

Dalle immagini ai modelli...

... Un viaggio di andata e ritorno con Luca Pacioli, Leonardo da Vinci ed Euclide nel mondo dei poliedri alla ricerca di proprietà, teoremi, dimostrazioni ed errori.



Patrizia Berneschi - Elena Possamai
Fisciano – 19 settembre 2019



DALLE IMMAGINI AI MODELLI IL PERCORSO

Percorso da svolgersi dalla prima alla quinta in tutte le classi del Liceo Matematico del Nomentano.

- In prima e in seconda, tre incontri di 2 ore in orario curricolare.
- In terza, quarta e quinta, tre incontri di 3 ore in orario extracurricolare, nell'ambito del PCTO.

Classe	incontri per ore	Totale annuo
Prima	3 per 2 ore	6 ore
Seconda	3 per 2 ore	6 ore
Terza	3 per 3 ore	9 ore
Quarta	3 per 3 ore	9 ore
Quinta	3 per 3 ore	9 ore
Ore totali del percorso		39 ore

Attività fino ad ora svolta:

a.s. 2017-18

4 prime e 2 seconde

a.s. 2018-19

2 terze

PERCHÉ UN LABORATORIO «DALLE IMMAGINI AI MODELLI»

Ogni anno incontriamo studenti che evidenziano difficoltà nell'affrontare problemi di geometria, in particolare di geometria dello spazio.

La frase che più spesso ci sentiamo dire dai nostri studenti, in questo contesto è:

*...non riesco a vedere la figura e tanto meno
le sue proprietà!...*

Ci siamo quindi chiesti:

con l'uso di *belle figure*, di *modelli reali*, di *modelli virtuali*, è possibile *educare lo sguardo* degli studenti introducendoli gradualmente a problemi non banali di *geometria dello spazio* fin dal primo biennio di liceo?

DALLE IMMAGINI AI MODELLI STRUMENTI

IMMAGINI



Tavole di Leonardo da Vinci per
il *De Divina Proportione* di Luca Pacioli

SCHEDE

Liceo Matematico - Liceo Nomentano
G. Accascina, P. Berneschi, E. Possamai

Dalle immagini ai modelli

Scheda 1
Tetraedro

Data: _____ Classe: _____ Gruppo: _____
Studenti: _____ 2) _____
3) _____ 4) _____ 5) _____



Osservando le tavole che vi abbiamo dato, di cui avete qui sopra una riproduzione ridotta, rispondete alle seguenti domande.

Le due tavole rappresentano lo stesso poliedro? Giustificate la vostra risposta.

a) Quante facce ha il poliedro?
b) Quanti vertici ha il poliedro?
c) Quanti spigoli ha il poliedro?

Descrivete in dettaglio come avete fatto a contare il numero di facce, vertici e spigoli.

Dopo che avete risposto alle domande, portate la scheda al vostro docente, il quale vi darà le tessere necessarie per costruire il modello.

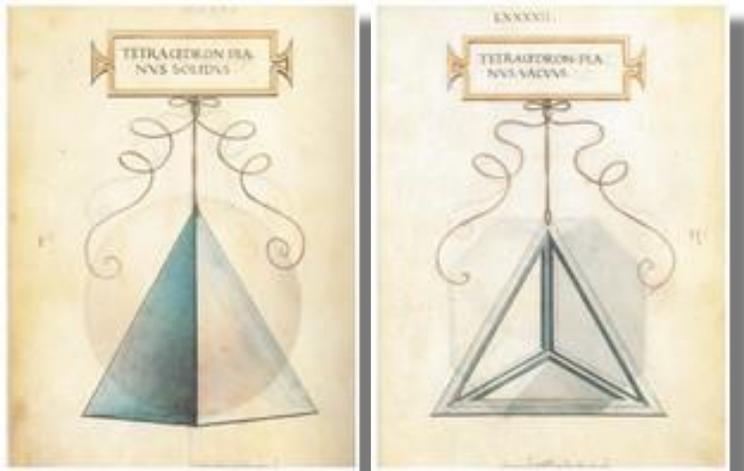
MODELLI



Modelli costruiti con tessere a
forma di poligoni regolari di
Polydron

DALLE IMMAGINI AI MODELLI UTILIZZO DEGLI STRUMENTI

IMMAGINI



MODELLI

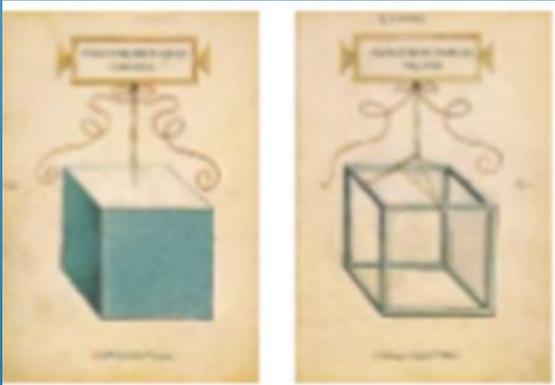


Descrivere il poliedro e
sue proprietà
geometriche
(confronto)

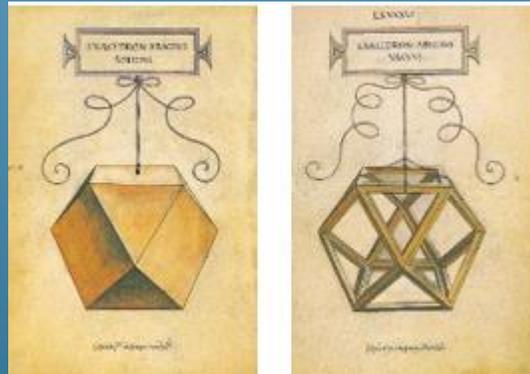
DALLE IMMAGINI AI MODELLI E RITORNO IL PERCORSO DEL LABORATORIO

In particolare prenderemo in esame i seguenti poliedri:

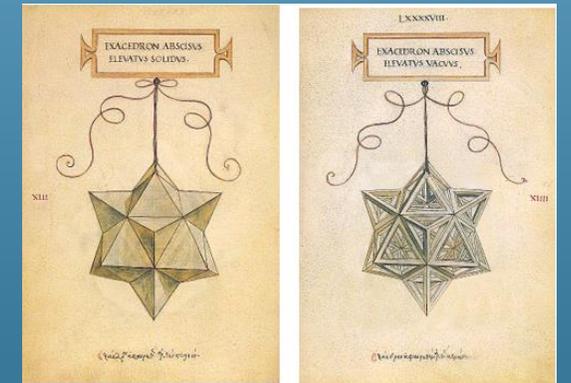
Parte I **CUBO**



Parte II **CUBO TRONCO**



Parte III **CUBO TRONCO elevato**



Dividetevi in coppie e
iniziamo a lavorare...

PARTE I CUBO (SCHEDA 2 PER GLI STUDENTI)

Simo Matematico - Linea Nomentana
G. Accascia, P. Berreschi, E. Pozzani Date immagini ai modelli

Scheda 2
Cubo

Data: _____ Classe: _____ Gruppo: _____
Studenti:
1) _____ 2) _____
3) _____ 4) _____ 5) _____



Observando le tavole che vi abbiamo dato, di cui avete già visto una riproduzione ridotta, rispondete alle seguenti domande.

a) Quante facce ha il poliedro?

b) Quanti vertici ha il poliedro?

c) Quanti spigoli ha il poliedro?

Descrivete in dettaglio come avete fatto a contare il numero di facce, vertici e spigoli.

Dopo che avete risposto alle domande, portate la scheda al vostro docente, il quale vi darà le briciole necessarie per costruire il modello.

Simo Matematico - Linea Nomentana
G. Accascia, P. Berreschi, E. Pozzani Date immagini ai modelli

Costruite con le briciole il modello del cubo.

Avete avuto difficoltà nel costruire il modello? Descrivete in dettaglio come avete fatto.

Fate un disegno e una foto del modello che avete costruito in modo tale da mettere in evidenza le proprietà geometriche. Inviate la foto al vostro docente mettendo come didascalia "Scheda 2- nome_dell_groupo". Scegliete la foto migliore, al massimo due.

Quali proprietà geometriche avete voluto mettere in evidenza?
Descrivete le eventuali difficoltà che avete avuto nel fare il disegno e nel fare la foto e come le avete superate.

Disegno	Foto

Proprietà geometriche:

