IRRSAE Lazio
Istituto Regionale Ricerca Sperimentazione Aggiornamento Educativo

Giuseppe Accascina - Patrizia Berneschi

Uso di *DERIVE* per esplorare le trasformazioni geometriche

Quaderni di didattica della Matematica

n.3

INDICE

1.	Alcune macro	4
2.	Matrici	8
3.	Isometrie	12
4.	Affinità	16
	Esercizi	18
	Bibliografia	19

INFORMAZIONI TECNICHE

Le attività sviluppate nel corso di queste schede fanno riferimento alla versione italiana 4.07 di DERIVE per DOS. Possono essere comunque eseguite anche usando le versioni 3.0 e successive. Nella versione inglese molti nomi dei comandi sono differenti.

Per ottenere i disegni è necessario utilizzare lo schermo in modalità grafica.
Per far ciò, una volta caricato il programma, eseguire i comandi seguenti (premere il tasto indicato dalla lettera contenuta tra parentesi quadre):
[O]pzioni (premere cioè il tasto O) [V]ideo [G]raphics [ESC] [ESC] (premere due volte il tasto ESC)
Per conservare questo stato:
fi[L]e [S]alva [S]tato [INVIO] (premere il tasto di ritorno carrello) [Y].

Sul dischetto allegato sono registrati, in formato MTH, tutti i file *DERIVE* usati e, in formato pdf, questo quaderno.
Naturalmente, per usare i file, è necessario *DERIVE*.

INTRODUZIONE

Questo quaderno è stato scritto in occasione dei corsi aggiornamento *L'insegnamento della geometria* organizzati dall'IRRSAE LAZIO per docenti di matematica di Scuole Secondarie Superiori svolti a Frosinone, Latina e Roma nella primavera del 1998.

Il quaderno è stato progettato per docenti di matematica (**non** per studenti) che abbiano una certa familiarità con *DERIVE* e segue i criteri adottati in Accascina - Berneschi *Introduzione all'uso di DERIVE nella geometria*, quaderno scritto per docenti di matematica che hanno poca familiarità con il calcolatore. Consigliamo la lettura di quest'ultimo a coloro che non hanno mai usato *DERIVE.*

Nella prima scheda vengono introdotte alcune macro che si aggiungono a quelle create nella ottava scheda del precedente quaderno. A partire da queste si possono creare programmi che permettano di studiare problemi di geometria che, per la complessità di algoritmi che spesso implicano, sono di solito preclusi in uno studio che non faccia uso di strumenti di calcolo.

L'uso di *DERIVE* è particolarmente utile nell'illustrazione delle trasformazioni geometriche, argomento che richiede una buona capacità di calcolo e di disegno.

Nell'introdurre le trasformazioni geometriche si è seguito l'approccio dato in Accascina *Le trasformazioni geometriche e il programma di Erlangen* in cui si fa ampio uso delle matrici.
Nella seconda scheda si analizzano le matrici e le loro operazioni.
Nella terza scheda si studiano le isometrie piane. Ne vengono dati alcuni esempi e sono introdotti programmi che permettono una buona illustrazione di alcuni teoremi.
Nella quarta scheda vengono studiate le affinità.

Per quanto DERIVE preveda una gran moltitudine di istruzioni/comandi funzionali per la stesura "ottimale" di programmi, questa potenzialità non viene qui sfruttata. Si è preferito invece utilizzare solo un numero estremamente limitato di istruzioni con l'intento di privilegiare la chiarezza dei contenuti sostanziali e dei risultati da raggiungere ad eventuale discapito di una "ottimizzazione" del programma.
Siamo infatti convinti che l'insegnante di matematica abbia il compito di insegnare tale disciplina matematica e non di illustrare le innumerevoli potenzialità di un programma matematico.

Roma, 3 aprile 1998

Giuseppe Accascina, Patrizia Berneschi

1. ALCUNE MACRO

Vogliamo costruire una macro che determini l'equazione della circonferenza passante per i punti P1=(x1,y1), P2=(x2,y2) e P3=(x3,y3).
Possiamo usare due metodi. Il metodo algebrico e il metodo geometrico.
Usiamo innanzitutto il metodo algebrico: scriviamo l'equazione di una circonferenza generica ed imponiamo il passaggio per i tre punti.
Mettiamoci, se già non ci siamo, in Inputmode: Word (vedere esercitazione 8).
Cominciamo con il dare un nome al file:
Cre[A] `"File: circ. Circonferenza per tre punti. Metodo algebrico."`
Cre[A] `x^2+y^2+ax+by+c=0` (equazione di una circonferenza generica)
Vogliamo sostituire nell'equazione della circonferenza le coordinate del punto P1.
Strume[N]ti [S]ostituisci [INVIO]

```
STRUMENTI SOSTITUISCI valore: x

Inserire il valore o l'espressione da sostituire a x
User                                   Free:100%    Lin       Derive Algebra
```

`x1` [INVIO] (sostituiamo alla x il valore x1)
`y1` [INVIO] (sostituiamo alla y il valore y1)

```
STRUMENTI SOSTITUISCI valore: a

Inserire il valore o l'espressione da sostituire a a
User                                   Free:100%    Lin       Derive Algebra
```

