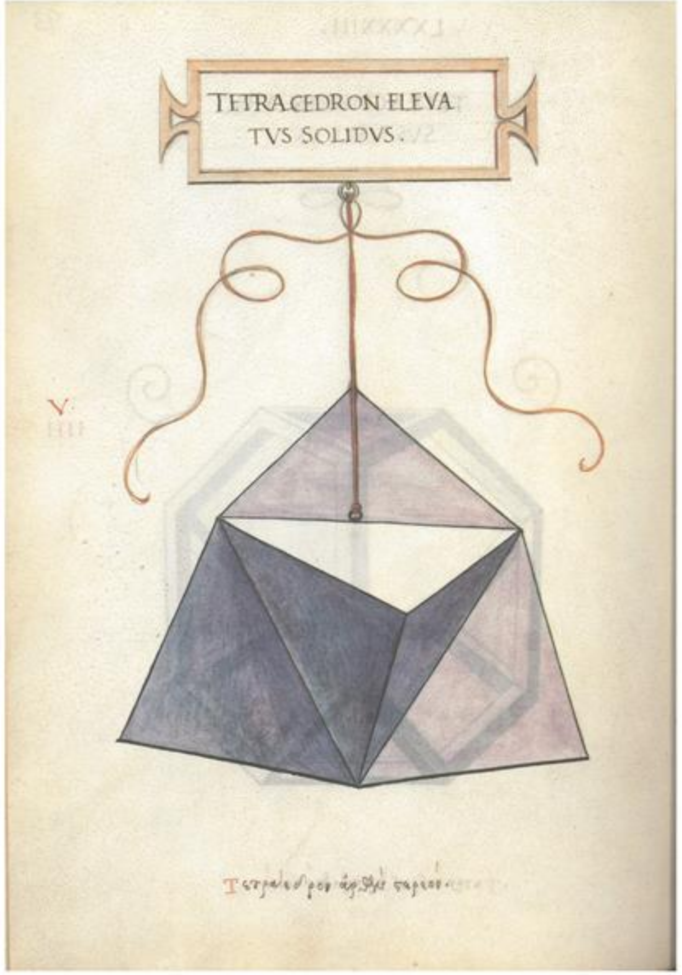
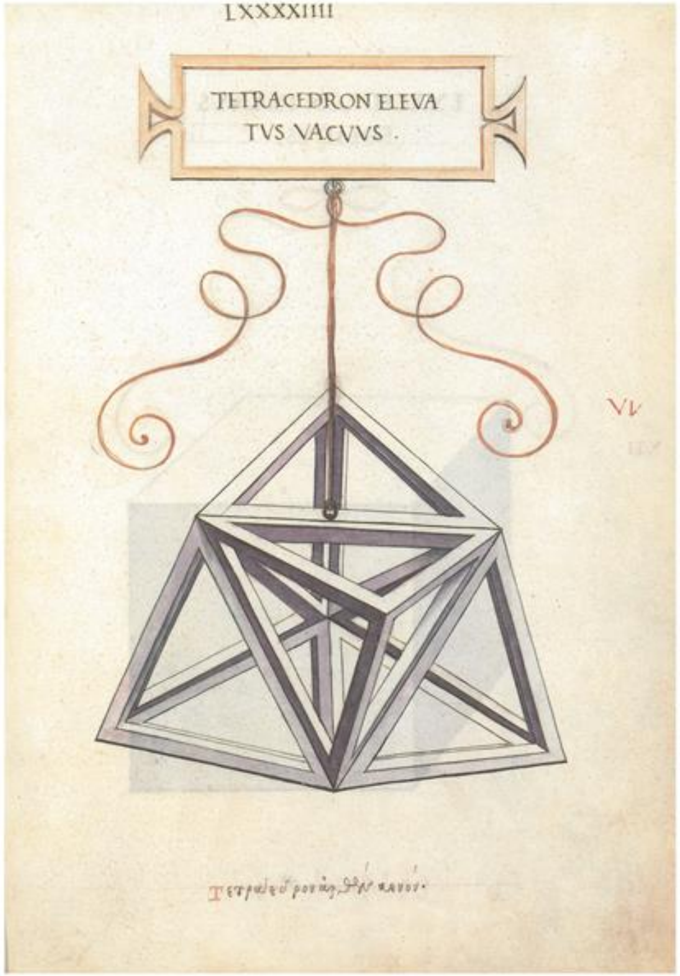
Dalle immagini ai modelli

Poliedri elevati

E. Possamai
Dip. Matematica, Sapienza, 22 febbraio 2019

TETRACEDRON ELEVATUS





TETRACEDRON ELEVATUS

Osservare e descrivere un poliedro a partire dalle immagini

TETRACEDRON ELEVATUS
SOLIDUS

TETRACEDRON ELEVATUS
VACUUS

DOMANDA (classi prime e seconde)

- *Quali sono le proprietà geometriche del poliedro raffigurato?*

A questo tipo di domande i ragazzi rispondono senza particolari difficoltà!