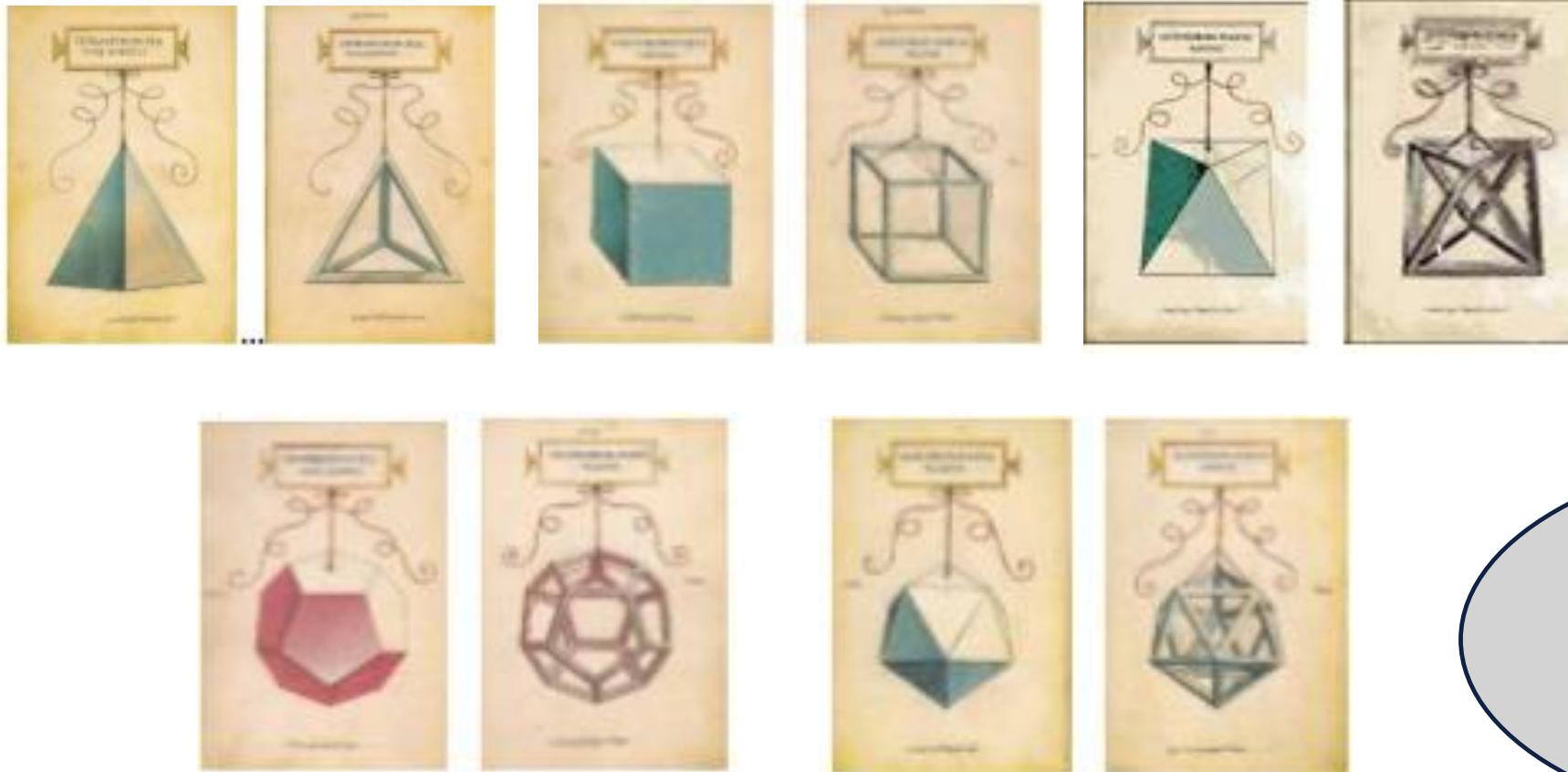
difficoltà:

- Rispondete alle domande.
- Costruite il poliedro.

N.B. Non è necessario consegnare la scheda

Tempo: 5 minuti

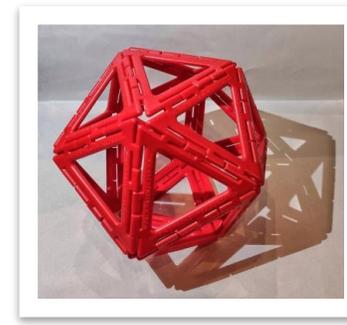
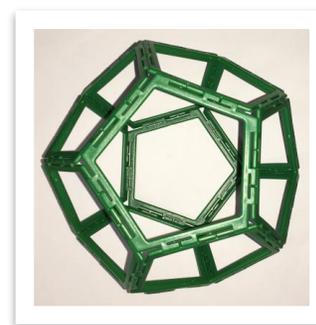
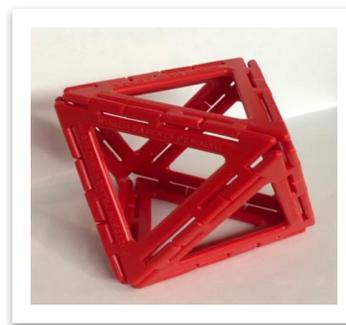
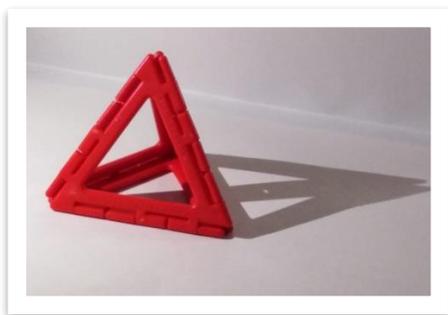
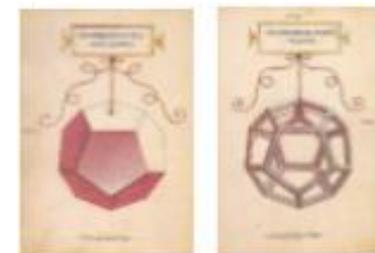
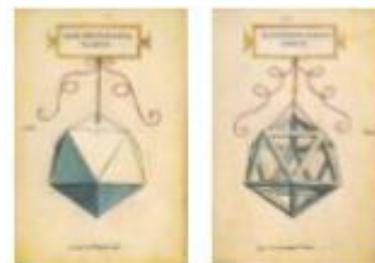
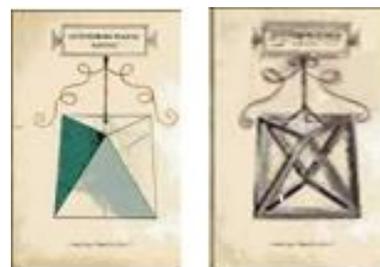
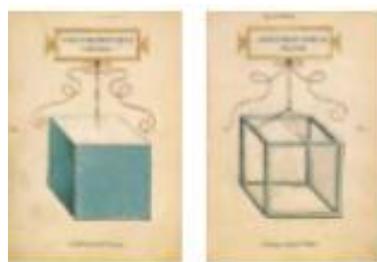
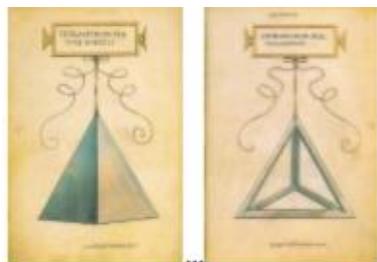
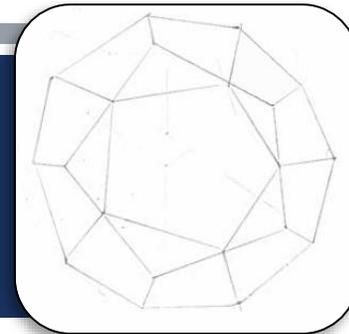
PARTE I I POLIEDRI PLATONICI



- Abbiamo chiesto di:*
- *contare vertici, spigoli, facce*
 - *costruire un modello*
 - *disegnare il modello*
 - *fotografare il modello*

Per *contare, costruire, disegnare, fotografare* è necessario capire la struttura geometrica del poliedro

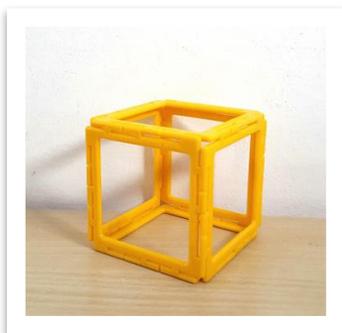
PARTE I I POLIEDRI PLATONICI: DISEGNI E FOTO FATTI DAGLI STUDENTI



PARTE I I POLIEDRI PLATONICI VISTI DAGLI STUDENTI



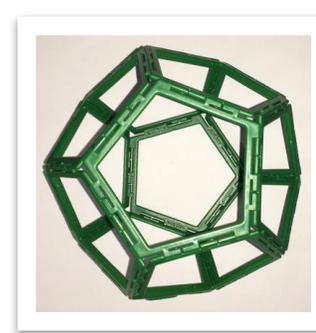
$(3, 3, 3)$



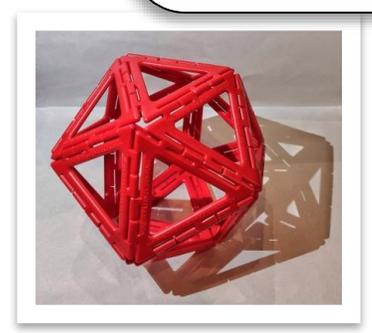
$(4, 4, 4)$



$(3, 3, 3, 3)$



$(5, 5, 5)$



$(3, 3, 3, 3, 3)$

Gli studenti hanno dimostrato l'ultimo teorema dell'ultimo libro degli elementi di Euclide:

NON esistono, oltre i cinque poliedri platonici, altri poliedri aventi le seguenti proprietà:

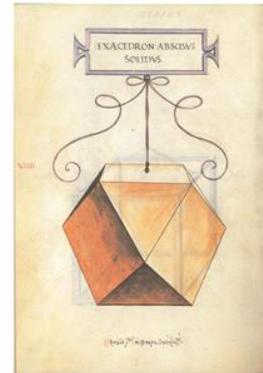
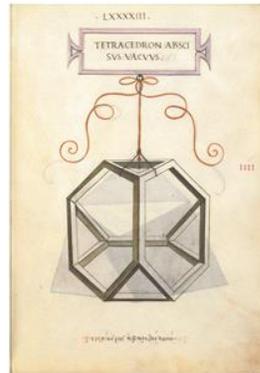
- come facce solo poligoni regolari e tutte congruenti
- In ogni vertice converge lo stesso numero di facce

Queste due ultime proprietà hanno permesso di associare ad ogni poliedro un simbolo. Per esempio il simbolo $(4,4,4)$ significa che in ogni vertice insistono 3 quadrati.

