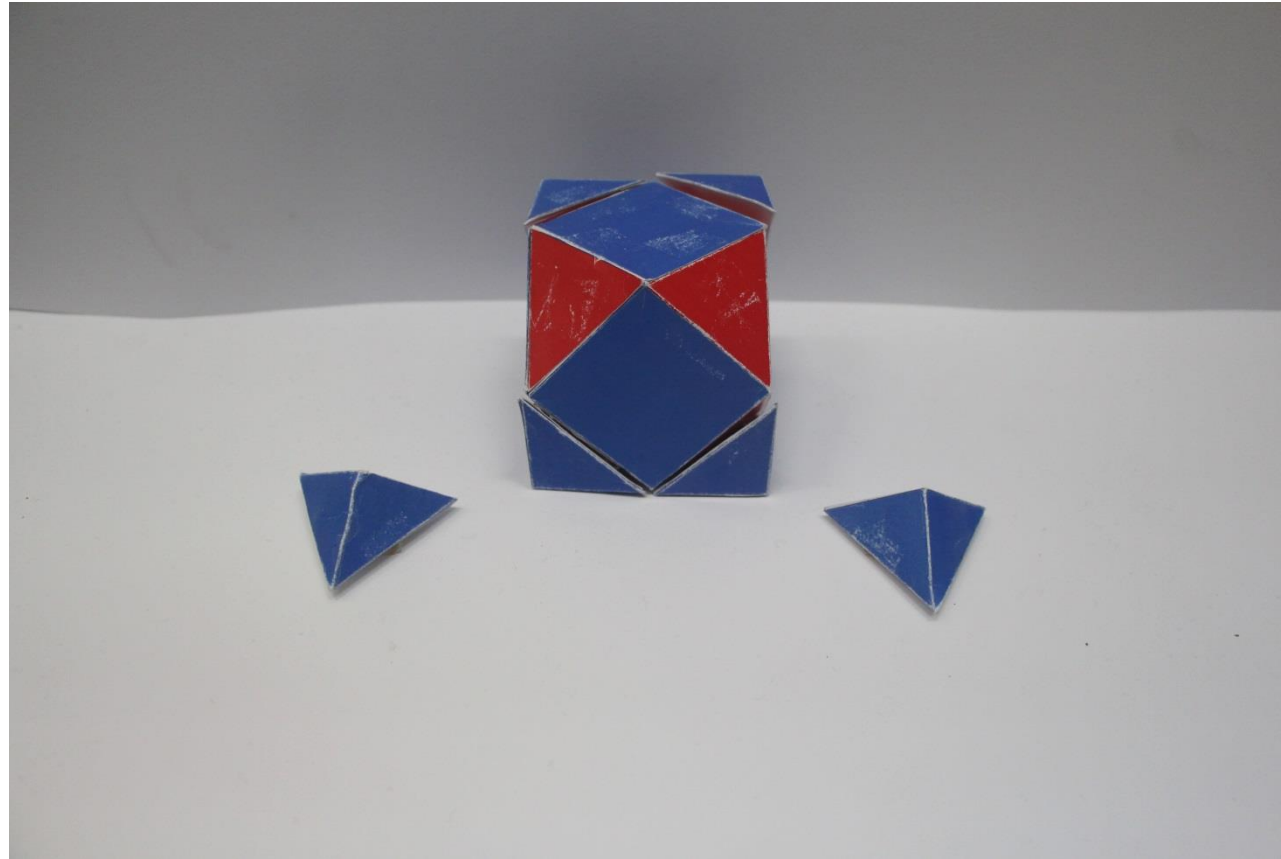
Modello reale del cubo tronco



Come si riottiene il cubo originario dal cubo tronco?

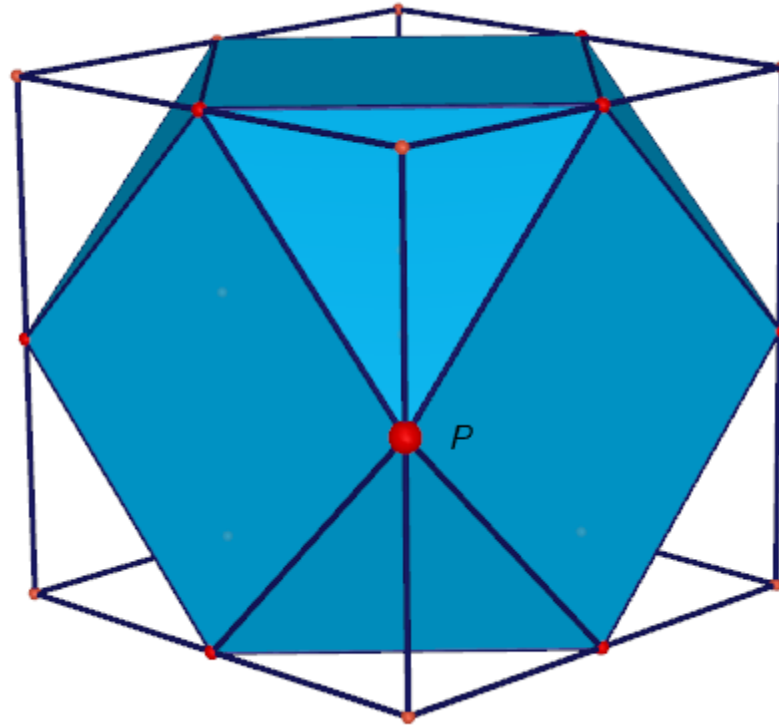
Modello reale del cubo tronco in cartoncino

Dalle immagini ai modelli



Modello costruito da me. Non lo farò mai più.
Ho impiegato troppo tempo.
Non lo farei mai costruire agli studenti