TETRACEDRON ELEVATUS

ALTRE DOMANDE

- *Come si ottiene il tetraedro elevato da un tetraedro?*
- *Dove sta il tetraedro di partenza?*

Gli studenti hanno capito, ma hanno avuto un po' di difficoltà nello scrivere quel che hanno capito.

Esempi di risposte degli studenti

Come si ottiene il tetraedro elevato da un tetraedro?

ABBIAMO COSTRUITO IL TETRAEDRO ELEVATO COSTRUENDO TRE TETRAEDRI SENZA UNA BASE. ABBIAMO POI FATTO COINCIDERE OGNI SPIGOLO DI UN TETRAEDRO CON UNO SPIGOLO DELL'ALTRO TETRAEDRO; OTTENENDO COSÌ UN TETRAEDRO ELEVATO

Preso un tetraedro l'immaginario si costruiscono 4 tetraedri sulle facce del primo.

Il tetraedro elevato si ottiene costruendo un tetraedro su ogni faccia di un tetraedro dato.

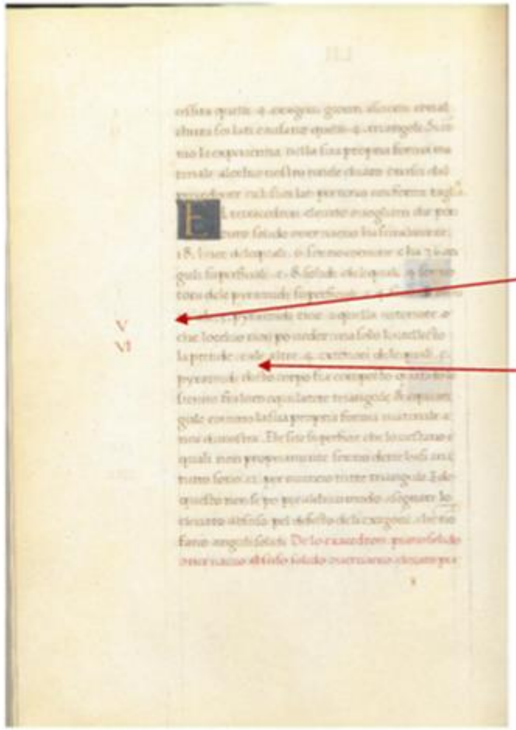
TETRACEDRON ELEVATUS

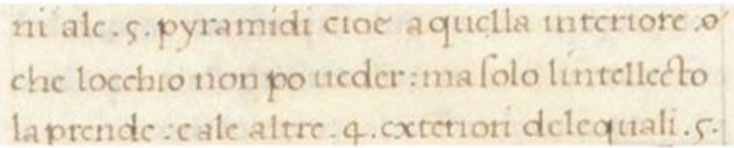
Dove sta il tetraedro di partenza?

Vediamo cosa ci dice Pacioli…

TETRACEDRON ELEVATUS VACUUS

L. Pacioli, *De Divina Proportione*, folio 52v

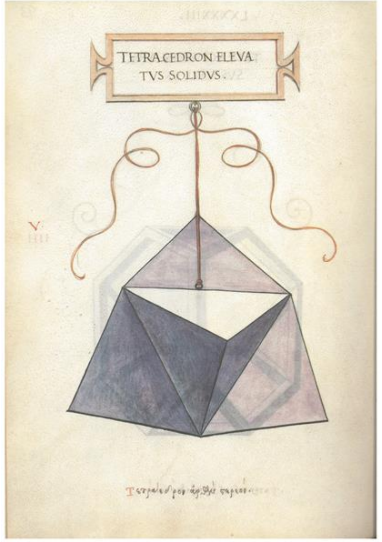


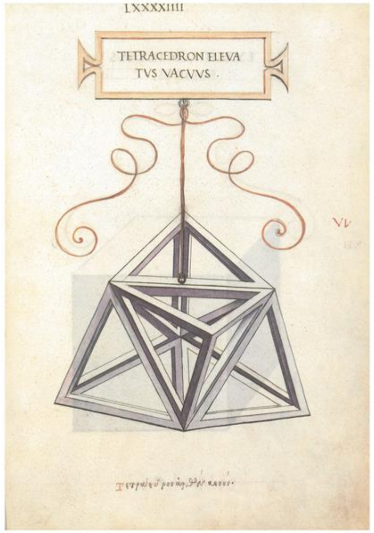

ni alc.5.pyramidi cioe aquella interiore o
che locchio non po ueder: ma solo lintellecto
la prende: e ale altre.4.exteriori dele quali.5.