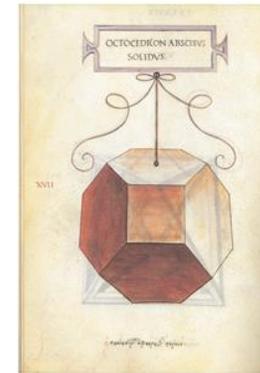
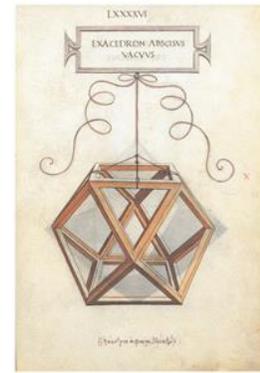
PARTE II I POLIEDRI TRONCATI



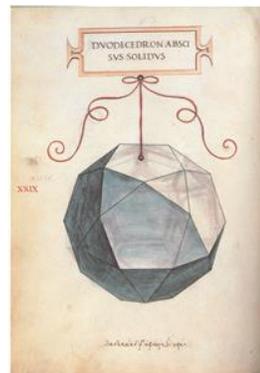
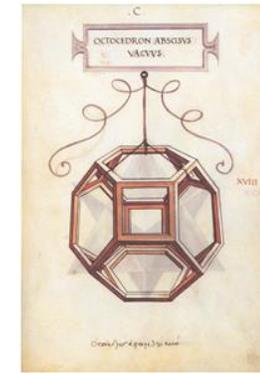
TETRACEDRON ABSGIS
SOLIDVS ET VACVVS



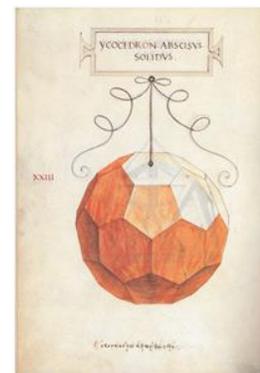
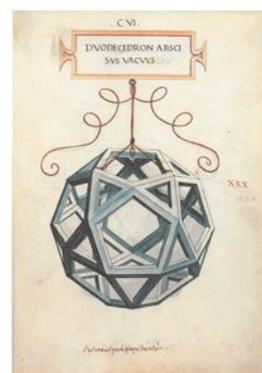
EXACEDRON ABSGIS
SOLIDVS ET VACVVS



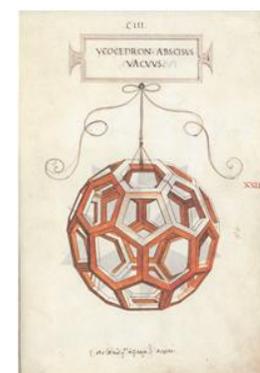
OCTOCEDRON ABSGIS
SOLIDVS ET VACVVS



DVODECEDRON ABSGIS
SOLIDVS ET VACVVS

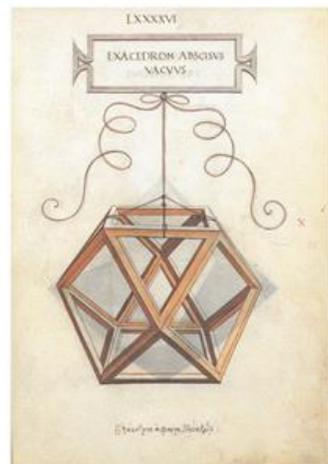
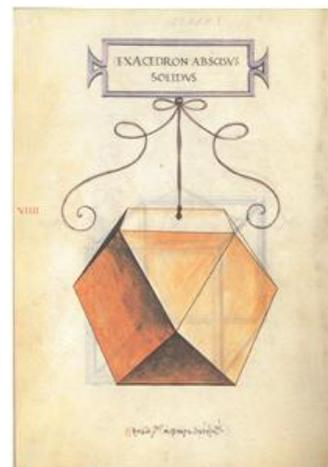
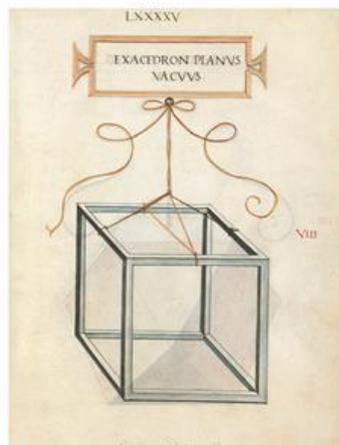


VCOCEDRON ABSGIS
SOLIDVS ET VACVVS



DAL CUBO AL CUBO TRONCO

OBIETTIVO: DEDURRE LE PROPRIETÀ DALLE IMMAGINI

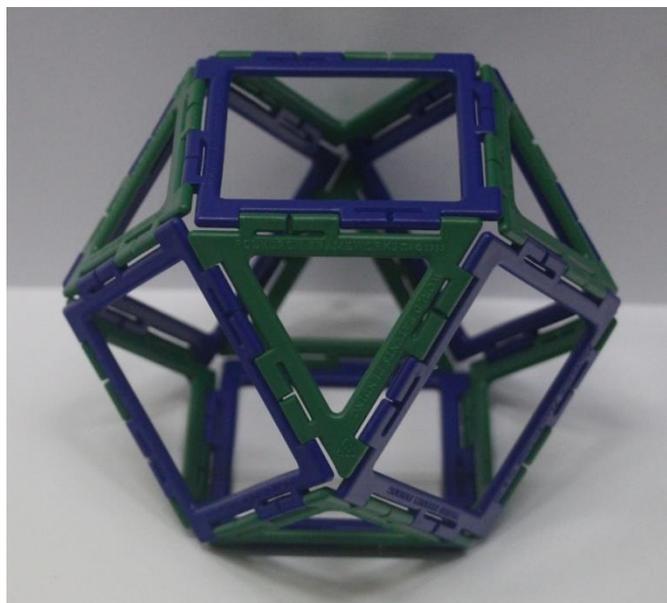
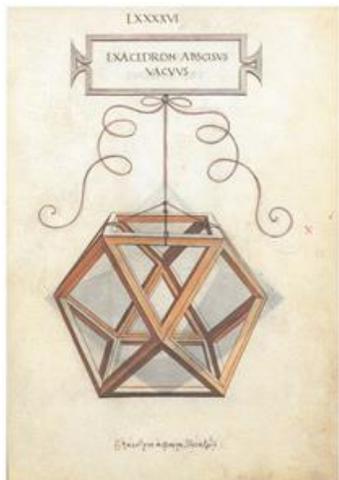


- *Come si ottiene il cubo tronco dal cubo?*
- *Calcolate il rapporto tra la lunghezza degli spigoli del cubo tronco e quella del cubo da cui esso è ottenuto.*

Per questo tipo di domande gli studenti hanno capito che si taglia a metà di ogni spigolo

CUBO TRONCO

OBIETTIVO: DALLE IMMAGINI AI MODELLI



- *Quali proprietà geometriche avete voluto mettere in evidenza con la foto?*
- *Descrivete le eventuali difficoltà che avete avuto nel fare il disegno e nel fare la foto e come le avete superate.*

Le facce sono tutti poligoni regolari ma non dello stesso tipo.

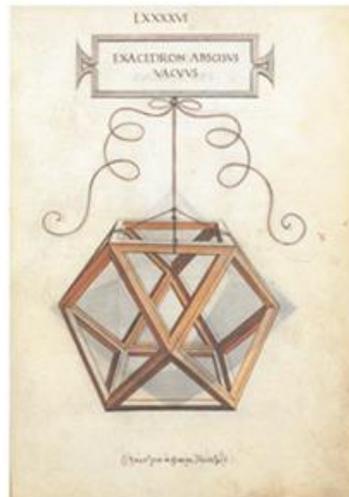
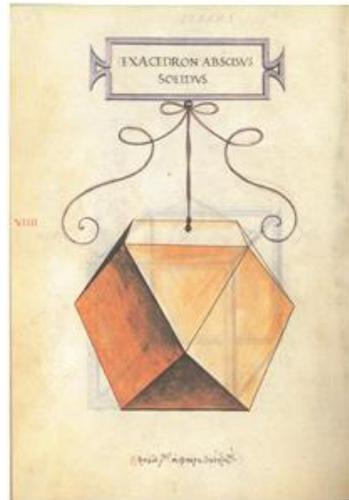
Il poliedro (4,4,4) è diventato un poliedro (3,4,3,4)

Come si può riottenere il cubo
dal cubo tronco?

Prima di vedere come hanno risposto gli studenti a queste
domande, vi illustriamo i punti salienti del percorso fatto con gli
studenti
cominciando dal tetraedro tronco.

DAL TETRAEDRO AL TETRAEDRO TRONCO

OBIETTIVO: DEDURRE LE PROPRIETÀ DALLE IMMAGINI

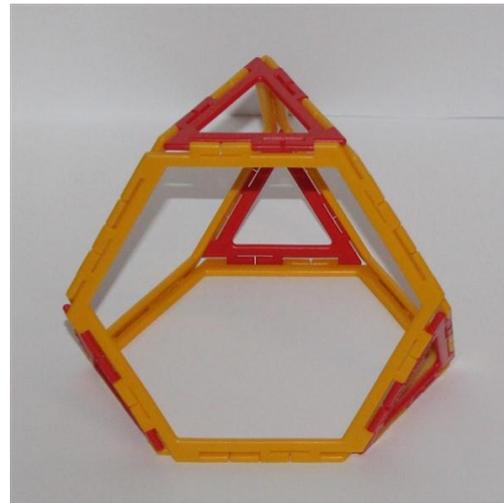
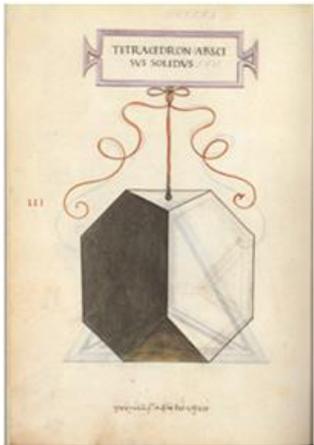


- *Come si ottiene il tetraedro tronco da un tetraedro?*
- *Calcolate il rapporto tra la lunghezza degli spigoli del tetraedro tronco e quella del tetraedro da cui esso è ottenuto.*

Per questo tipo di domande gli studenti non hanno avuto difficoltà a capire che si taglia ad un terzo di ogni spigolo