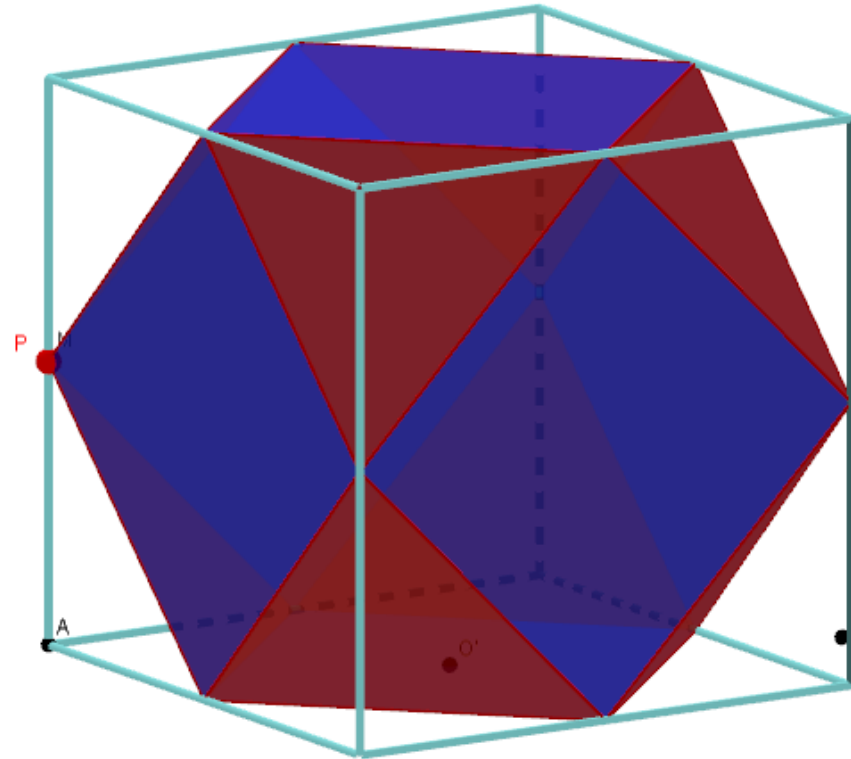
Modello virtuale del cubo e del cubo tronco



Costruito da studenti del quarto anno dell'Istituto Tecnico Industriale *Galilei* di Roma nell'ambito del *Progetto Archimede*. A.S. 2013-14 (secondo anno di attività).

[File Cabri 3D](#) (muovendo il **punto rosso** *P* si passa dal cubo tronco al cubo e viceversa).

Modello virtuale del cubo e del cubo tronco

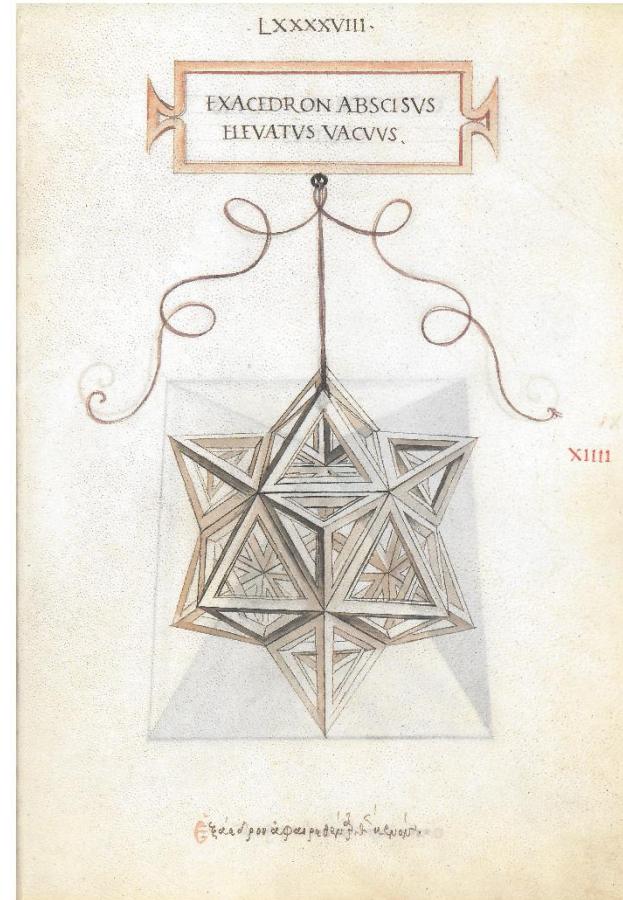
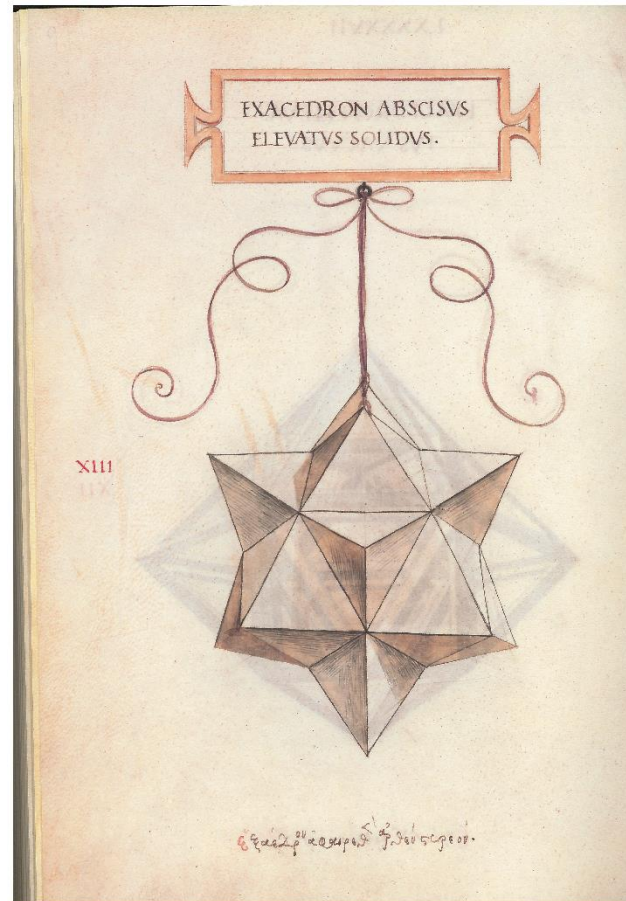


Costruito dagli studenti universitari del corso di Didattica della Matematica, A.A. 2017-18.