Non vogliamo sostituire il parametro a, premiamo quindi [INVIO]
Ci comportiamo in modo analogo per i parametri b e c. Otteniamo:

```
#1:  "File: circ. Circonferenza per tre punti. Metodo algebrico."

      2    2
#2:  x  + y  + a·x + b·y + c = 0

       2     2
#3:  x1  + y1  + a·x1 + b·y1 + c = 0
```

Imponiamo in modo analogo il passaggio per gli altri due punti.

```
       2     2
#4:  x2  + y2  + a·x2 + b·y2 + c = 0

       2     2
#5:  x3  + y3  + a·x3 + b·y3 + c = 0
```

Impostiamo il sistema delle equazioni #3,#4 e #5:
cre[A] `[#3,#4,#5]` `[INVIO]`

#6: $\left[x1^2 + y1^2 + a\cdot x1 + b\cdot y1 + c = 0,\ x2^2 + y2^2 + a\cdot x2 + b\cdot y2 + c = 0,\ x3^2 + y3\right.$

[R]isolvi [INVIO]

```
RISOLVI variabile: a

Inserire la variabile
User                                        Free:100% Ins          Derive Algebra
```

Vogliamo risolvere rispetto alla variabile a, premiamo quindi [INVIO].
Procediamo in modo analogo per le variabili b e c.

#7: $\left[a = -\frac{x1^2\cdot(y2 - y3) + x2^2\cdot(y3 - y1) + (x3^2 + (y1 - y3)\cdot(y2 - y3))\cdot(y1 - y}{x1\cdot(y2 - y3) + x2\cdot(y3 - y1) + x3\cdot(y1 - y2)}\right.$

Sostituiamo alla equazione #2 i valori ottenuti per a, b e c:
[V]ai-a 2 strume[N]ti [S]ostituisci [INVIO]

```
STRUMENTI SOSTITUISCI valore: x

Inserire il valore o l'espressione da sostituire a x
User                                        Free:100%    Lin       Derive Algebra
```

Non sostituiamo niente alla x e alla y.

```
STRUMENTI SOSTITUISCI valore: a

Inserire il valore o l'espressione da sostituire a a
User                                        Free:100%    Lin       Derive Algebra
```

Vogliamo sostituire al parametro a una parte dell'espressione #7:
Evidenziamo l'espressione #7 premendo varie volte il tasto [↓].
[F6] [←] [↓][→] (evidenziamo la parte che ci interessa della espressione)

#7: $= -\frac{x1^2\cdot(y2 - y3) + x2^2\cdot(y3 - y1) + (x3^2 + (y1 - y3)\cdot(y2 - y3))\cdot(y1 - y2)}{x1\cdot(y2 - y3) + x2\cdot(y3 - y1) + x3\cdot(y1 - y2)}$

[F3] [INVIO]
Comportandoci in modo analogo per i parametri b e c otteniamo:

#8: $x^2 + y^2 + \left[- \frac{x1^2 \cdot (y2 - y3) + x2^2 \cdot (y3 - y1) + (x3^2 + (y1 - y3) \cdot (y2 - y3)) \cdot (}{x1 \cdot (y2 - y3) + x2 \cdot (y3 - y1) + x3 \cdot (y1 - y2)} \right.$

Creiamo infine la macro desiderata:
cre[A] `circonferenza3punti(x1,y1,x2,y2,x3,y3):=` #9 [INVIO]

#9: $\mathrm{CIRCONFERENZA3PUNTI}(x1, y1, x2, y2, x3, y3) := x^2 + y^2 + \left[- \frac{x1^2 \cdot (y2 - y3)}{} \right.$

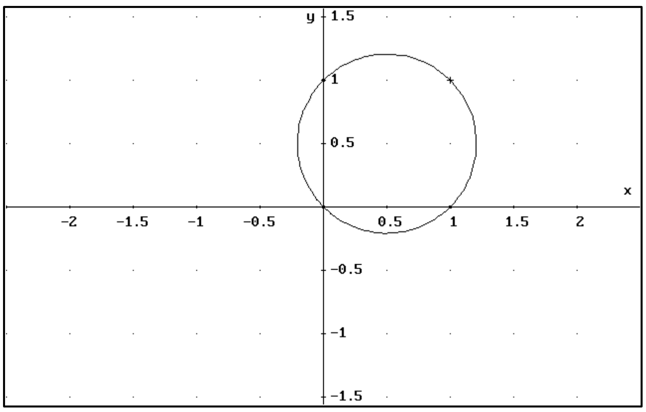
Usiamo questa macro per determinare e disegnare la circonferenza passante per i punti O=(0,0) , A=(1,0) e B=(0,1).
Disegniamo innanzitutto i tre punti:
cre[A] `[[0,0],[1,0],[0,1]]` [INVIO]

#10: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

[G]rafici [G]rafici.
Torniamo alla finestra algebra e disegniamo la circonferenza passante per essi:
alge[B]ra cre[A] `circonferenza3punti(0,0,1,0,0,1)`

#11: CIRCONFERENZA3PUNTI(0, 0, 1, 0, 0, 1)

[G]rafici [G]rafici



Determiniamo l'equazione della nostra circonferenza:

alge[B]ra [S]emplifica [INVIO]

#12: $x^2 - x + y^2 - y = 0$

Salviamo il file
Fi[L]e [S]alva [D]erive [INVIO] `a:circ(e)` [INVIO].
Chi non è riuscito a scrivere il file, lo può sempre trovare già scritto nel file A:circ.