TETREDRO TRONCO

OBIETTIVO: DALLE IMMAGINI AI MODELLI

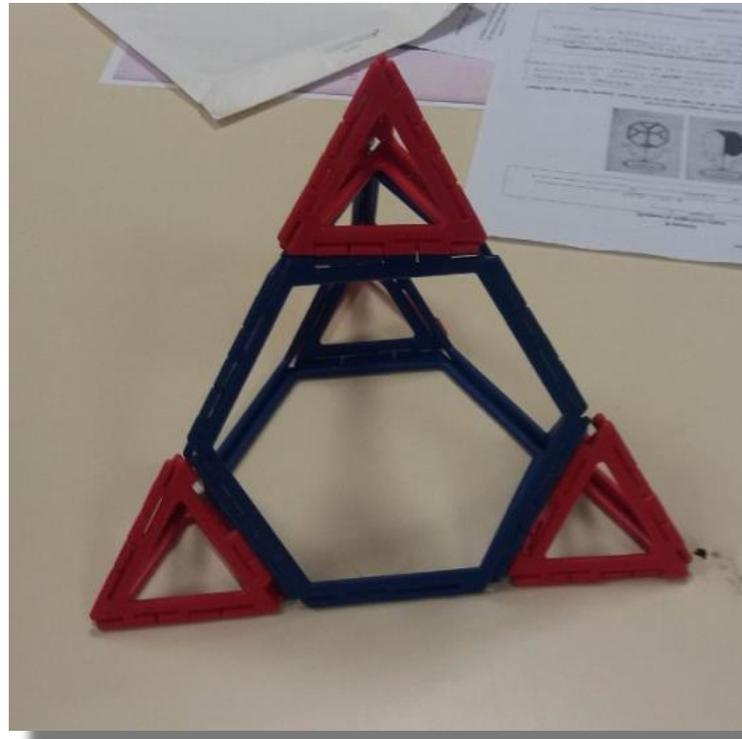
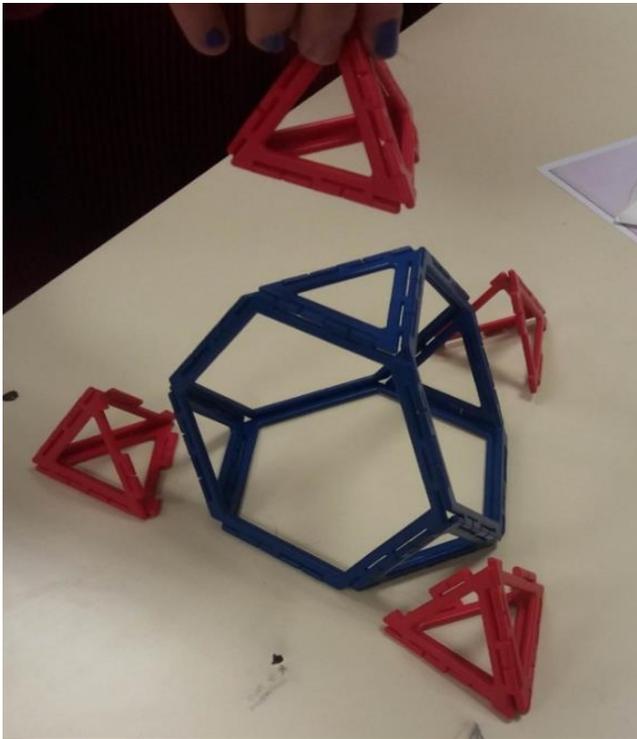


- *Quali proprietà geometriche avete voluto mettere in evidenza con la foto?*
- *Descrivete le eventuali difficoltà che avete avuto nel fare il disegno e nel fare la foto e come le avete superate.*

Le facce sono tutti poligoni regolari ma non dello stesso tipo.

Il poliedro (3,3,3) è diventato un poliedro (3,6,6).

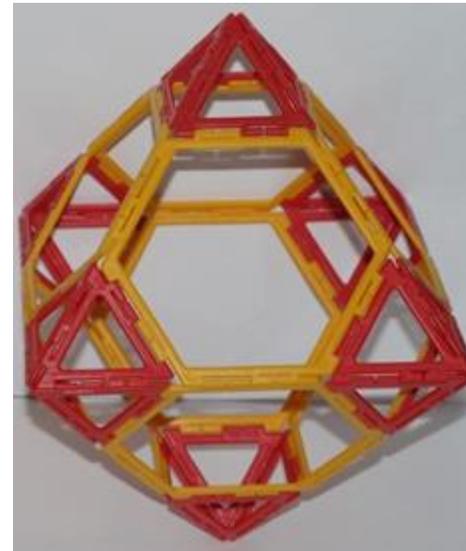
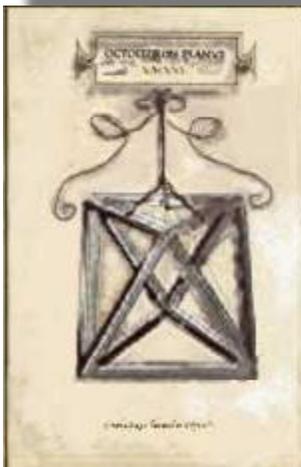
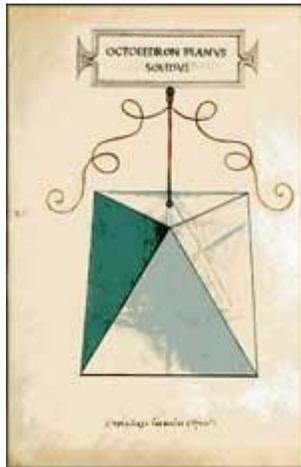
RITORNO DAL TETRAEDRO TRONCO AL TETRAEDRO



- *Come si riottiene il tetraedro dal tetraedro tronco?*

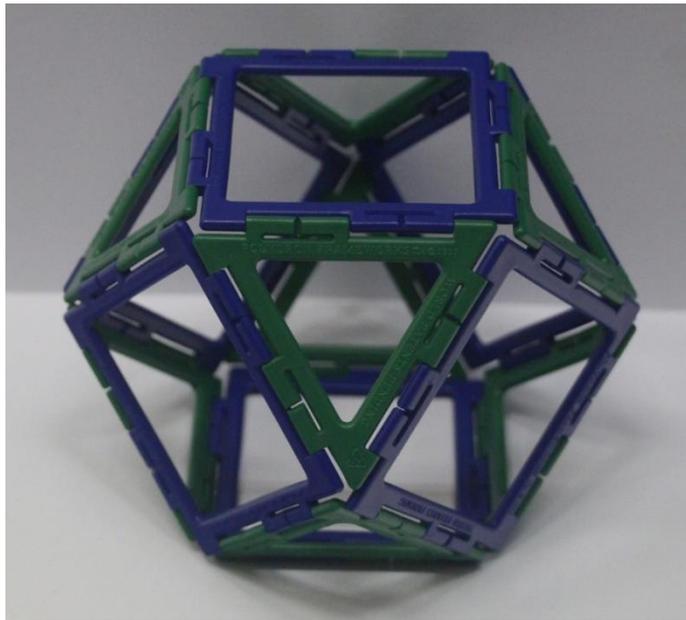
Gli studenti non hanno avuto alcuna difficoltà

DALL'OTTAEDRO ALL'OTTAEDRO TRONCO E RITORNO



Situazione analoga per l'icosaedro tronco

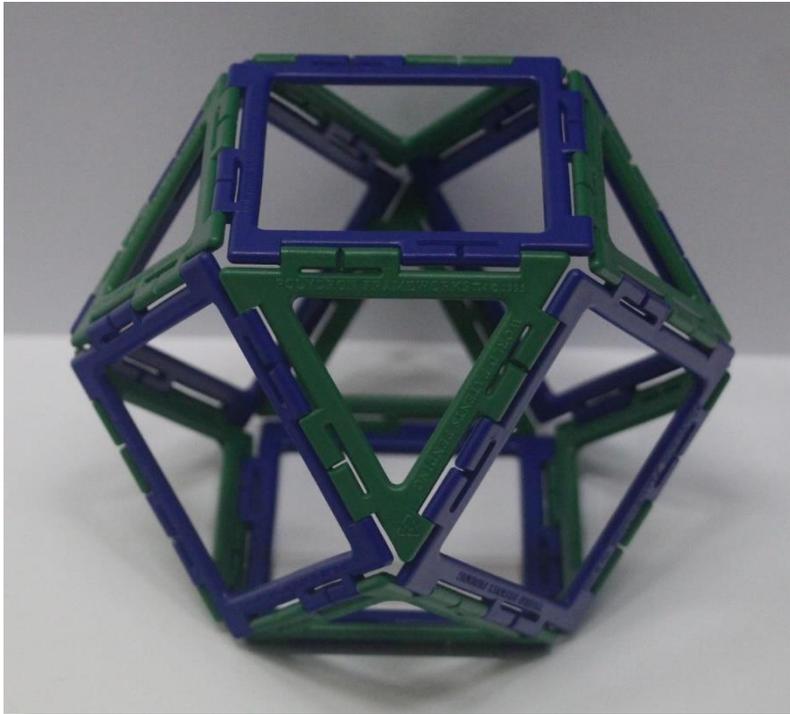
RITORNO DAL CUBO TRONCO AL CUBO



- *Come si riottiene il cubo dal cubo tronco?*

Vediamo come hanno risposto gli studenti...

RITORNO DAL CUBO TRONCO AL CUBO ESEMPIO DI RISPOSTA DEGLI STUDENTI

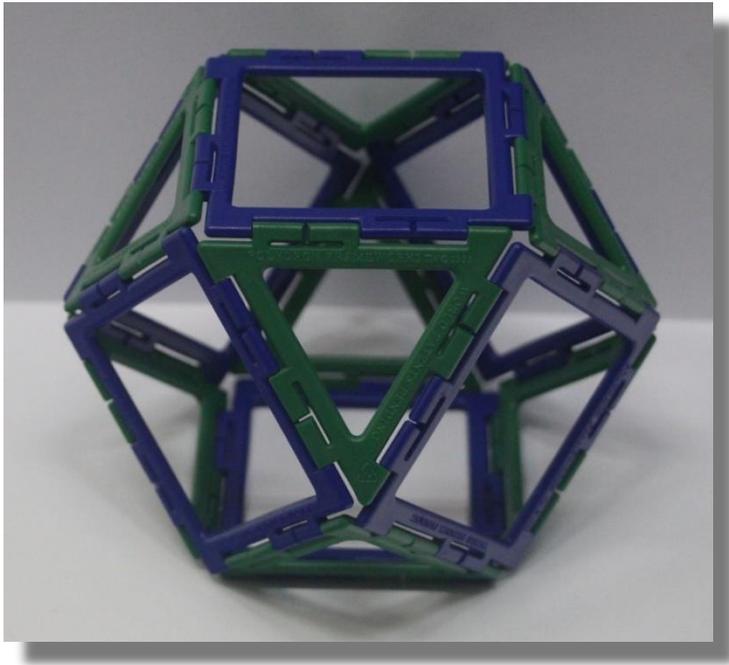


Aggiungiamo 8 tetraedri ~~regolari~~ con base
qui 8 triangoli
regolari
Abbiamo bisogno di 16 tessere di forma triangolo
equilatero.
Sbagliato! Ci siamo rese conto che i tetraedri non
devono essere regolari, perché ogni sua faccia,
tranne la base, deve essere un triangolo rettangolo
isoscele. Quindi abbiamo bisogno di 24 tessere di
forma ~~triangolo rettangolo isoscele~~ con ipotenusa
pari al lato del quadrato del cubo troncato ~~regolare~~
~~o anche quadrato~~.