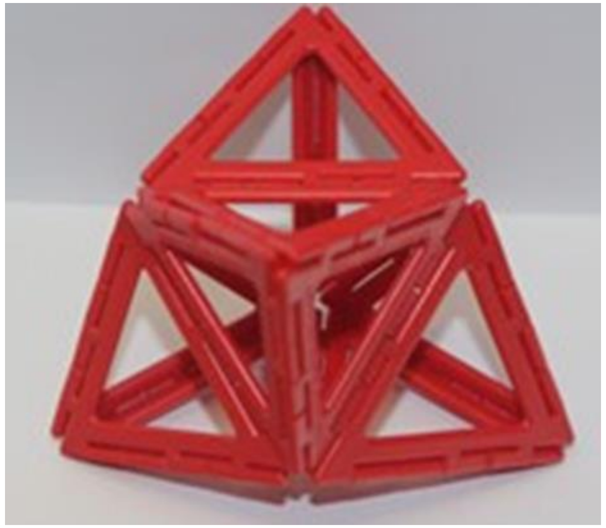
quella interiore o
che locchio non po veder: ma solo lintellecto
la prende

TETRACEDRON ELEVATUS

Dalle immagini ai modelli reali e confronto con le immagini





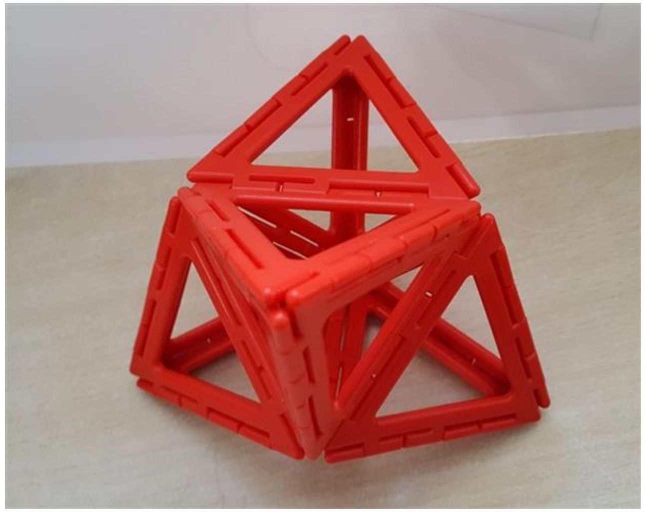


RICHIESTE

- *Costruite con le tessere un tetraedro elevato.*
- *Confrontando il modello reale del poliedro con le tavole di Leonardo avete notato qualcosa di inaspettato?*

Vediamo come hanno risposto gli studenti…

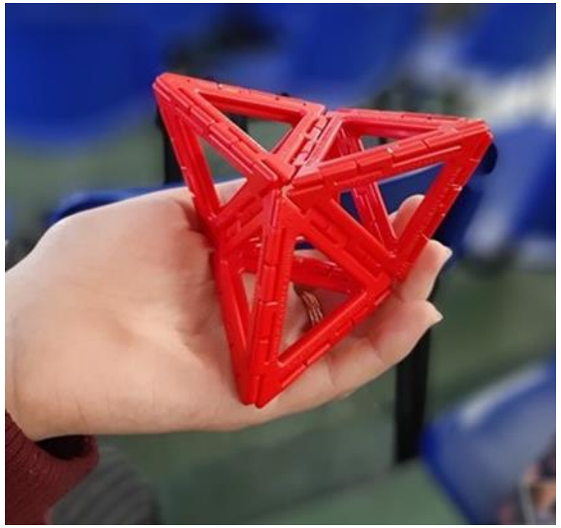
A.S.2017-18
Esempi di risposte degli studenti classi prime e seconde

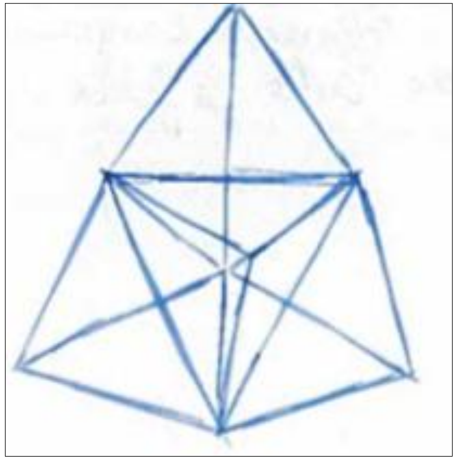


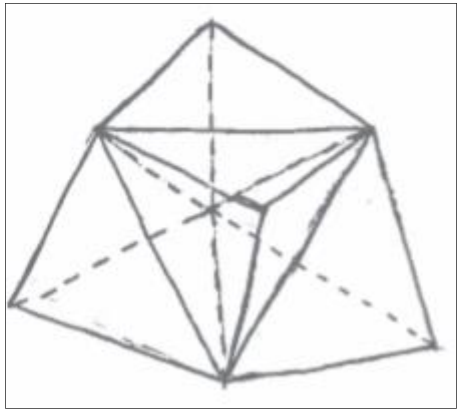
Abbiamo notato che non poggia su una base ma su degli spigoli mentre dalle tavole sembra che poggi su due facce inferiori

SI CHE IL MODELLO NON PUÒ POGGIARE SU DUE VERTICI COME SEMBREREBBE DAL DISEGNO MA DEVE POGGIARE SU DUE SPIGOLI

A.S. 2018-19. Due classi terze
Dalle immagini ai modelli reali – Dai modelli alle immagini







Quest'anno abbiamo aggiunto:

Dopo aver costruito il tetraedro elevato, fate un disegno e una foto «significativi»