[File Geogebra](#)

Cubo tronco elevato

Dalle immagini ai modelli

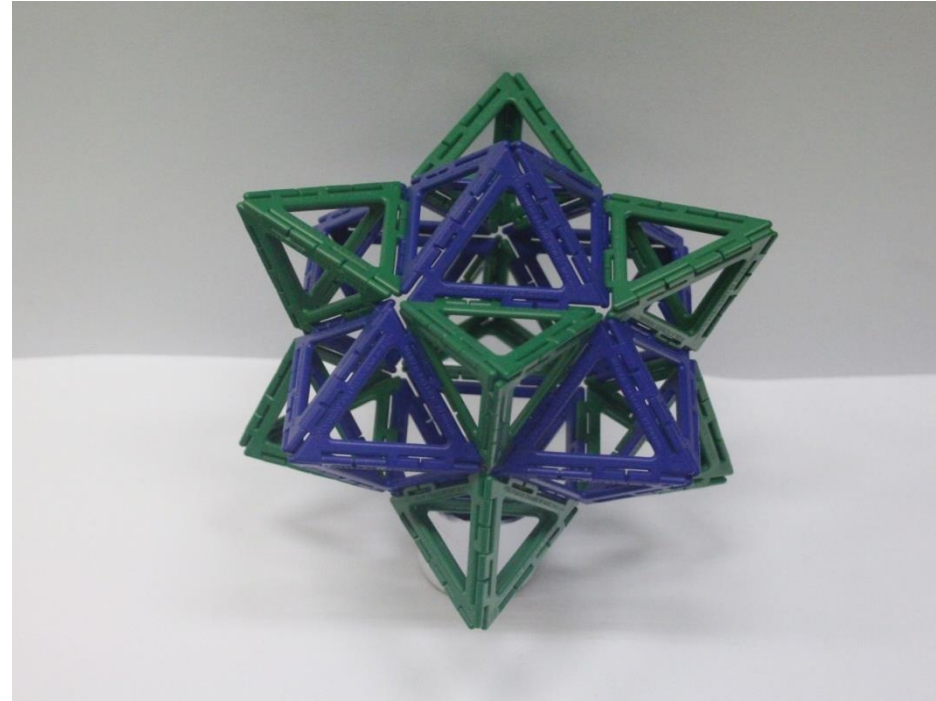


Come si ottiene dal cubo tronco?

Nessuna difficoltà nel capire come si ottiene.

Molte difficoltà nel capire alcune sue proprietà geometriche

Modello reale del cubo tronco elevato



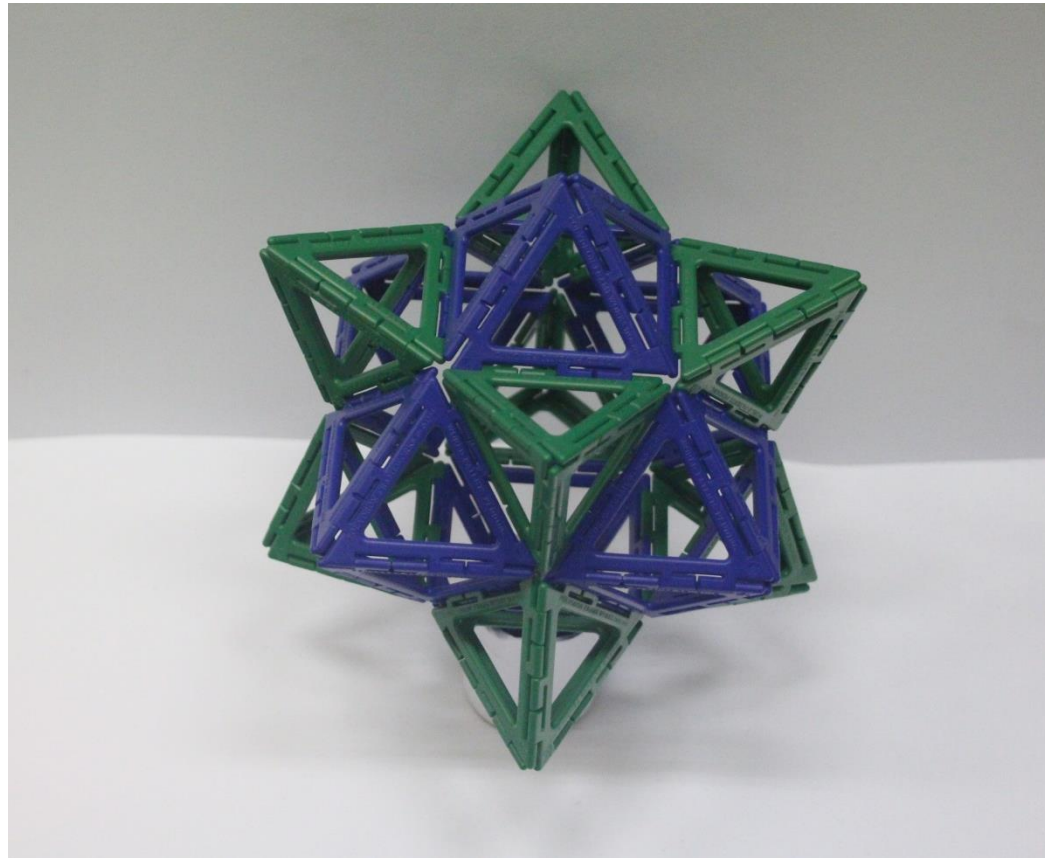
Osservate qualcosa di nuovo?