Per riottenere il cubo servono
poligoni non tutti regolari.
Quindi non possiamo utilizzare
Polydron!

RITORNO DAL CUBO TRONCO AL CUBO

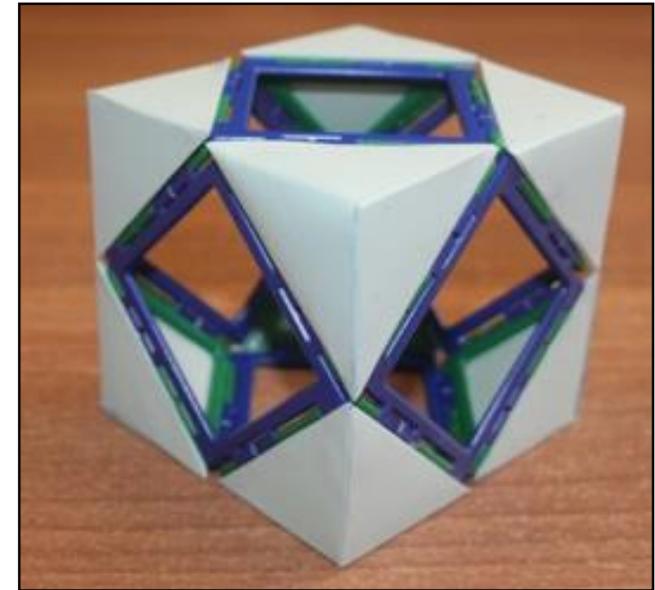
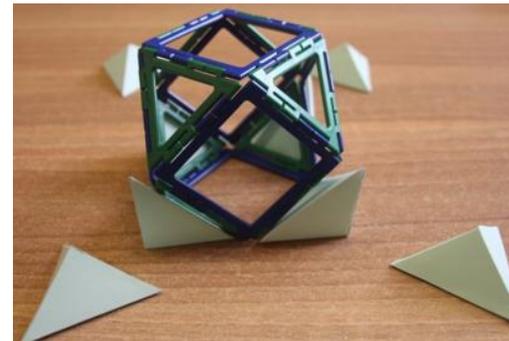
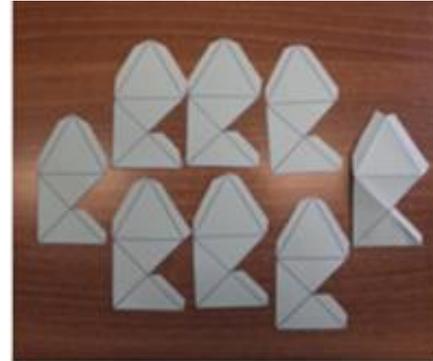
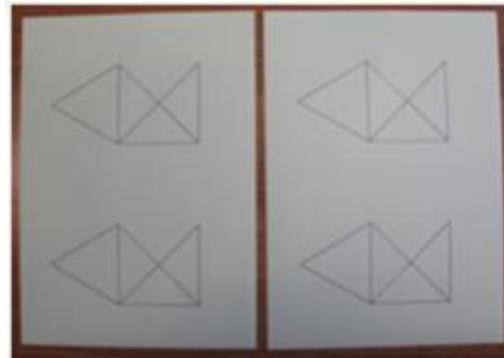
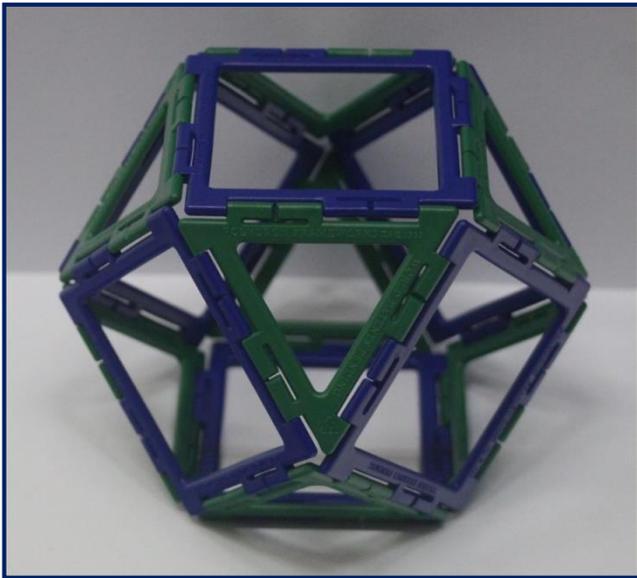
STRATEGIA UTILIZZATA DAGLI STUDENTI PER SUPERARE IL PROBLEMA



Non potendo usare
Polydron, possiamo
costruire lo sviluppo piano
del poliedri «mancanti» con
GeoGebra?
Ma come possiamo ottenere
questo sviluppo?

RICHIESTA:
*Creare con GeoGebra
lo sviluppo piano della
piramide da
aggiungere.
Fare una costruzione
con riga e compasso a
partire da un segmento
congruente ad uno
spigolo del cubo tronco*

RITORNO DAL CUBO TRONCO AL CUBO STRATEGIA UTILIZZATA DAGLI STUDENTI PER SUPERARE IL PROBLEMA



PARTE III

CUBO TRONCO ELEVATO

(SCHEDA 26 PER GLI STUDENTI)

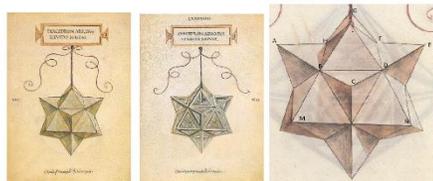
Liceo Matematico - Liceo Nomentano
G. Accascina, P. Berneschi, E. Possamai

Dalle immagini ai modelli

Scheda 26 a

Cubo tronco elevato - Prima parte

Data: _____ Classe: _____ Gruppo: _____
Studenti:
1) _____ 2) _____
3) _____ 4) _____ 5) _____



Osservate queste tre immagini. Esse rappresentano un *cubo tronco elevato*. Nella terza figura, che è un particolare della prima, abbiamo dato i nomi ad alcuni vertici.

Descrivete come si può ottenere il *cubo troncato elevato* dal *cubo tronco* in modo dettagliato e preciso affinché anche chi non ha a disposizione le immagini di cui sopra, ma ben sa come è fatto il *cubo tronco*, sia in grado di capire come è fatto il *cubo troncato elevato*.

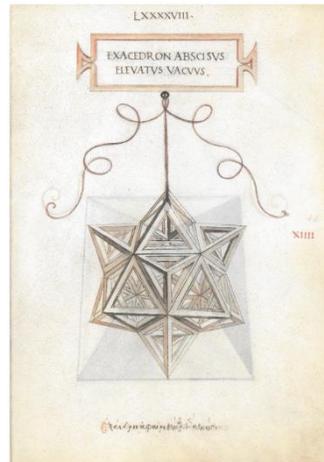
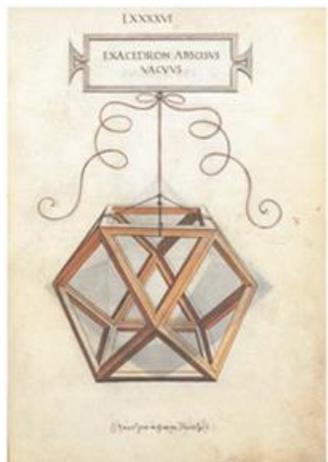
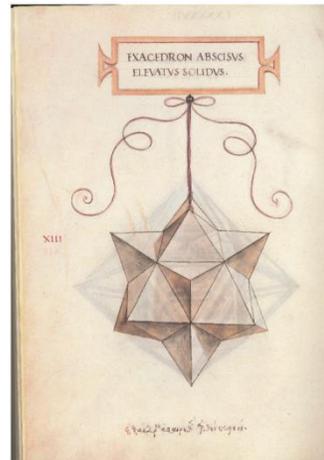
I vertici A, B, C, D, E, F, G, H sono complanari? I vertici L, B, M sono allineati? I vertici L, D, N sono allineati? Giustificate le risposte.

- Rispondete alle domande.

N.B. Non è necessario consegnare la scheda

Tempo: 15 minuti

DAL CUBO TRONCO AL CUBO TRONCO ELEVATO DEDURRE LE PROPRIETÀ DALLE IMMAGINI



Come si ottiene il cubo tronco elevato dal cubo tronco?