Possiamo arrivare allo stesso risultato cercando il centro e il raggio della circonferenza cercata.
Il centro è il punto di intersezione degli assi dei segmenti aventi come estremi una coppia dei tre punti assegnati.
Dobbiamo quindi creare una macro che determini l'equazione cartesiana (o le equazioni parametriche) dell'asse del segmento di estremi P1=(x1,y1) e P2=(x2,y2). E' una funzione nelle variabili x1,y1,x2,y2.
Dobbiamo poi creare una macro che determini le coordinate dei punti di intersezione di due rette assegnate per mezzo di equazioni cartesiane o di equazioni parametriche.
Il raggio della circonferenza cercata è dato dalla distanza del centro ad uno qualsiasi dei punti assegnati.
Dobbiamo quindi creare una macro che determini la distanza tra due punti.
Lasciamo tutto ciò per esercizio.
Nel file A:utilita1 sono inserite queste ed altre macro. Si è preferito usare equazioni parametriche.
Nel file A:utilita2 è inserita, insieme ad altre, la macro della circonferenza passante per tre punti ottenuta utilizzando il procedimento geometrico appena descritto.
Questo file utilizza macro inserite nel file A:utilita1. E' quindi necessario caricare innanzitutto il file a:utilita1 prima di caricare il file a:utilita2.
Quando si hanno file con molte istruzioni è conveniente caricare le istruzioni contenute in un file senza che esse appaiano sullo schermo. Se vogliamo, per esempio, caricare il file A:utilita1 dobbiamo dare le seguenti istruzioni:
Fi[L]e [C]arica [U]tilità `A:utilita1.`
Ora possiamo caricare il file a:utilita2 senza problemi.

ESERCIZIO. Proponiamo infine di determinare una macro che calcoli la distanza tra un punto ed una retta data in equazione cartesiana implicita. La formula è ben nota. Proponiamo però di determinarla ricordando che la distanza di un punto P0 da una retta: è la distanza del punto dalla proiezione ortogonale del punto P0 sulla retta.
Si può trovare la soluzione di ciò nel file A:distanza.

2. MATRICI

Con DERIVE possiamo fare calcoli matriciali.

Carichiamo il file:”11-1”

#1: "file 11-1"

#2: $$\begin{bmatrix} \mathrm{COS}\left[\frac{pi}{3}\right] & -\mathrm{SIN}\left[\frac{pi}{3}\right] \\ \mathrm{SIN}\left[\frac{pi}{3}\right] & \mathrm{COS}\left[\frac{pi}{3}\right] \end{bmatrix}$$

#3: $$\begin{bmatrix} \mathrm{COS}\left[\frac{pi}{3}\right] & -\mathrm{SIN}\left[\frac{pi}{3}\right] \\ \mathrm{SIN}\left[\frac{pi}{3}\right] & \mathrm{COS}\left[\frac{pi}{3}\right] \end{bmatrix}`$$

#4: $$\begin{bmatrix} \mathrm{COS}\left[\frac{pi}{3}\right] & -\mathrm{SIN}\left[\frac{pi}{3}\right] \\ \mathrm{SIN}\left[\frac{pi}{3}\right] & \mathrm{COS}\left[\frac{pi}{3}\right] \end{bmatrix}^{-1}$$

Il simbolo "pi" indica π.
Evidenziamo la matrice #2 e digitiamo [S]emplifica. Otteniamo la seguente matrice:

#5: $$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\mathrm{SQRT}(3)}{2} \\ \frac{\mathrm{SQRT}(3)}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

L'espressione #3 non è altro che l'espressione #2 seguita dal simbolo ' (apice). E' il simbolo di trasposta. L'espressione #4 indica l'inversa della matrice #2.

Semplifichiamo l’espressione #3 e la #4. Otteniamo:

$$\#6:\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\mathrm{SQRT}(3)}{2} \\ -\frac{\mathrm{SQRT}(3)}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#7:\quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\mathrm{SQRT}(3)}{2} \\ -\frac{\mathrm{SQRT}(3)}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Le due espressioni coincidono. Ciò significa che la trasposta e l'inversa della matrice #2 sono uguali.

Possiamo anche calcolare il prodotto di due matrici. Calcoliamo, per esempio, il prodotto della matrice #2 con la matrice #3, la sua trasposta. Per far ciò basta giustapporre le due matrici:
cre[A] #2 #3   [S]emplifica

$$\#8:\quad \begin{bmatrix} \mathrm{COS}\left[\frac{pi}{3}\right] & -\mathrm{SIN}\left[\frac{pi}{3}\right] \\ \mathrm{SIN}\left[\frac{pi}{3}\right] & \mathrm{COS}\left[\frac{pi}{3}\right] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{COS}\left[\frac{pi}{3}\right] & -\mathrm{SIN}\left[\frac{pi}{3}\right] \\ \mathrm{SIN}\left[\frac{pi}{3}\right] & \mathrm{COS}\left[\frac{pi}{3}\right] \end{bmatrix}^{`}$$

$$\#9:\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Abbiamo ottenuto la matrice unità. Ce lo aspettavamo. Abbiamo infatti visto in precedenza che la trasposta e l'inversa della matrice #2 coincidono.