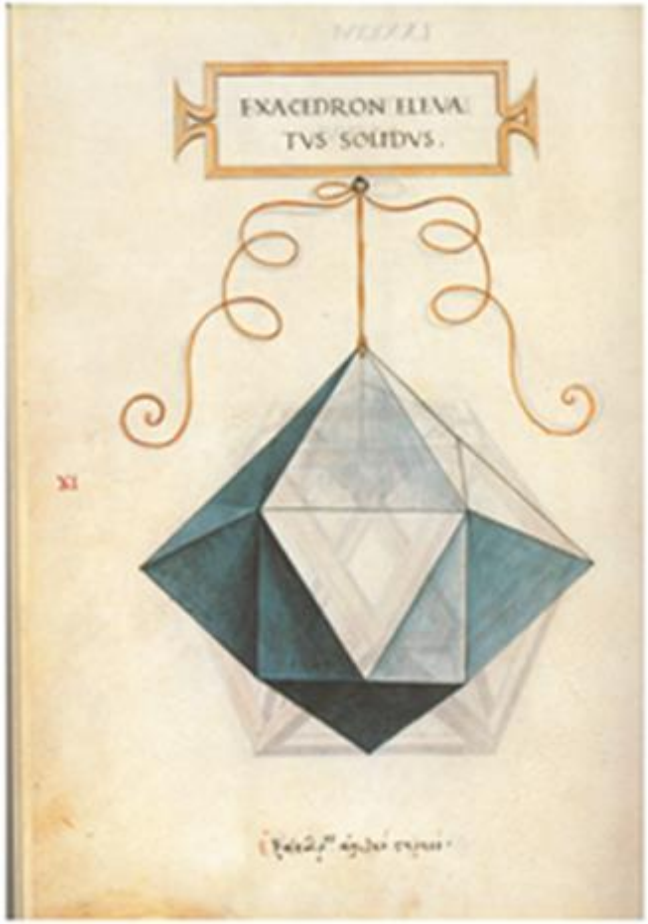
Immaginavamo che **disegnare** il poliedro fosse **difficile** ma pensavamo che **fotografarlo** fosse **facile** e invece….

Questo poliedro è piuttosto **brutto**….

Hanno impiegato tanto tempo!... Alla fine hanno scelto il punto di vista di Leonardo.

EXACEDRON ELEVATUS

Osservare e descrivere un poliedro a partire da una sua immagine



EXACEDRON ELEVATUS SOLIDUS

EXACEDRON ELEVATUS VACUUS

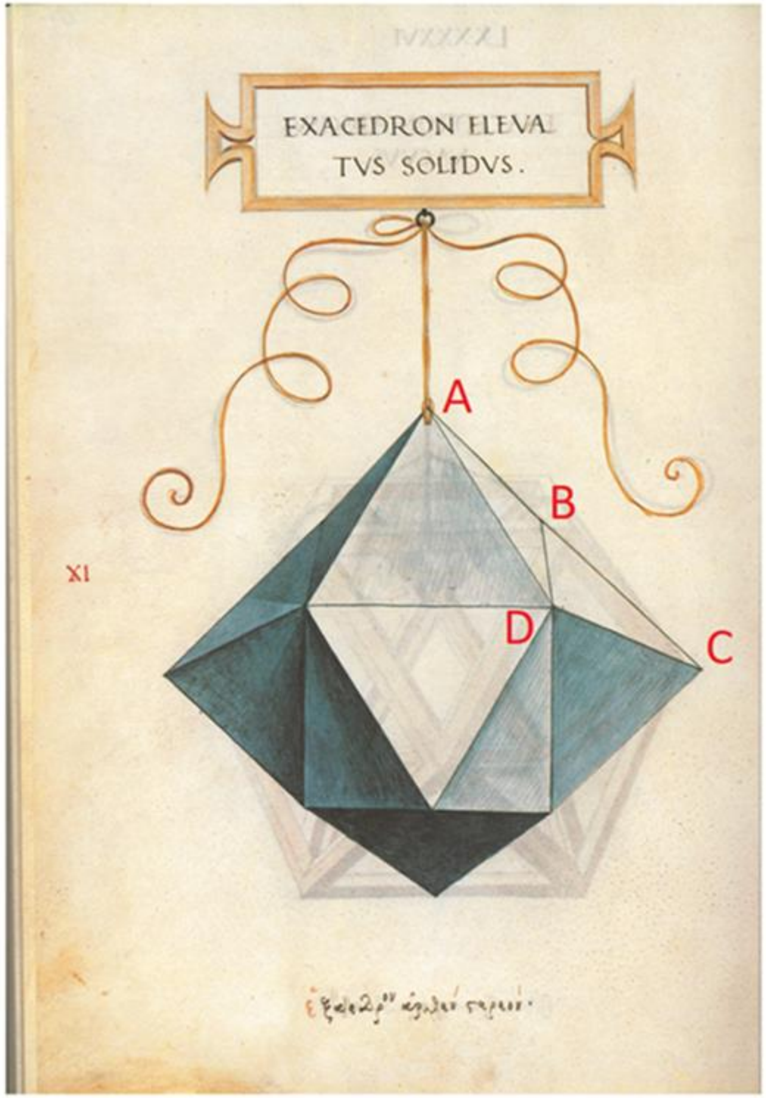
DOMANDE

- *Quali sono le proprietà geometriche del poliedro raffigurato?*
- *Come si ottiene il cubo elevato da un cubo?*

Nessuna difficoltà da parte degli studenti a capire come è ottenuto il cubo dal cubo elevato.