Il cubo tronco si ottiene per troncamento sia dal cubo che dall'ottaedro.

Nuovo nome: **cubottaedro**

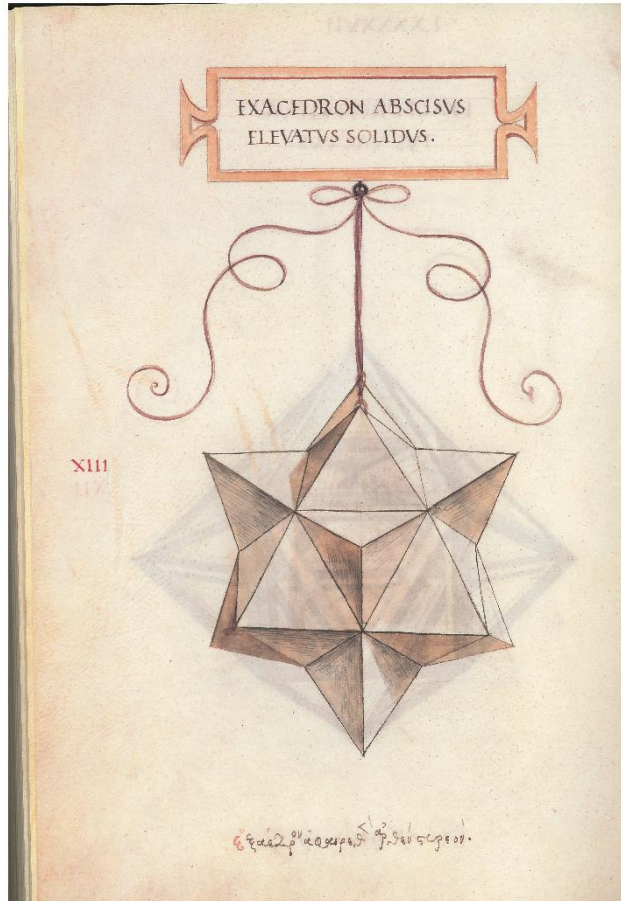
Cubottaedro elevato

Dalle immagini ai modelli



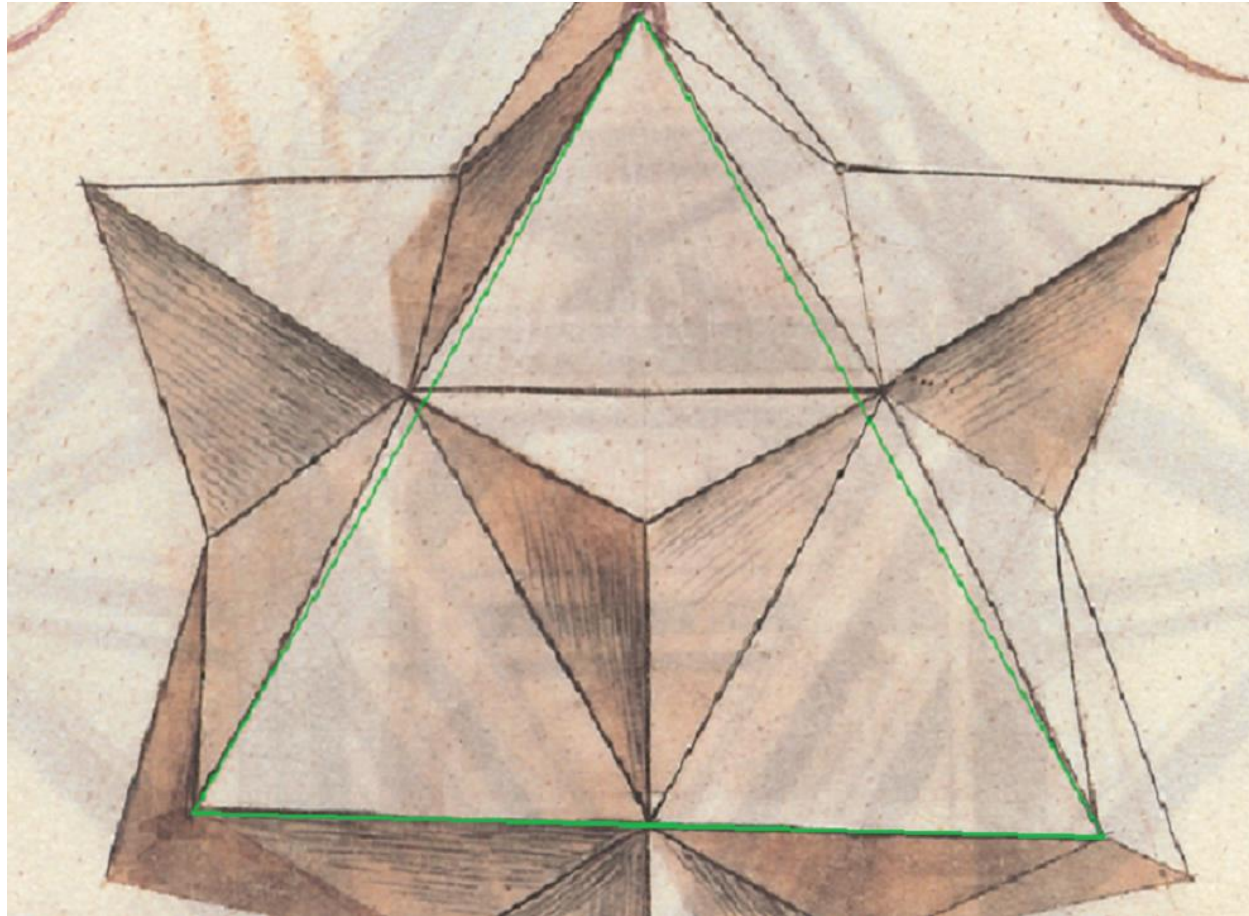
Cubottaedro elevato - la tavola di Leonardo

Dalle immagini ai modelli



Notate qualcosa di strano?