Per vedere come si scrivono le matrici ricopiamoci l'espressione #9:
cre[A] [F3]

```
CREA espressione: [[1, 0], [0, 1]]
```

Lasciamo come esercizio la costruzione della matrice:

#10: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Carichiamo ora il file: 11-2:

#1: "file 11-2"

#2: $\left[\begin{matrix} 1 + t & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cdot t \end{matrix}\right]$

#3: $\left[1 + t, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cdot t\right]$

#4: $\begin{bmatrix} \mathrm{COS}\left[\dfrac{pi}{3}\right] & -\ \mathrm{SIN}\left[\dfrac{pi}{3}\right] \\ \mathrm{SIN}\left[\dfrac{pi}{3}\right] & \mathrm{COS}\left[\dfrac{pi}{3}\right] \end{bmatrix}$

Notiamo la differenza tra le espressioni #2 e #3.
In # 3 vi è una virgola: si tratta di un vettore.
In #2 la virgola manca: si tratta di una matrice formata da una sola riga.
Per quel che riguarda la sua rappresentazione grafica la matrice si comporta come un vettore. Disegniamo l'espressione #2 dando a t valori compresi tra 0 e 1.
Dobbiamo quindi evidenziare l'espressione #2 e poi:
[G]rafici [G]rafici 0 [TAB] 1 [INVIO]

Ricordiamo che, se indichiamo con (x', y') le coordinate dell'immagine di un punto di coordinate (x, y) attraverso la rotazione intorno all'origine di una angolo α in senso antiorario, abbiamo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Sfruttiamo tutto ciò per calcolare determinare l'immagine del segmento #2 attraverso una rotazione intorno all'origine in senso antiorario di un angolo uguale a $\pi/3$.
La matrice associata a tale rotazione è proprio la matrice #4.
Eseguiamo pertanto i seguenti comandi:
cre[A] #3 #2`

$$\#5:\quad \begin{bmatrix} \mathrm{COS}\left[\dfrac{pi}{3}\right] & -\,\mathrm{SIN}\left[\dfrac{pi}{3}\right] \\ \mathrm{SIN}\left[\dfrac{pi}{3}\right] & \mathrm{COS}\left[\dfrac{pi}{3}\right] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + t & \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cdot t \end{bmatrix}`$$

[S]emplifica

$$\#6:\quad \begin{bmatrix} t\cdot\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{SQRT}(3)}{6}\right] - \dfrac{\mathrm{SQRT}(3)}{4} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2\cdot t\cdot(3\cdot\mathrm{SQRT}(3) + 1) + 6\cdot\mathrm{SQRT}(3) + 3}{12} \end{bmatrix}$$

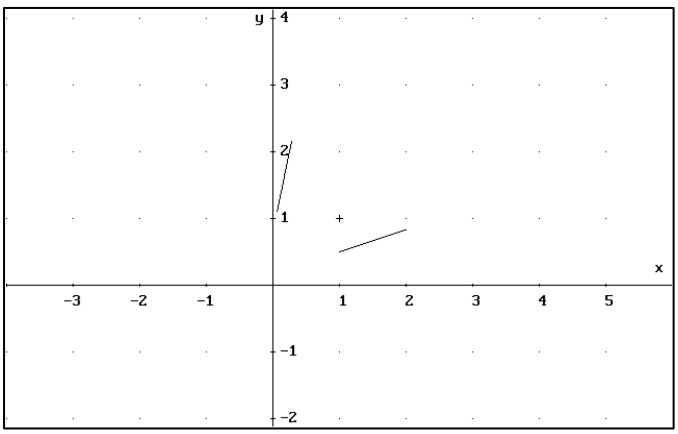
Per poter disegnare il segmento ruotato dobbiamo passare alla trasposta:
cre[A]   #6`

$$\#7:\quad \begin{bmatrix} t\cdot\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{SQRT}(3)}{6}\right] - \dfrac{\mathrm{SQRT}(3)}{4} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2\cdot t\cdot(3\cdot\mathrm{SQRT}(3) + 1) + 6\cdot\mathrm{SQRT}(3) + 3}{12} \end{bmatrix}`$$

[S]emplifica

$$\#8:\quad \left[\, t\cdot\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{\mathrm{SQRT}(3)}{6}\right] - \dfrac{\mathrm{SQRT}(3)}{4} + \dfrac{1}{2} \quad \dfrac{2\cdot t\cdot(3\cdot\mathrm{SQRT}(3) + 1) + 6\cdot\mathrm{SQRT}(3) +}{12}\right.$$

[G]rafici [G]rafici 0   [TAB] 1



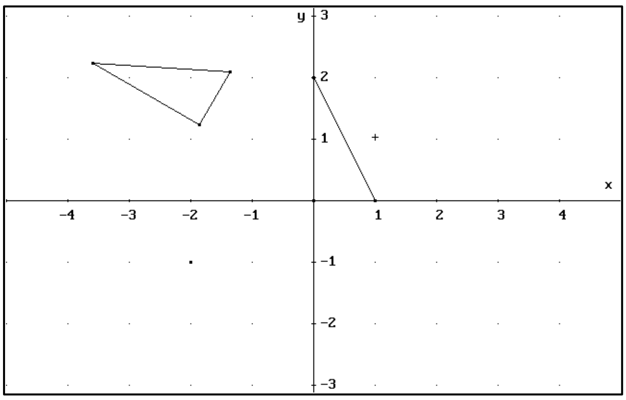
Abbiamo ottenuto quel che volevamo.