EXACEDRON ELEVATUS

Osservare – Congetturare - Dimostrare

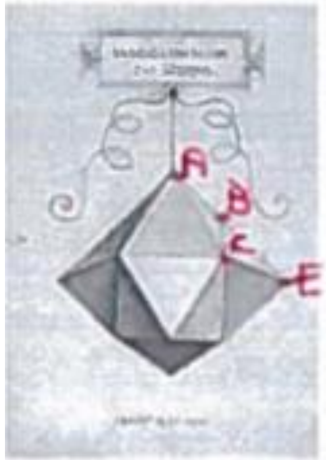


ALTRE DOMANDE

- *I punti A, B e C sono allineati?*
- *I punti A, B, C e D sono complanari?*

Tutti i gruppi di studenti (sia di prima che di terza) rispondono «NO» ad entrambe le domande ma nessuno riesce a dimostrare l'allineamento, per quanto riguarda la complanarità…

A.S 2018-19
Esempi di risposte degli studenti classi terze



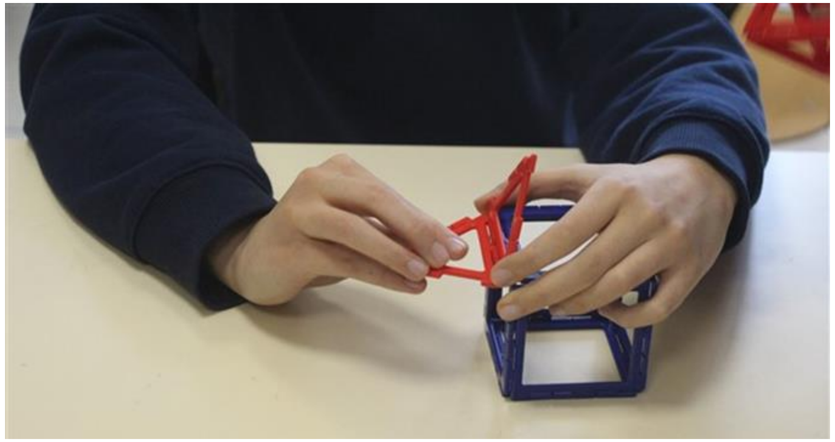
I punti A, B e C sono allineati?

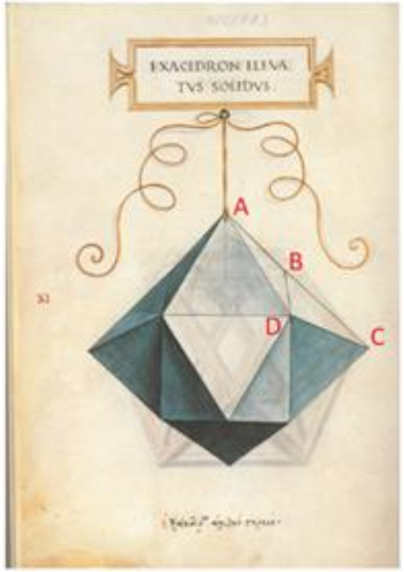
I tre punti non sono allineati ~~poiché l'angolo ABC non è di 180°, bensì di 150°, in quanto~~ poiché il punto B è un estremo della base in comune ai due triangoli e quindi non appartiene alla retta che unisce i punti A e E (vertici delle due piramidi)