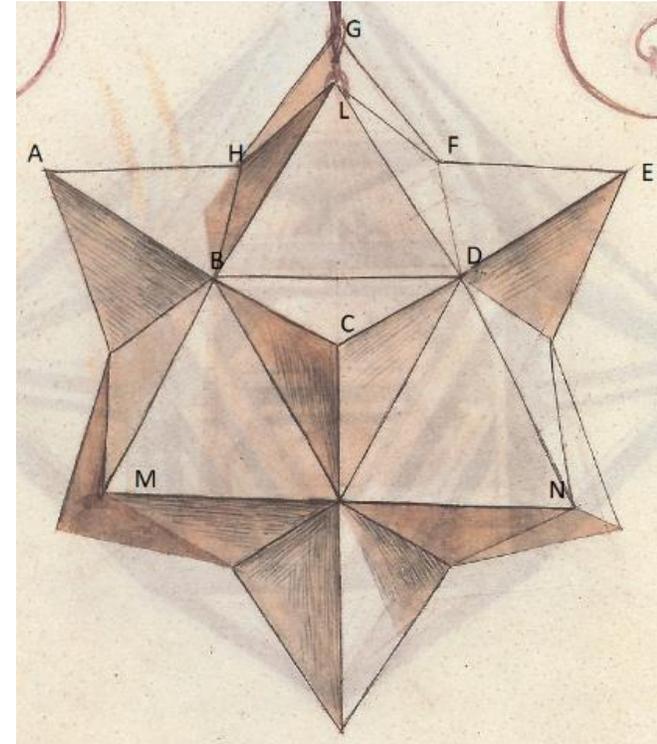
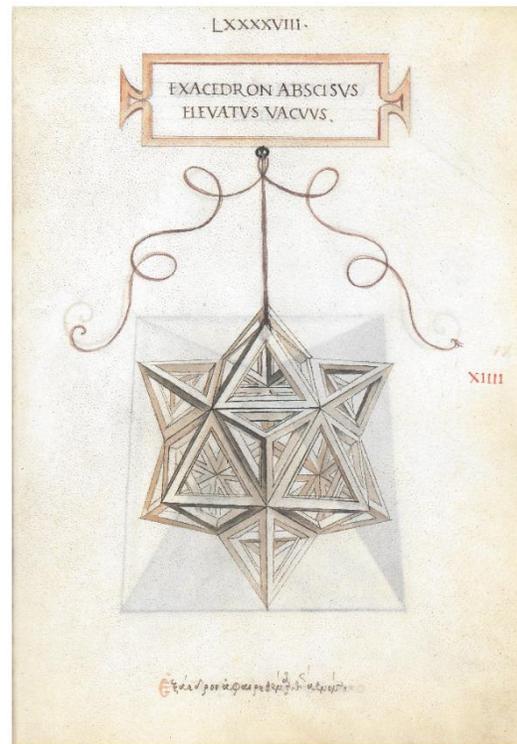
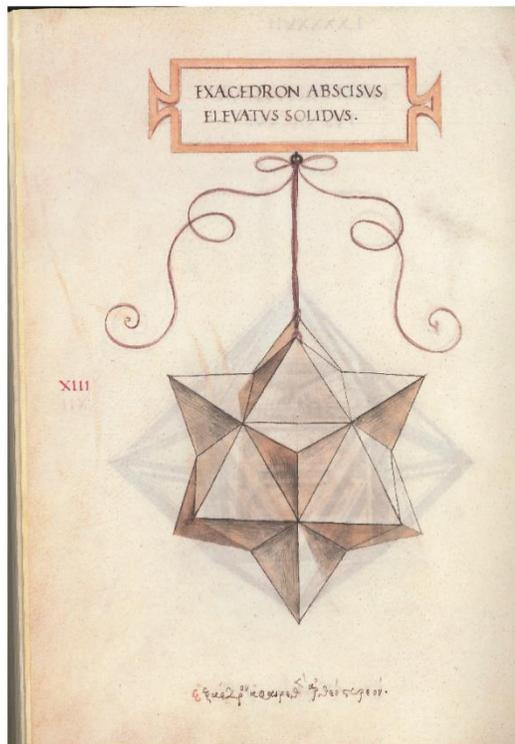
Risposta:

Su ogni faccia si pone una piramide avente come facce laterali triangoli equilateri.

Il cubo tronco ha come facce triangoli equilateri e quadrati:

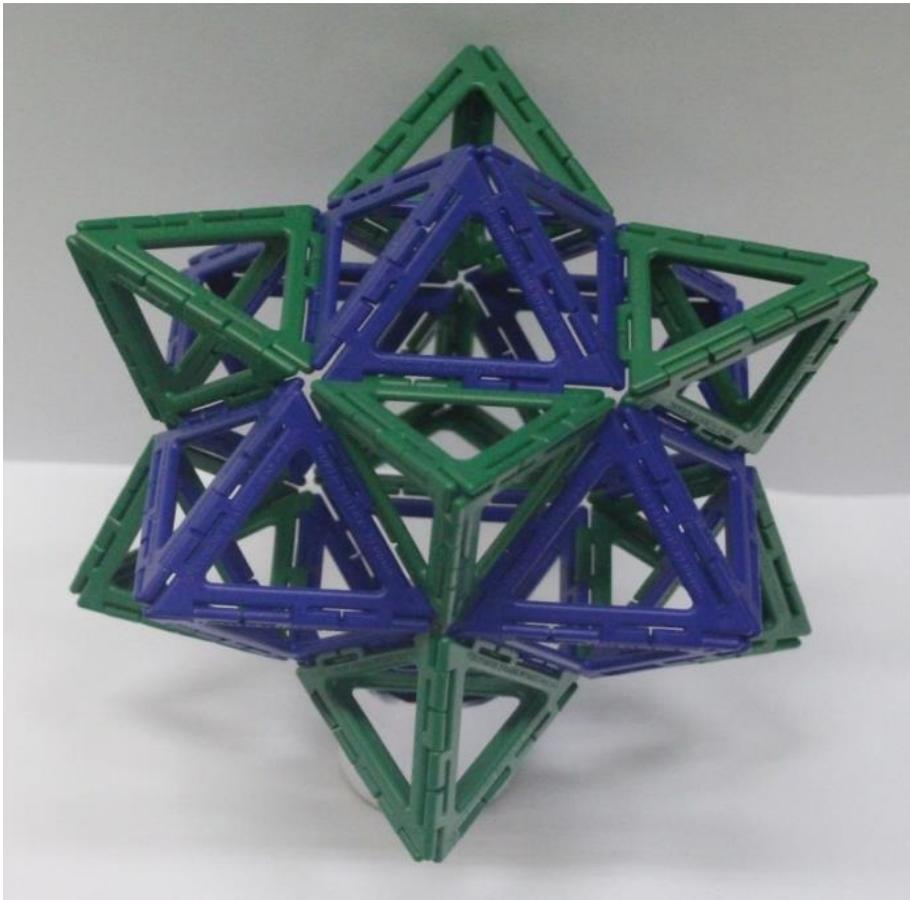
Quindi le piramidi che si aggiungono sono o tetraedri regolari o piramidi a base quadrata con facce laterali triangoli equilateri.

CUBO TRONCO ELEVATO DEDURRE LE PROPRIETÀ DALLE IMMAGINI



- I vertici L, B, M sono allineati?
- I vertici L, B, M, N, D sono complanari?

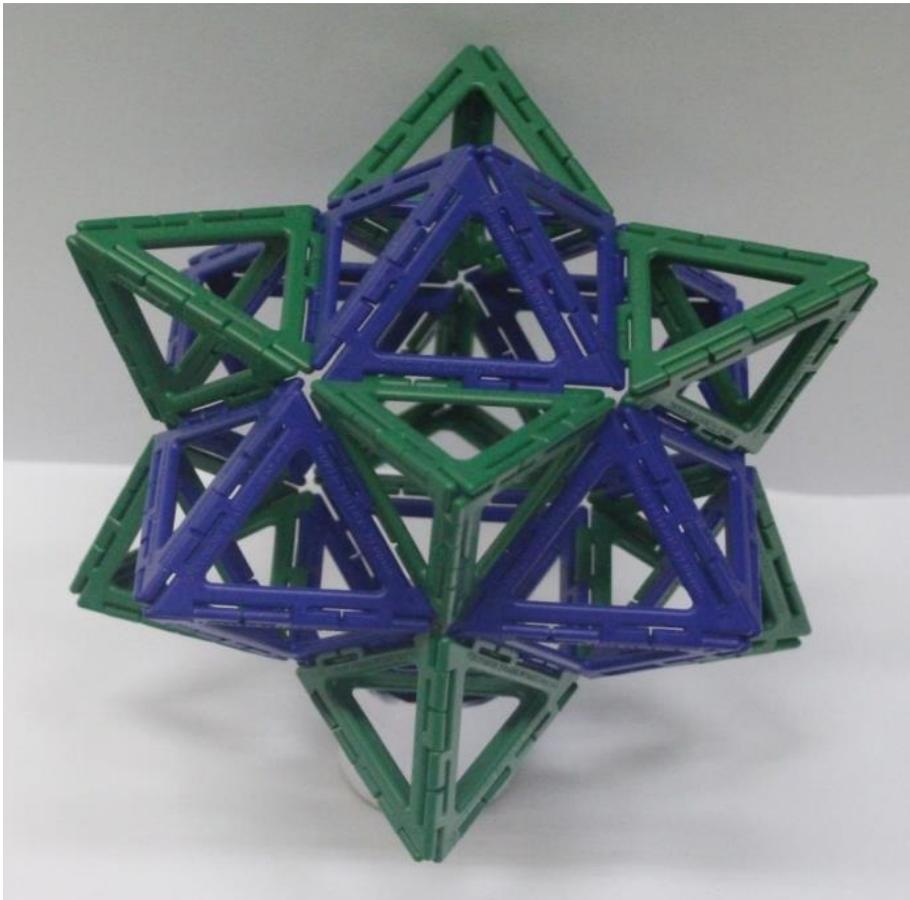
CUBO TRONCO ELEVATO DEDURRE LE PROPRIETÀ DAL MODELLO



- *Guardando attentamente il modello, quali poliedri platonici riconoscete?*

Ma c'è un
ottaedro!

CUBO TRONCO ELEVATO DEDURRE LE PROPRIETÀ DAL MODELLO



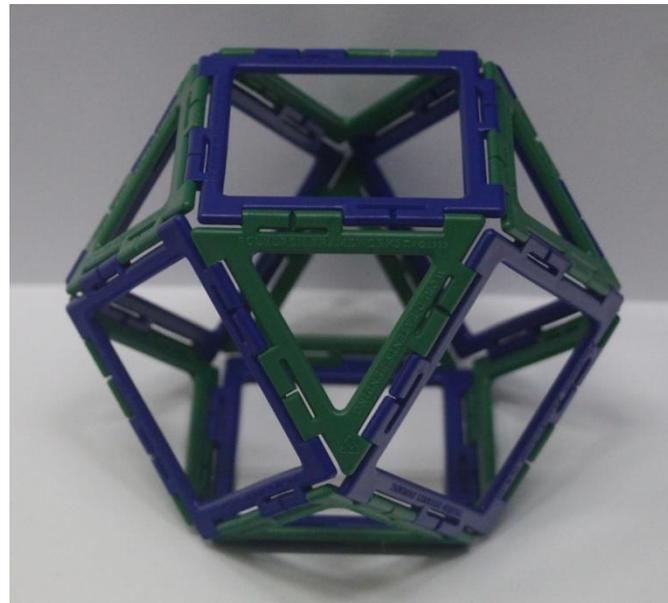
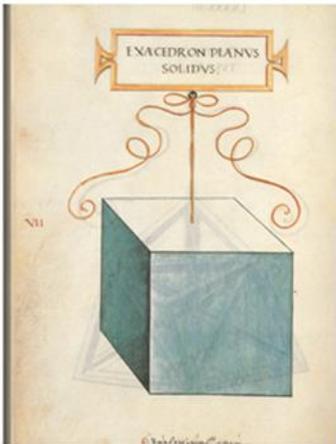
Ma c'è un
ottaedro!