3. ISOMETRIE

Abbiamo visto nella esercitazione precedente la relazione intercorrente tra le coordinate di un punto e quelle della sua immagine attraverso una rotazione di centro l'origine degli assi.
Nel caso di una rotazione di centro un punto C=(h,k) la relazione intercorrente è:

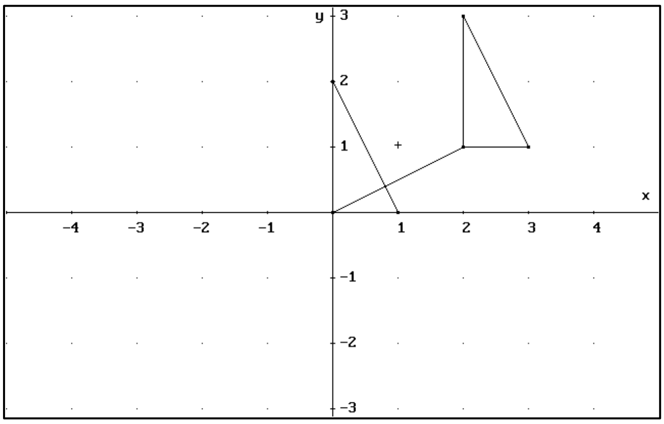
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sin\alpha & -h\cos\alpha + ksin\alpha \\ sin\alpha & \cos\alpha & -hsin\alpha - k\cos\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nel file A:rotaz abbiamo sfruttato tutto ciò per rappresentare la rotazione dando un triangolo e la sua immagine attraverso la rotazione.
Si carichi il file.
Dobbiamo innanzitutto mettersi in modalità "connected":
[G]rafici [O]pzioni [S]tato [TAB] [C]onnected
Gli ultimi comandi permettono rappresentare il caso in cui il centro di rotazione sia il punto C=(-2,-1) e l'angolo sia uguale a π/3.
Abbiamo scelto come triangolo iniziale il triangolo di vertici O=(0,0) A=(1,0) e B=(0,2). Lo abbiamo chiamato "trianginiz". Per disegnarlo evidenziamo l'istruzione #22 e premiamo [G]rafici [G]rafici.
L'istruzione #23 rappresenta il centro di rotazione. L'istruzione #24 rappresenta l'immagine del triangolo iniziale. Disegniamole entrambe con la solita procedura



Volendo si può fare qualche altra prova copiando le istruzioni #23 e #24 e cambiando le coordinate del centro e l'ampiezza dell'angolo di rotazione.
Ora si legga il listato del file per capire come esso è stato realizzato. I frequenti commenti lo rendono autoesplicativo.

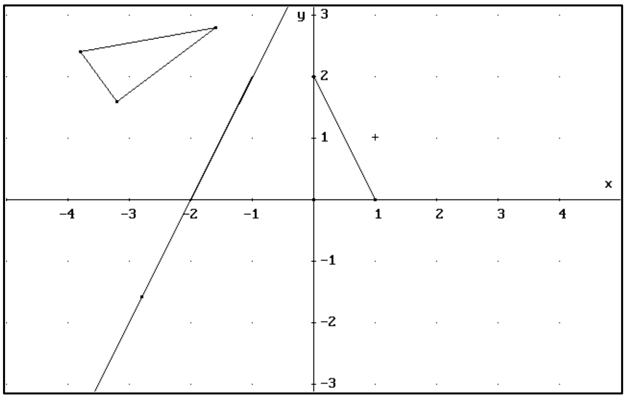
Nel file A:traslaz abbiamo illustrato con procedimento analogo una traslazione.
Si faccia il disegno. Anche in questo caso le istruzione necessarie per fare il disegno sono poste alla fine del file.



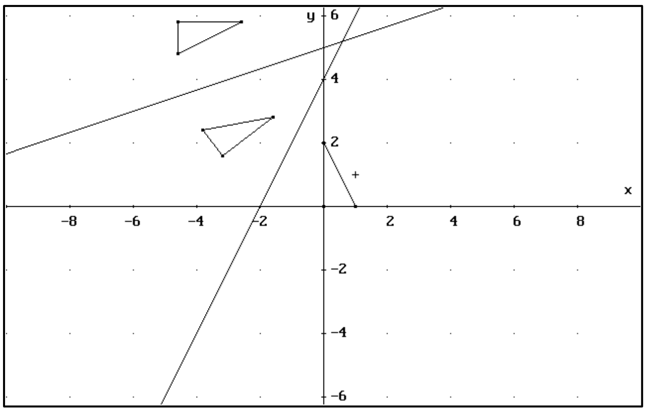
Si analizzi poi il listato.
Facciamo notare che la relazione tra le coordinate di un punto e quelle del suo traslato di un vettore (xt,yt) può essere descritta in termini matriciali:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & xt \\ 0 & 1 & yt \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