NO INQUANTO FORMANDO UNA LINEA TRA DUE PUNTI DEI QUATTRO [illegible] NON PASSERÀ MAI PER GLI ALTRI DUE

EXACEDRON ELEVATUS

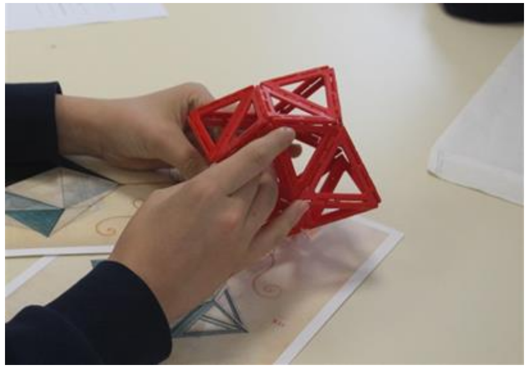
Osservare – Congetturare - Dimostrare



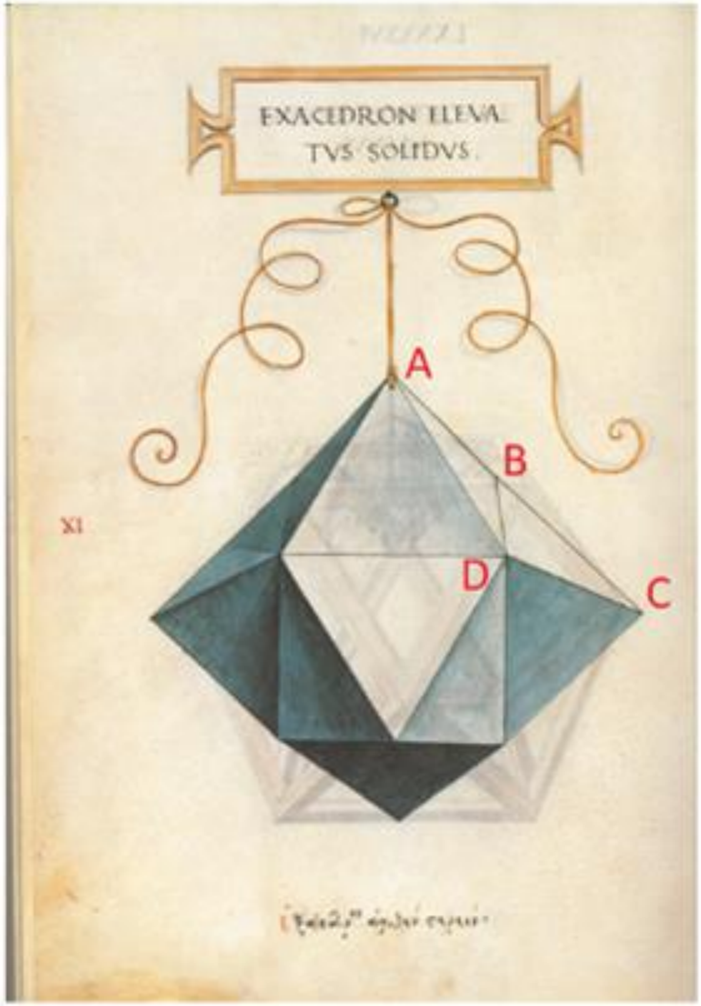


I PUNTI A, B E C SONO ALLINEATI?

I PUNTI A, B, C E D SONO COMPLANARI?



EXACEDRON ELEVATUS



DOMANDA

I punti A, B e C sono allineati?

RISPOSTA: ***No***.

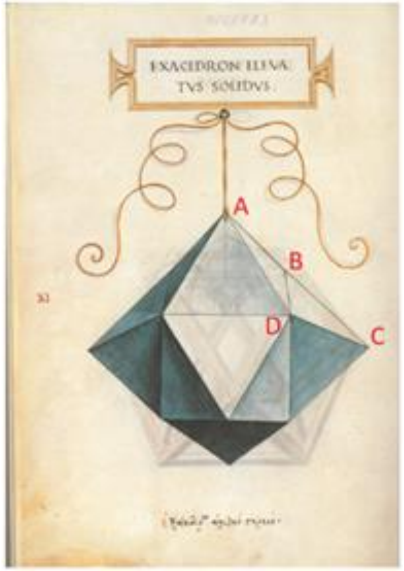
DIMOSTRAZIONE:

Se A, B e C fossero allineati, lo sarebbero anche , per ragioni di simmetria,
anche i punti A, D e C. sarebbero allineati.
Ma allora per A e C passerebbero due rette distinte.

Dimostrazione brevissima. Dubitiamo però che possano idearla gli studenti.
Dovremmo portarceli piano piano dando loro suggerimenti.

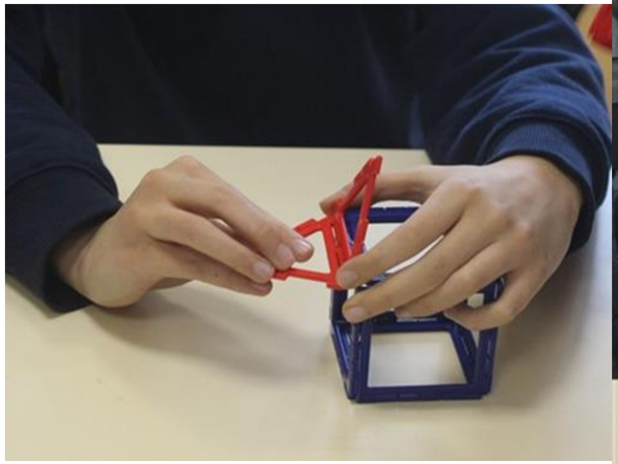
EXACEDRON ELEVATUS

Osservare – Congetturare - Dimostrare



I PUNTI A, B, C E D SONO COMPLANARI?

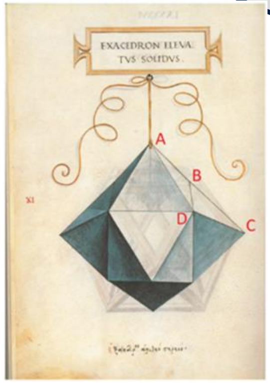
a.s.2017-18 classe 1D
Osserviamo le due studentesse.
Silvia, la studentessa in piedi osserva il cubo elevato: «I punti non appaiono complanari. Ma sarà vero? Come dimostrarlo?»
Chiara, la studentessa seduta (la quale ha dimostrato in varie occasioni la sua bravura) è già molto oltre.
Mentre cercava la risposta ci diceva che stava cercando l'inclinazione delle facce triangolari della piramide (prima foto).
Poi ha l'ottima idea di vedere cosa succede se le due facce sono complanari (seconda foto).
Non ha saputo dare una dimostrazione.