Ne siamo
sicuri?

Dobbiamo
fare un passo
indietro.

CUBO TRONCO

OTTENUTO TRONCANDO I VERTICI DI UN CUBO.

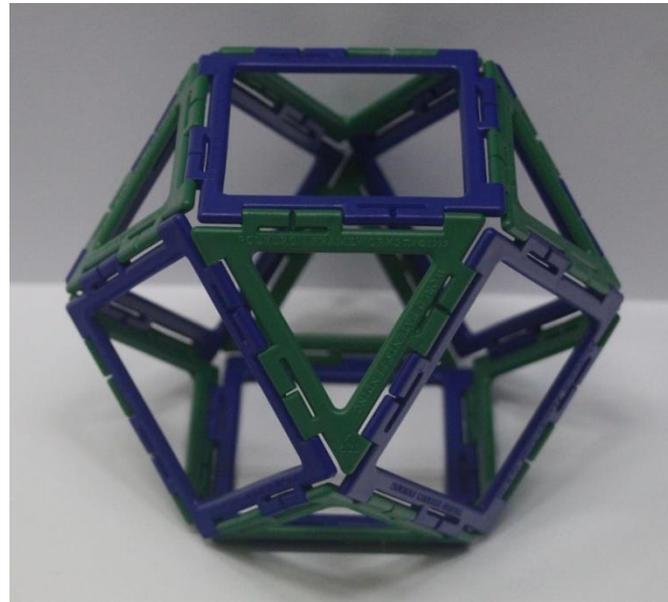
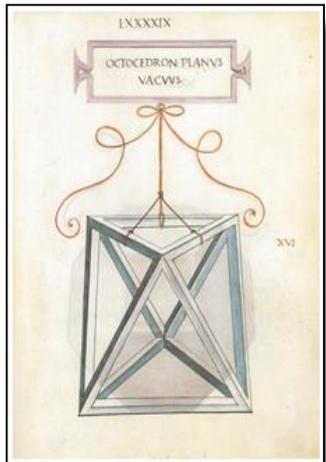
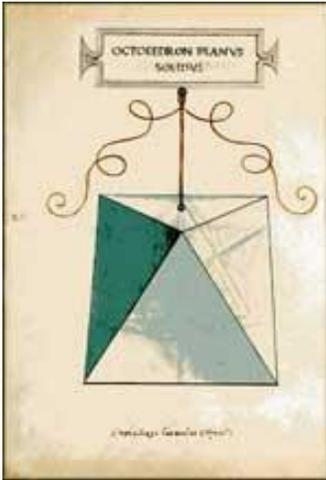


Abbiamo visto che il cubo tronco è ottenuto dal cubo, troncando i vertici con piani passanti per i punti medi degli spigoli.

Ma possiamo ottenere il cubo tronco anche in un altro modo

CUBO TRONCO

OTTENUTO TRONCANDO I VERTICI DI UN OTTAEDRO.

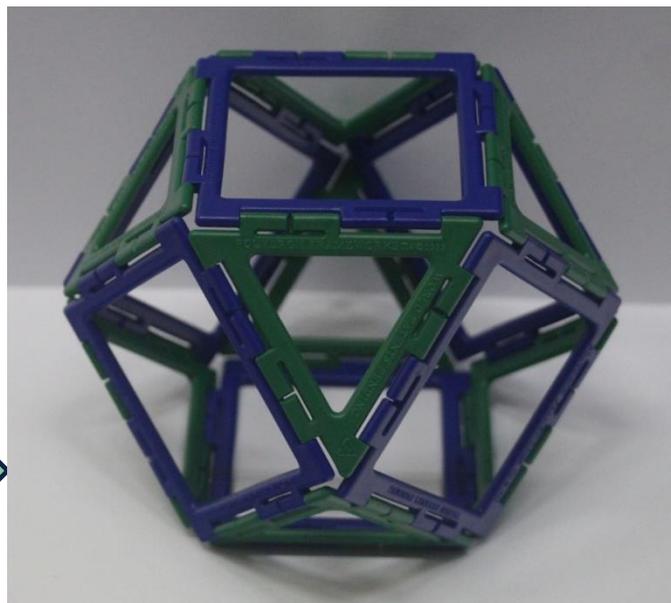
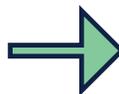
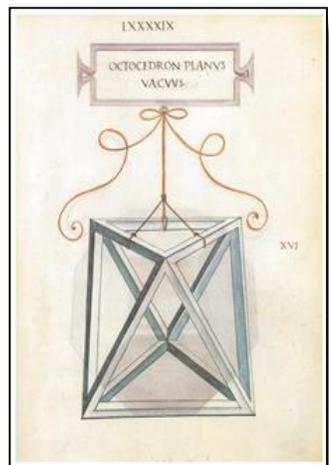
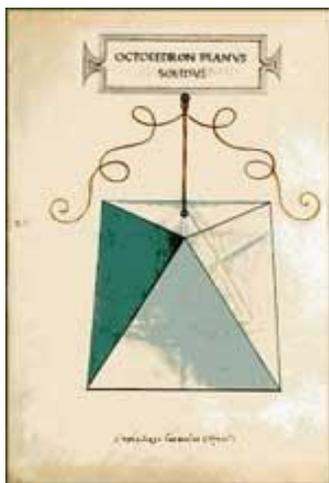


Il cubo tronco è ottenuto ANCHE dall'ottaedro troncando i vertici con piani passanti per i punti medi degli spigoli.

Ciò NON è stato notato da Leonardo e da Pacioli.

CUBO TRONCO

OTTENUTO TRONCANDO I VERTICI DI UN OTTAEDRO.



Il cubo tronco è ottenuto ANCHE dall'ottaedro troncando i vertici con piani passanti per i punti medi degli spigoli.

Abbiamo fatto capire ciò agli studenti per mezzo di una scheda che abbiamo dato loro quando abbiamo studiato i poliedri troncati:

Liceo Matematico - Liceo Nomentano

G. Accascina, P. Berneschi, E. Possamai

Dalle immagini ai modelli

Scheda 18.

Un altro troncamento dell'ottaedro

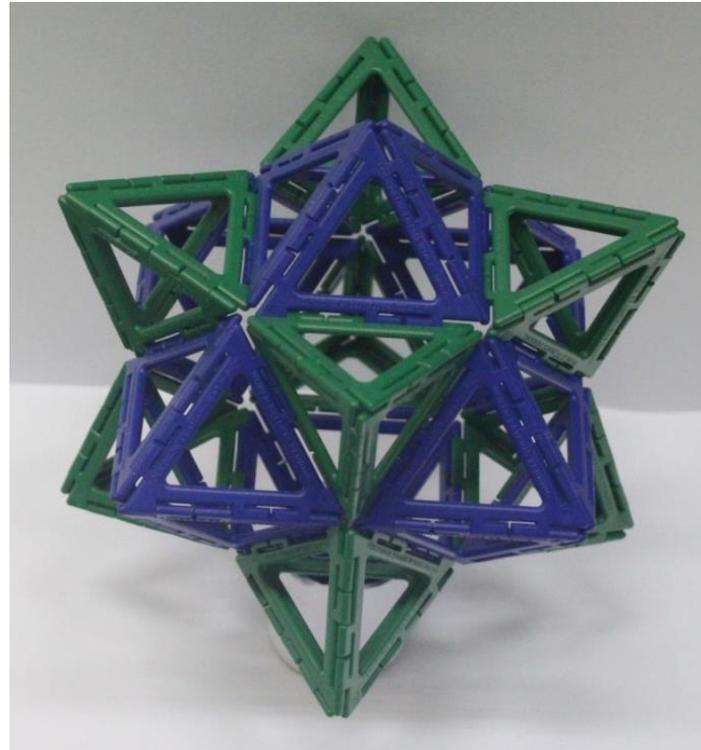
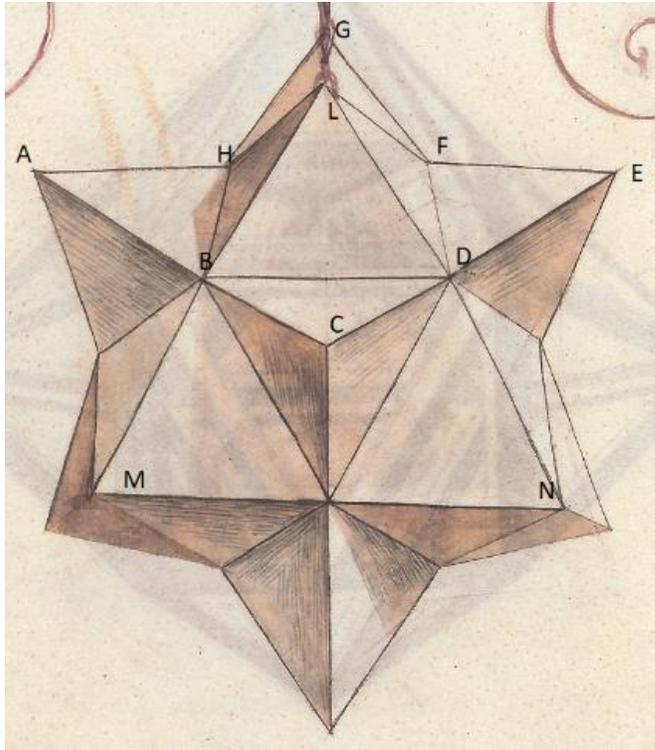
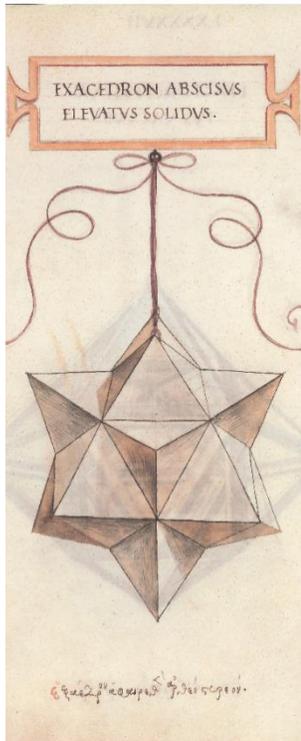
Data: _____	Classe: _____	Gruppo: _____
Studenti:		
1) _____	2) _____	
3) _____	4) _____	5) _____

Abbiamo visto che il *cubo tronco* si ottiene dal cubo troncando ogni suo vertice per mezzo del piano passante per i punti medi degli spigoli che concorrono nel vertice stesso. Abbiamo anche visto che il *dodecaedro tronco* si ottiene dal dodecaedro in modo analogo.