Cubottaedro elevato - la tavola di Leonardo Ingrandimento



Leonardo e Pacioli hanno commesso un errore.

Potenza della geometria e dell'uso di modelli

La geometria è l'arte di fare ragionamenti giusti su figure sbagliate.

George Poyla

Quanti più sensi sono coinvolti tanto più una cosa è reale.

Wilfred Bion

Il lavoro manuale rende gli oggetti veri, reali, pieni di senso. Dopo averli realizzati ne sentiamo l'odore, il suono, il sapore, la consistenza, il peso, la temperatura, la forma, i colori...

Il percorso di realizzazione e la sua storia spesso non lineare, con le sue difficoltà e le sue soluzioni, creano l'esperienza e rendono agile la mente ed il corpo, attraverso un percorso di continui rimandi e di messa a punto. E' una modalità di relazione col mondo che ha decine di migliaia di anni, ed ha prodotto un dialogo con la natura che ha permesso la creazione degli strumenti fisici e mentali dell'evoluzione naturale.

Guido Accascina

Potenza della geometria e dell'uso di modelli

Con l'uso

- di belle figure
- di modelli reali
- di modelli virtuali

è possibile **educare lo sguardo** degli studenti introducendoli gradualmente a problemi non banali di geometria dello spazio fin dal primo anno delle scuole secondarie di secondo grado riallacciandosi senza soluzione di continuità alla geometria dello spazio studiata l'anno precedente nelle scuole secondarie di primo grado.

educare lo sguardo



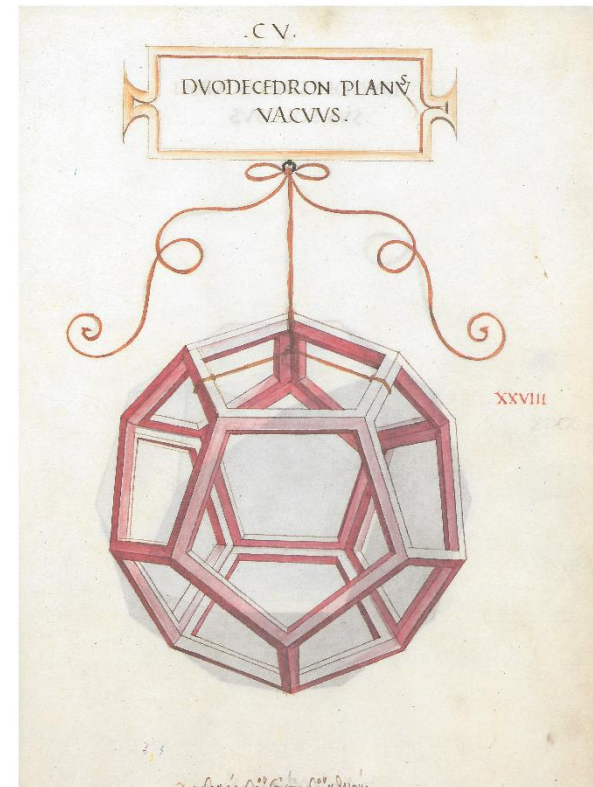
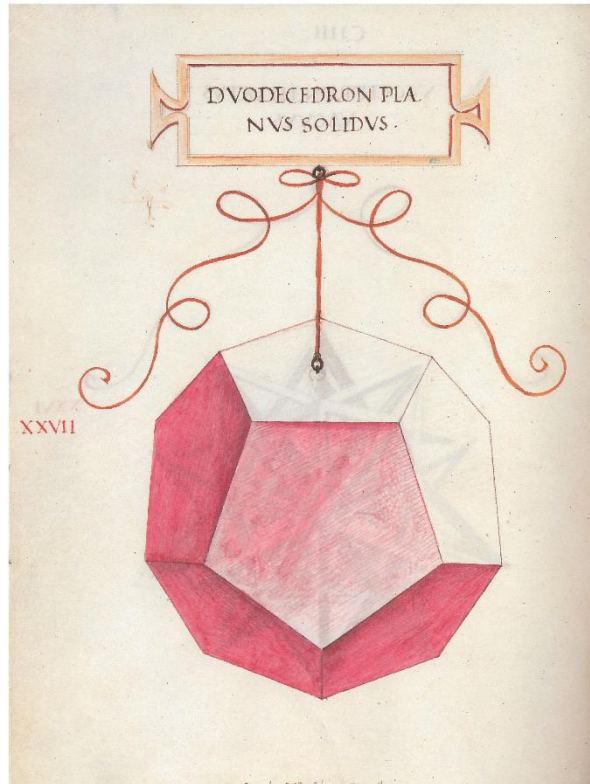
Paolo Veronese *Martirio e ultima Comunione di Santa Lucia* (1582)