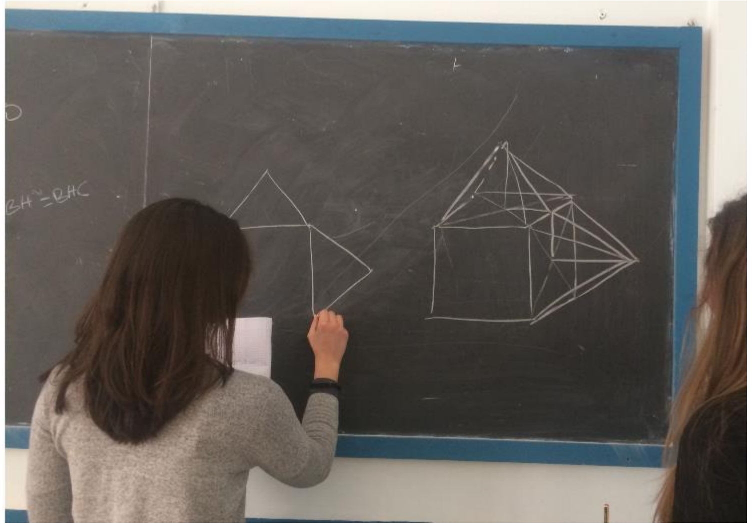


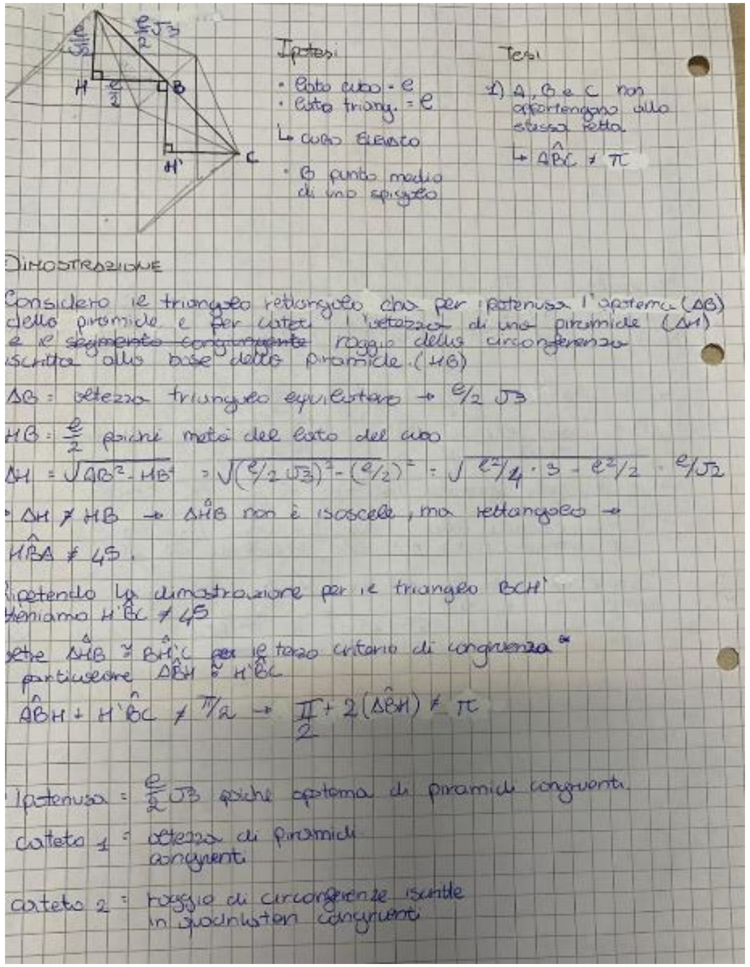
Questo succedeva lo scorso anno….ma quest'anno…

Di fronte alla frase: «Non hanno saputo dare una dimostrazione..»

«eravamo piccoli….possiamo provarci adesso?







Ipotesi

- lato cubo = ℓ
- lato triang. = ℓ

↳ cubo elevato

- B punto medio di uno spigolo

Tesi

1) A, B e C non appartengono alla stessa retta

↳ $A\hat{B}C \neq \pi$

DIMOSTRAZIONE

Considero il triangolo rettangolo che per ipotenusa l'apotema (AB) della piramide e per cateti l'altezza di una piramide (AH) e il ~~segmento congruente~~ raggio della circonferenza iscritta alla base della piramide (HB)

AB = altezza triangolo equilatero → $\ell/2\sqrt{3}$

HB = $\frac{\ell}{2}$ poiché metà del lato del cubo

$AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{(\ell/2\sqrt{3})^2 - (\ell/2)^2} = \sqrt{\ell^2/4 \cdot 3 - \ell^2/2}$ $\ell/\sqrt{2}$

AH ≠ HB → $A\hat{H}B$ non è isoscele, ma rettangolo →

$H\hat{B}A \neq 45$.