Descrivete il poliedro che si ottiene dall'ottaedro troncando ogni suo vertice per mezzo del piano passante per i punti medi degli spigoli che concorrono nel vertice stesso. Descrivete quale metodo e quali strumenti avete usato per capire tutto ciò (disegno a mano libera? Disegno con GeoGebra 2D? Disegno con GeoGebra 3D? Modello reale costruito con Polydron? Altro?).

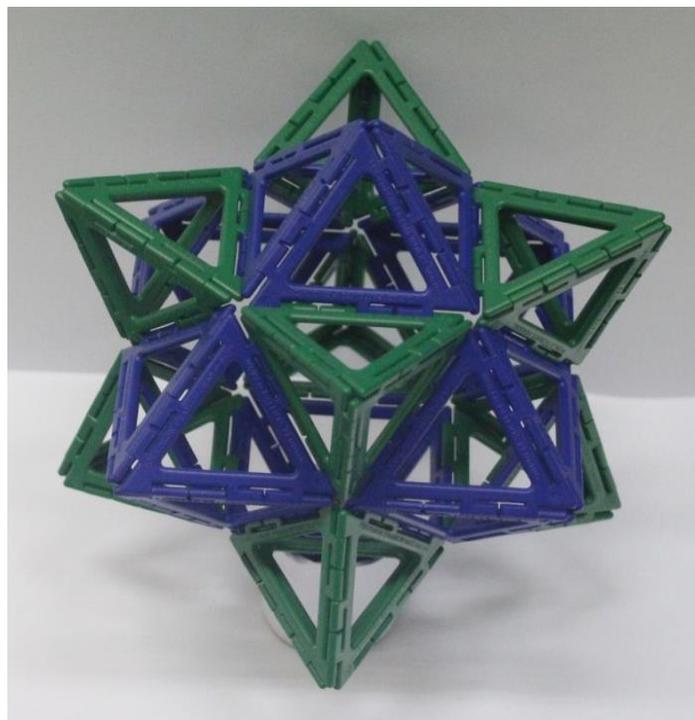
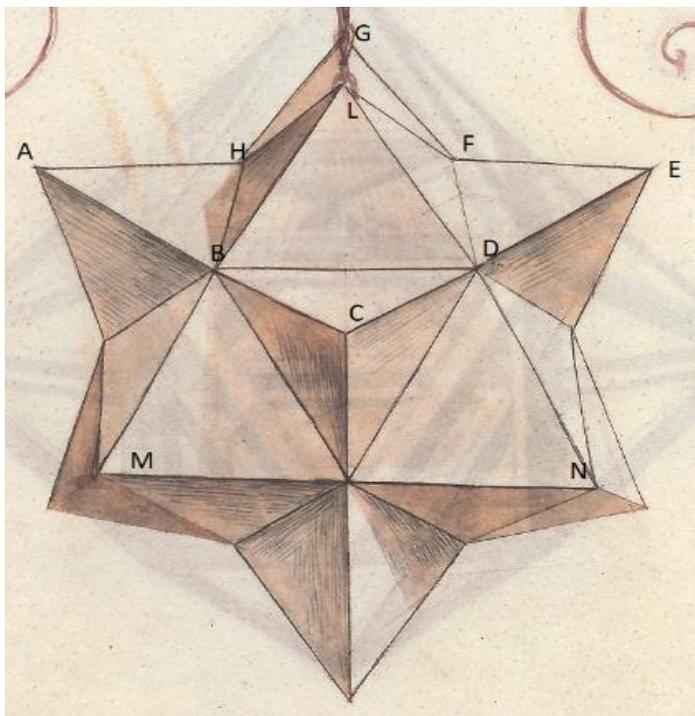
CUBO TRONCO ELEVATO

DEDURRE LE PROPRIETÀ DALLE IMMAGINI E DAL MODELLO



- *I vertici L, B, M sono allineati?*
- *I vertici L, B, M, N, D sono complanari?*

CUBO TRONCO ELEVATO DEDURRE LE PROPRIETÀ DALLE IMMAGINI



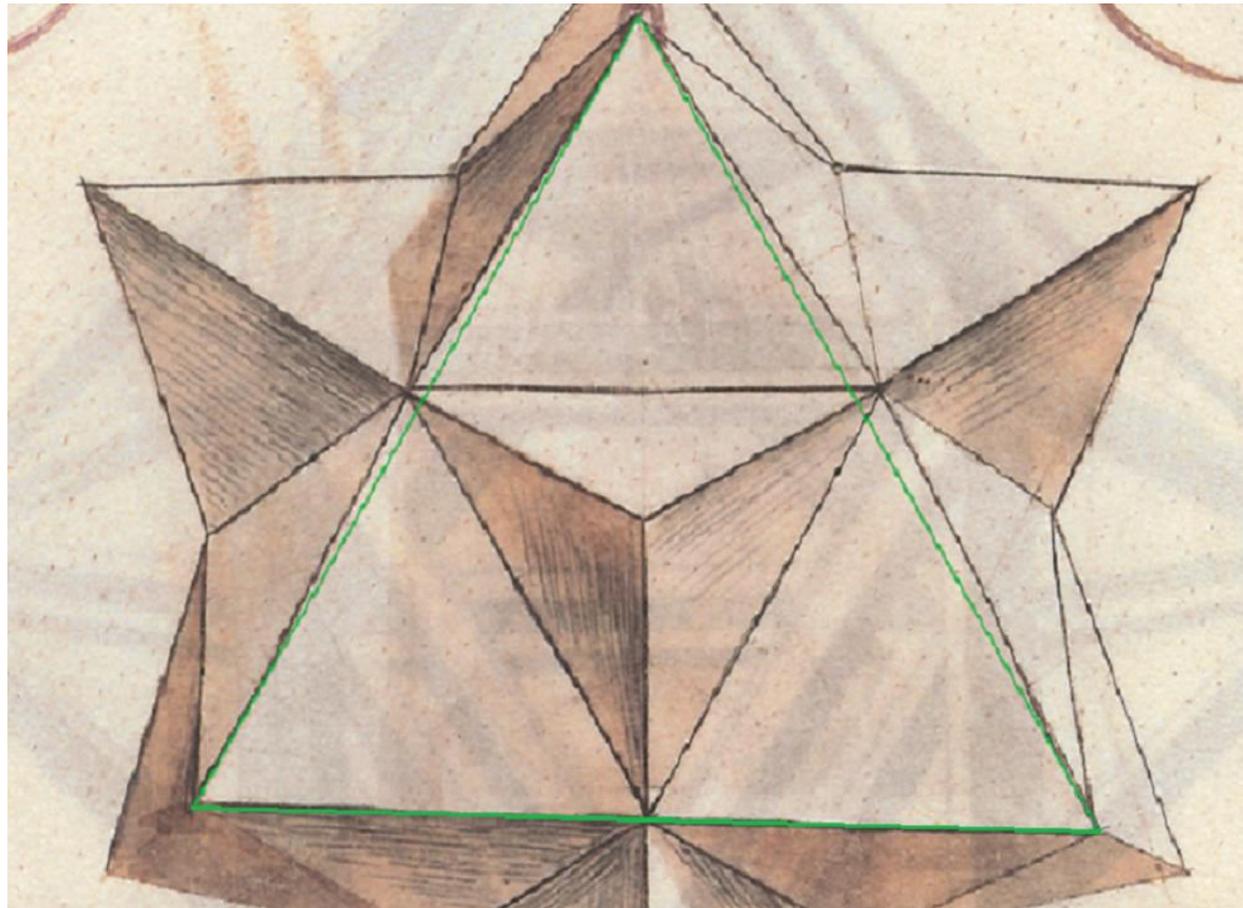
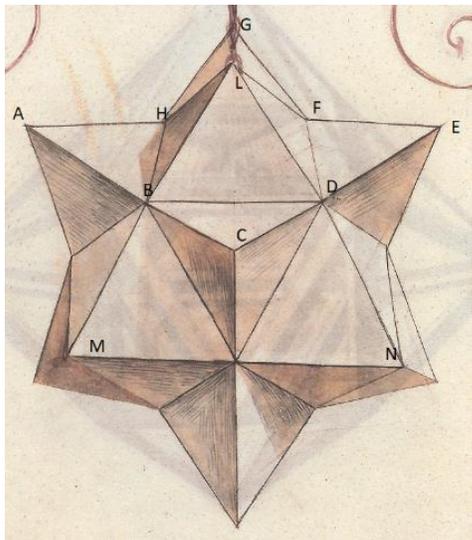
I vertici L, B, M sono allineati perché punti di uno spigolo dell'ottaedro da cui è ottenuto il cubo tronco elevato.

I vertici L, B, M, N, D sono complanari perché appartenenti ad una faccia dell'ottaedro.

Gli studenti sono stati in grado di dimostrare ciò perché sapevano che il cubo tronco si può ottenere anche dall'ottaedro.

Ma ...

CUBO TRONCO ELEVATO L'IMMAGINE DI LEONARDO



*Leonardo e Pacioli
hanno sbagliato...?*

RINGRAZIAMENTI

AGLI STUDENTI DELLE CLASSI I, II E III SEZIONI A E G, I E II SEZIONI D, N E I SEZIONE H
AI DOCENTI: G.ARMELLINO, C. CIPRIANI, C. FIORI, U. MONTEMAGNO, M.R. RUSSO E B. DI PAOLA
ALLA DIRIGENTE DEL LICEO NOMETANO: PROF.SSA GIULIA ORSINI.
AL PROF. GIUSEPPE ACCASCINA CON IL QUALE ABBIAMO IDEATO IL PROGETTO.

GRAZIE
per la
partecipazione!

Patrizia Berneschi: patpie@libero.it

Elena Possamai: elenapossa@libero.it