educare lo sguardo

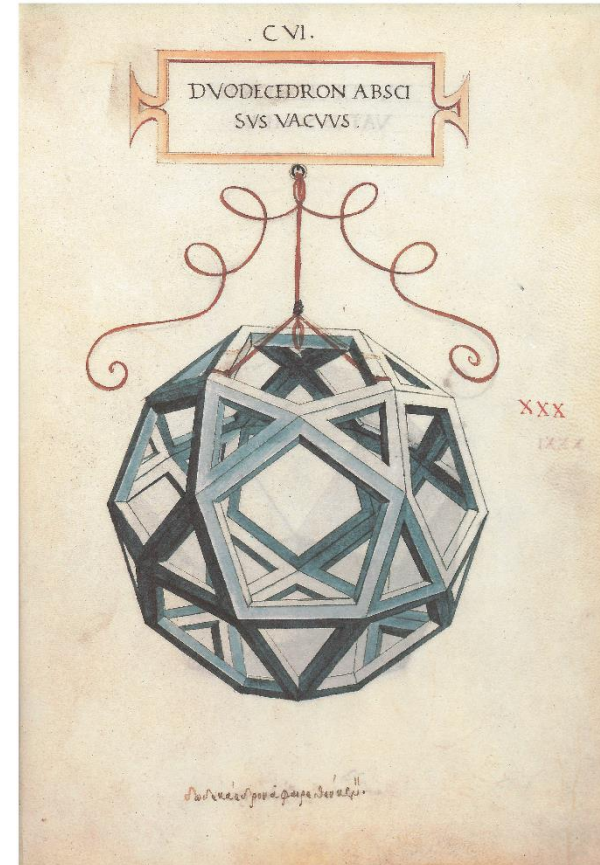
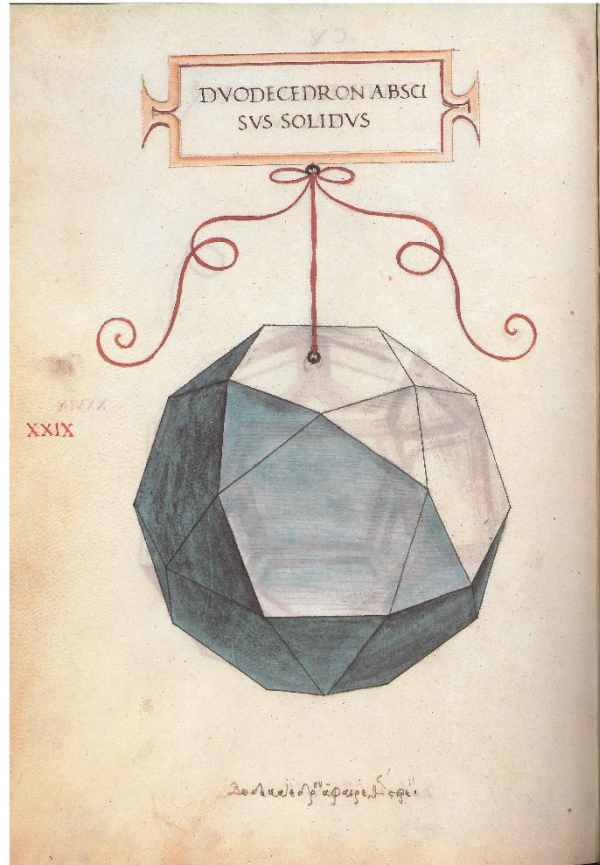


Paolo Veronese *Martirio e ultima Comunione di Santa Lucia*
(particolare)

Dodecaedro

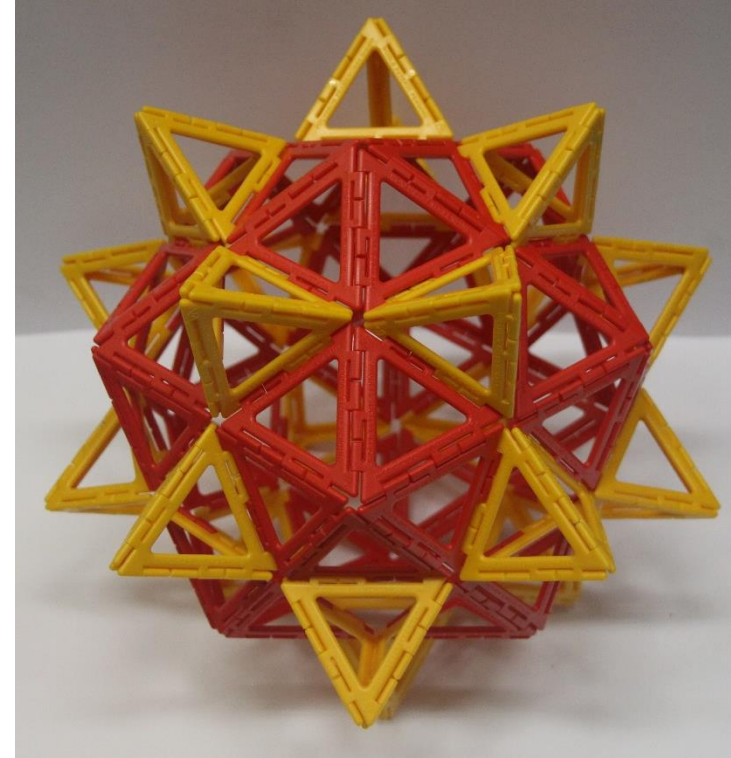
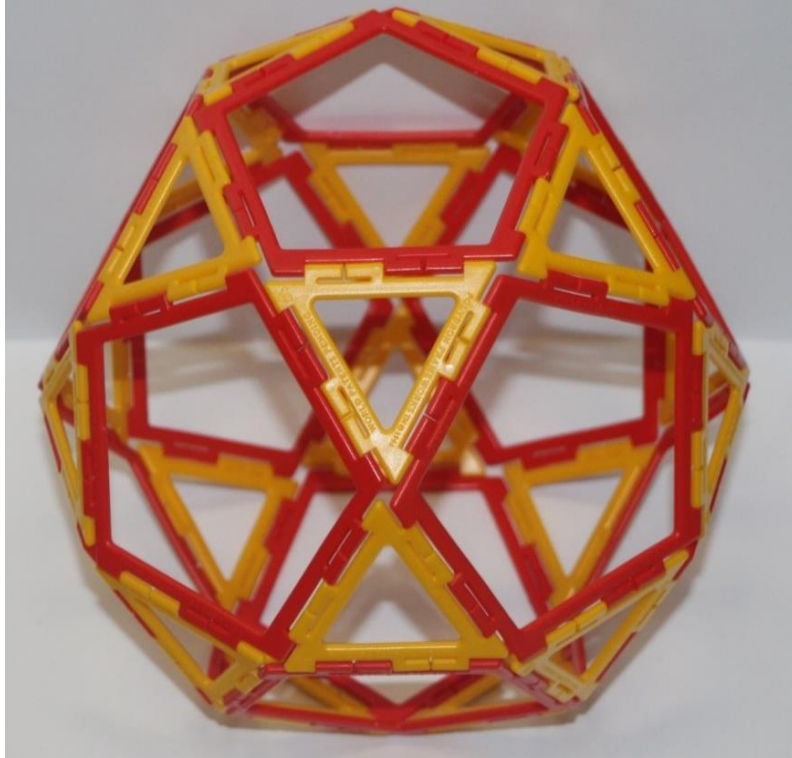