Ripetendo la dimostrazione per il triangolo BCH' otteniamo $H'\hat{B}C \neq 45$

Poiché $A\hat{H}B \cong B\hat{H'}C$ per il terzo criterio di congruenza *

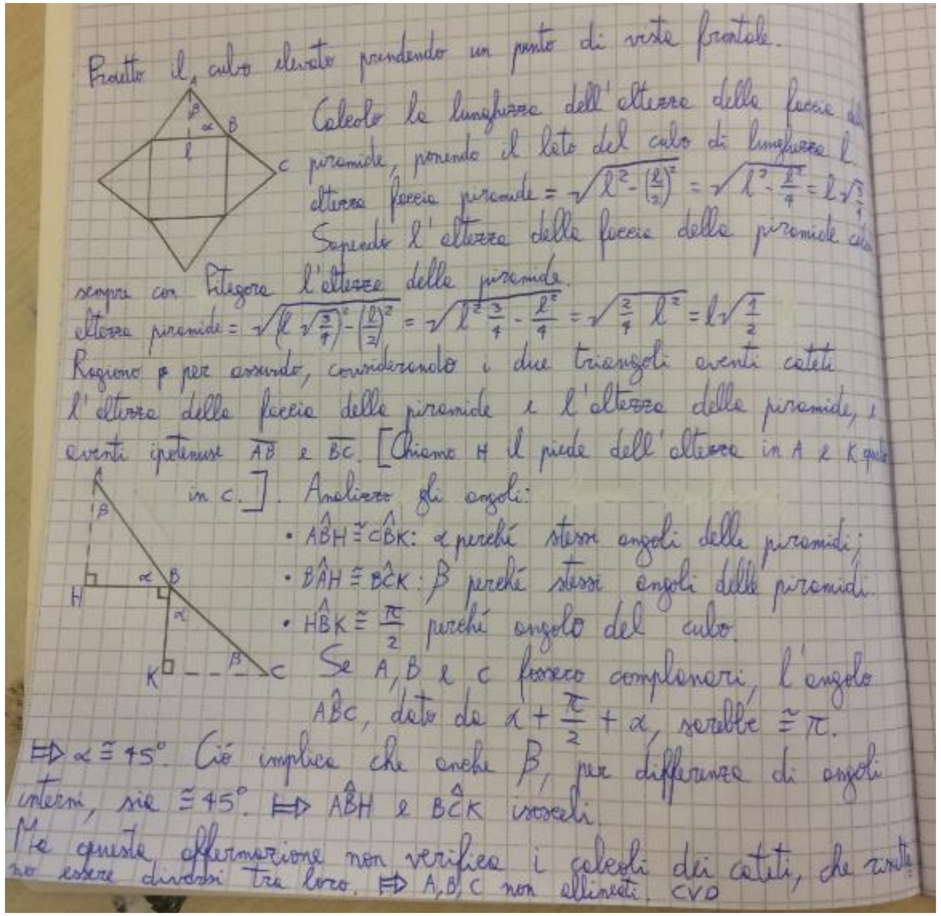
particolare $A\hat{B}H \cong H'\hat{B}C$

$A\hat{B}H + H'\hat{B}C \neq \pi/2$ → $\frac{\pi}{2} + 2(A\hat{B}H) \neq \pi$

* Ipotenusa = $\frac{\ell}{2}\sqrt{3}$ poiché apotema di piramidi congruenti

cateto 1 = altezza di piramidi congruenti

cateto 2 = raggio di circonferenze iscritte in quadrilateri congruenti



Proietto il cubo elevato prendendo un punto di vista frontale.

Calcolo la lunghezza dell'altezza della faccia della piramide, ponendo il lato del cubo di lunghezza l.

altezza faccia piramide $= \sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2 - \frac{l^2}{4}} = l\sqrt{\frac{3}{4}}$

Sapendo l'altezza della faccia della piramide calcolo sempre con Pitagora l'altezza della piramide.

altezza piramide $= \sqrt{\left(l\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} = \sqrt{l^2\frac{3}{4} - \frac{l^2}{4}} = \sqrt{\frac{2}{4}l^2} = l\sqrt{\frac{1}{2}}$

Ragiono per assurdo, considerando i due triangoli aventi cateti l'altezza della faccia della piramide e l'altezza della piramide, e aventi ipotenuse $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$. [Chiamo H il piede dell'altezza in A e K quello in C.]. Analizzo gli angoli:

- $A\hat{B}H \cong C\hat{B}K$: α perché stessi angoli della piramide;
- $B\hat{A}H \cong B\hat{C}K$: β perché stessi angoli della piramide.
- $H\hat{B}K \cong \frac{\pi}{2}$ perché angolo del cubo.

Se A, B e C fossero complanari, l'angolo $A\hat{B}C$, dato da $\alpha + \frac{\pi}{2} + \alpha$, sarebbe $\cong \pi$.

$\Rightarrow \alpha \cong 45°$. Ciò implica che anche β, per differenza di angoli interni, sia $\cong 45°$. $\Rightarrow A\hat{B}H$ e $B\hat{C}K$ isosceli.

Ma questa affermazione non verifica i calcoli dei cateti, che risultano essere diversi tra loro. $\Rightarrow$ A, B, C non allineati. CVD