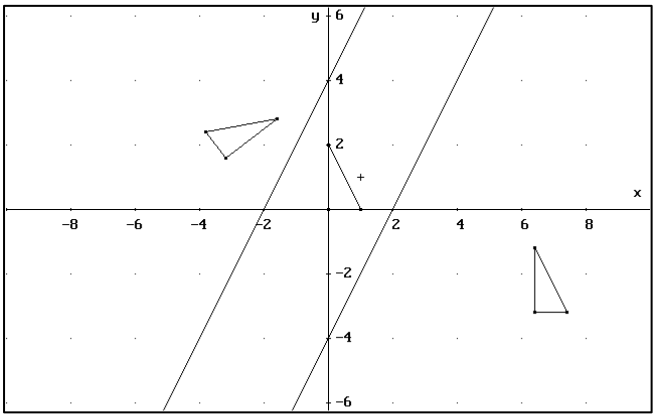
Il file A:Simmass illustra una simmetria assiale.



Il file A:comsimas illustra le composizioni di simmetrie assiali.
Alla fine del file sono inseriti due esempi. Il primo illustra la composizione di due simmetrie assiali con assi incidenti.



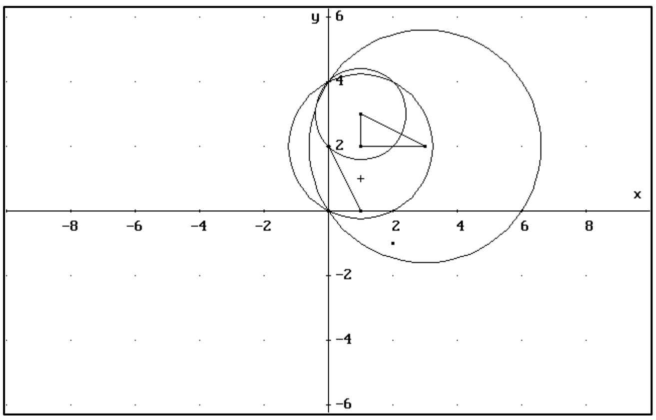
Il secondo esempio illustra il caso in cui gli assi di simmetria sono paralleli.



Abbiamo illustrato le rotazioni, le traslazioni e le simmetrie assiali. Sono tutte trasformazioni che conservano la distanza tra i punti, cioè isometrie.
Ogni isometria può essere ottenuta come composizione di simmetrie assiali, rotazioni e traslazioni.
Nel file A:isometri   (purtroppo la parola "isometrie" ha nove lettere) sono elencate le matrici associate alle isometrie.

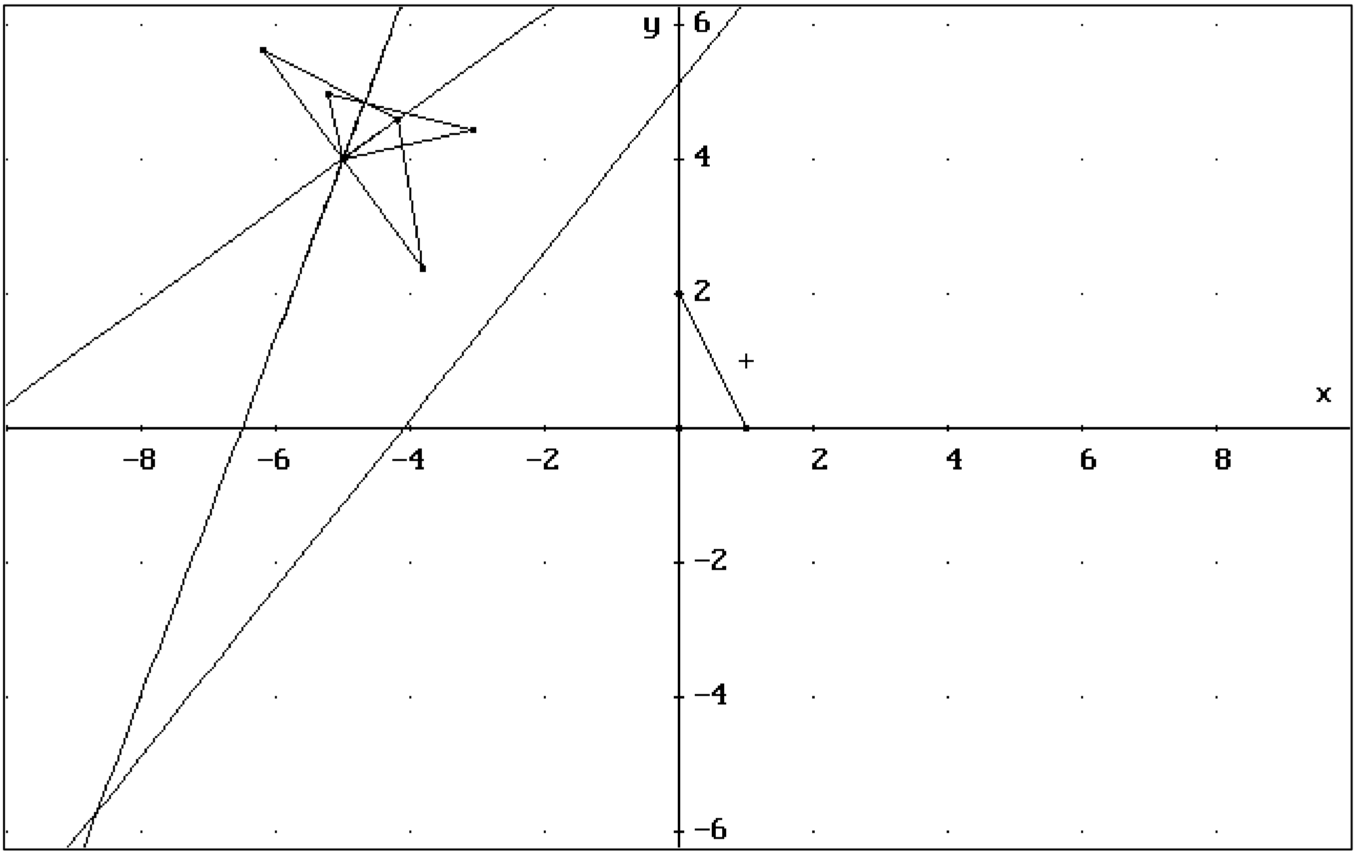
In tutti i casi precedenti, per illustrare una isometria abbiamo disegnato un triangolo e la sua immagine. La ragione di ciò risiede nel seguente:
Teorema. Siano dati tre punti non allineati A,B e C e siano dati tre punti non allineati A',B',C' tali che:
d(A,B)=d(A',B') , d(B,C)=d(B',C') , d(A,C)=d(A',C')
(con d(A,B) intendiamo la distanza tra A e B).
Si ha che esiste ed è unica una isometria f tale che f(A)=A' , f(B)=B' , f(C)=C'.