Dodecaedro tronco



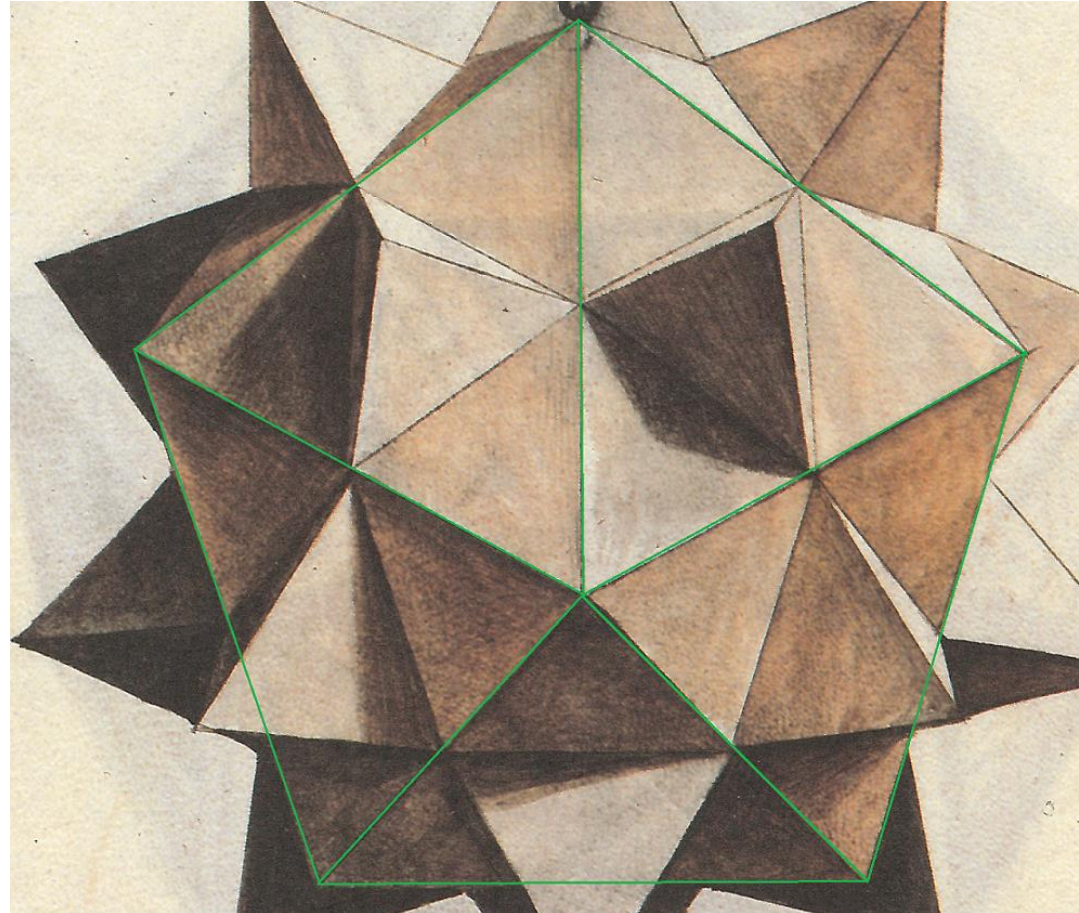
E' ottenuto dal dodecaedro tagliando ognuno dei suoi vertici per mezzo del piano passante per i punti medi degli spigoli concorrenti nel vertice stesso.

Modelli reali di dodecaedro tronco e di dodecaedro tronco elevato



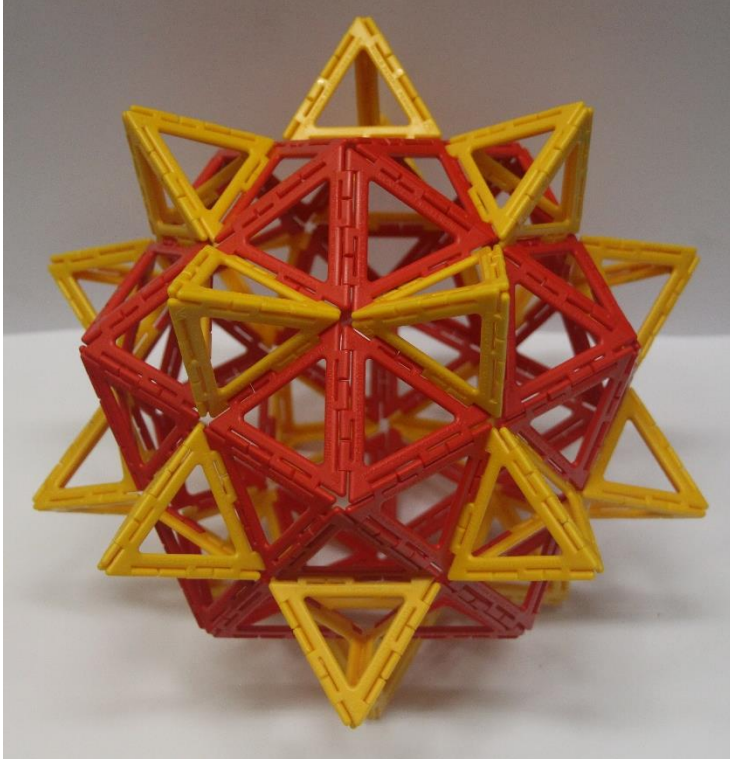
Icosidodecaedro e Icosidodecaedro elevato

Dodecaedro tronco elevato – la tavola di Leonardo Dalle immagini ai modelli particolare



Qui Leonardo e Pacioli non hanno commesso un errore

Un altro problema



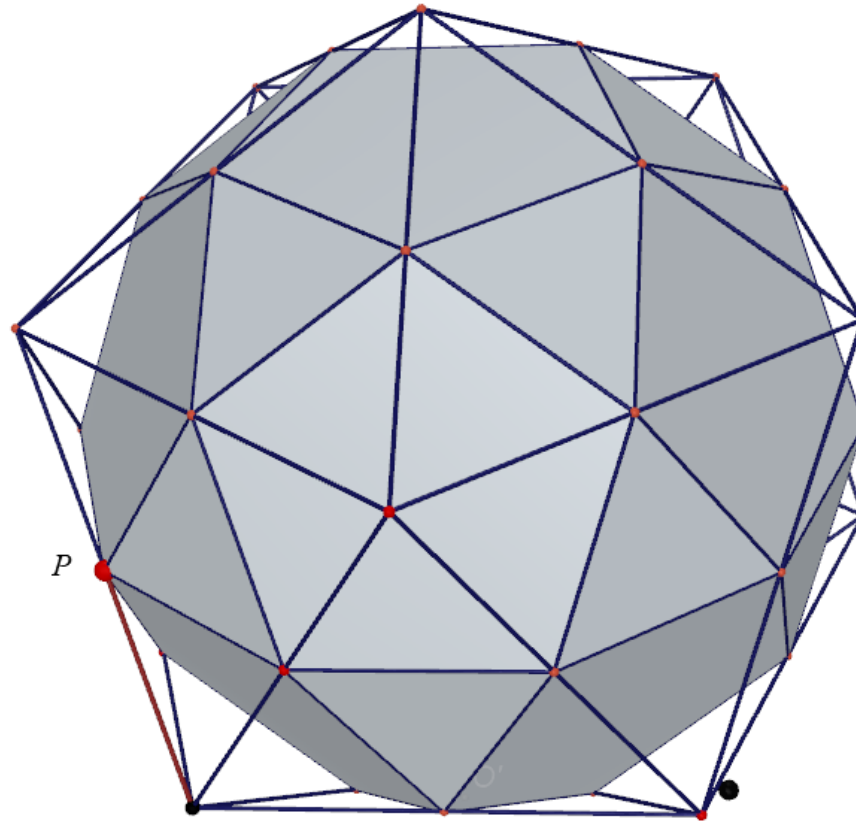
Pacioli è interessato ad un altro problema

***I vertici delle 6 piramidi superiori sono
complanari?***

Pacioli dice di sì e dichiara di usare la *subtilissima pratica maxime de algebra & almucabala*.

Algebra & almucabala: a procedure di calcolo descritte da Al-Khuwaritzi, introdotte in Europa da Leonardo Pisano (Fibonacci) nel *Liber Abaci* del 1202 e divulgate da Luca Pacioli a mezzo stampa nel *Summa* pubblicato nel 1494.

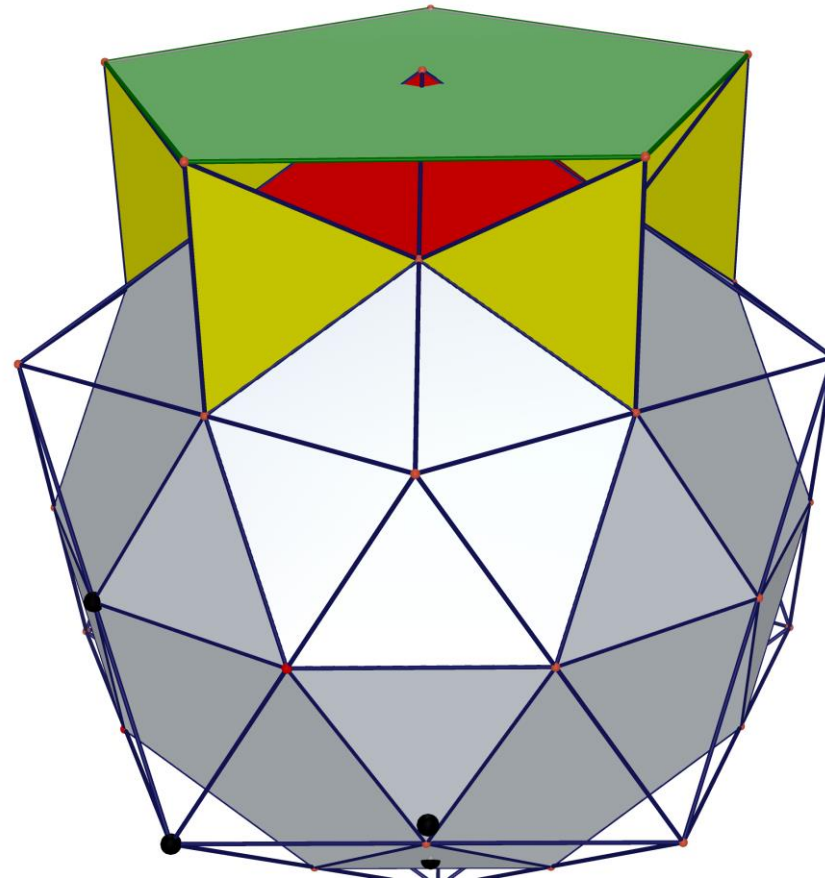
Modello virtuale di icosidodecaedro e icosaedro



Costruito nel 2015 dagli studenti di quarta del Liceo *Nomentano* partecipanti al *Progetto Archimede*.

[File Cabri 3D](#) (Trascinando il **punto rosso** *P* si passa dall'icosidodecaedro all'icosaedro e viceversa).

Modello virtuale di (parte di) icosidodecaedro elevato



La subtilissima pratica maxime de algebra & almucabala a rari nota ha tradito Pacioli. [File Cabri 3D.](#)