Il file A:unicisom illustra la dimostrazione dell'unicità.
Utilizzando le istruzioni finali del file si può dare una rappresentazione grafica della



dimostrazione.
Innanzitutto vengono disegnati tre punti non allineati. Per rendere più visibili i punti in effetti viene disegnato un triangolo chiamato "trianginiz". Si trova all'istruzione #23. Vengono poi disegnati tre punti (o meglio un triangolo) verificanti le proprietà richieste dalle ipotesi del teorema. Si trovano nell'istruzione #24. Vogliamo

dimostrare che, se si impone che la prima terna ordinata di punti abbia come immagine la seconda terna ordinata, allora ogni punto del piano ha un'immagine assegnata. Si consideri infatti un punto P. Esso è assegnato nell'istruzione #25. Lo si disegni. L'immagine del punto P dovrà appartenere alla circonferenza di centro A' e raggio uguale alla distanza tra P ed A. Quest'ultima è assegnata nella istruzione #26.
Si faccia poi lo stesso ragionamento prendendo in considerazione i punti B e C. Il punto P' dovrà appartenere quindi anche ad una seconda ed una terza circonferenza. Sono assegnate nelle istruzioni #27 e #28. Le si disegni. L'immagine del punto P dovrà appartenere all'intersezione delle tre circonferenze. Da ciò l'unicità.
Sia ben chiaro, per dare una effettiva dimostrazione dell'unicità, dobbiamo dimostrare che le tre circonferenze hanno uno ed un solo punto di intersezione. Il disegno ovviamente ora non ci può più aiutare. La dimostrazione è semplice. Viene lasciata per esercizio. Per esercizio chiediamo di individuare il punto della dimostrazione in cui si usa l'ipotesi che i punti della terna iniziale (e quindi quelli della terna finale) non sono allineati.
Il file a:esisisom illustra invece l'esistenza di una tale isometria.
Si dimostra infatti che per mezzo della composizione di al più tre isometrie possiamo portare la terna iniziale nella terna finale.



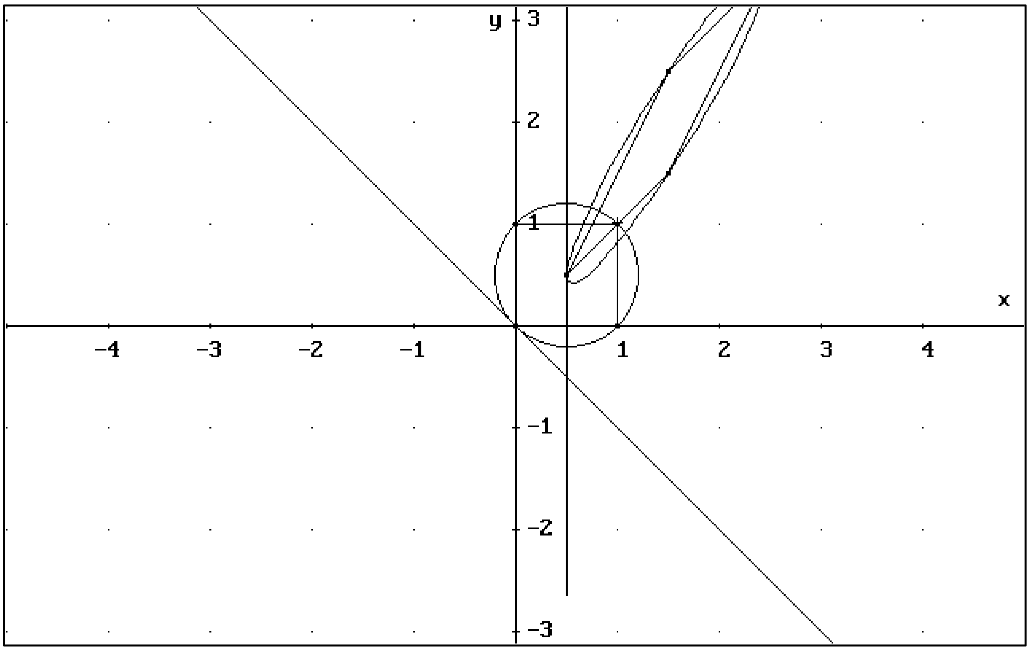
5. AFFINITA'

Un'affinità del piano è una trasformazione del piano in se stesso che conserva l'allineamento dei punti.
Si può dimostrare che la relazione intercorrente tra le coordinate di un punto
P = (x,y) e le coordinate della sua immagine P' = (x',y') attraverso un'affinità sono del tipo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & f & g \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

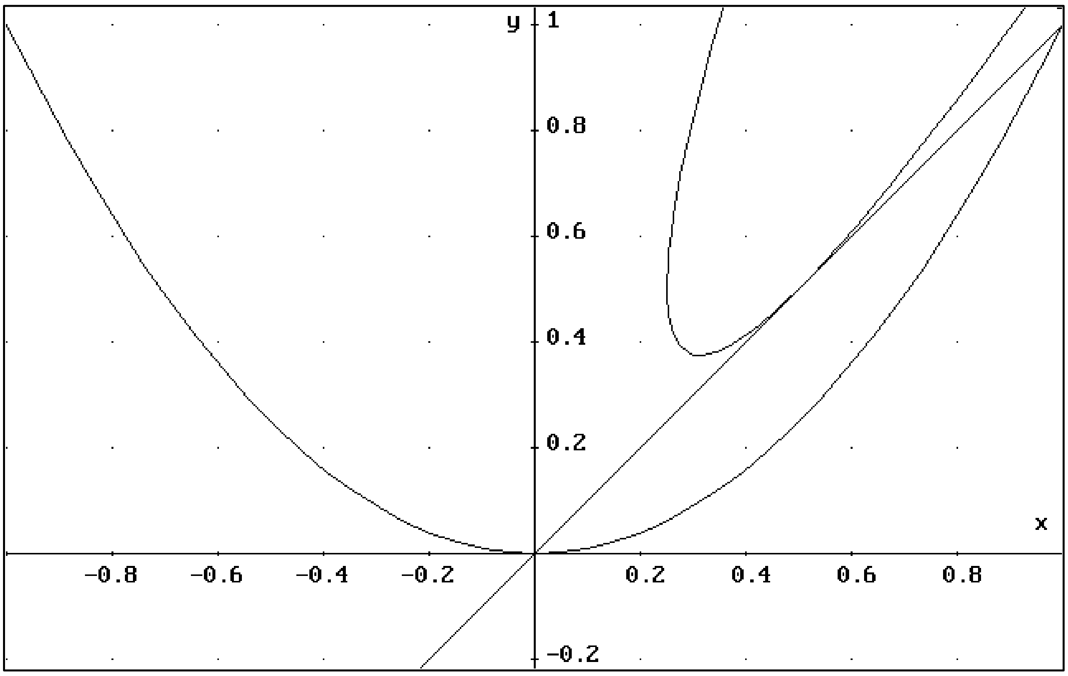
con il determinante della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ d & f \end{pmatrix}$ è non nullo.

Il file A:affinita può essere utilizzato per studiare il problema degli invarianti geometrici di un'affinità.
Abbiamo inserito come al solito in fondo al file le istruzioni utili per l'illustrazione.
Nell'istruzione #53 abbiamo dato un quadrato che abbiamo chiamato "quadriniz". Disegniamolo.
Nell'istruzione #55 abbiamo considerato la sua immagine attraverso una affinità assegnata. Disegniamola.
Scopriamo che il quadrato si è trasformato in un parallelogramma. Si è conservato il parallelismo ma non la perpendicolarità.
Le istruzioni #57 e #59 descrivono rispettivamente la circonferenza circoscritta al quadrato e la sua immagine. Disegniamole.



La circonferenza ha come immagine una curva che sembra essere un'ellisse. Noi sappiamo che si tratta effettivamente di un'ellisse. La dimostrazione di ciò viene di solito fatta all'università nel primo corso di geometria. Per gli studenti delle scuole secondarie superiori ci si può forse limitare a costruire molti esempi.
Le istruzioni #61 e #63 descrivono rispettivamente la tangente alla circonferenza nell'origine e la sua immagine. Disegniamole.
Dall'esame del disegno appare che l'immagine della tangente alla circonferenza è la tangente all'ellisse. Ma sarà ciò vero? E poi come si definisce la tangente ad una curva?

Cancelliamo ora tutto il disegno.
Le istruzioni #65 e #67 descrivono rispettivamente una parabola e la sua immagine.
Disegniamole. L'immagine della parabola pare essere una parabola. Ma lo è effettivamente?



Le istruzioni # 69 e #71 descrivono rispettivamente la tangente della parabola nel suo vertice e la sua immagine. Disegniamole. L'immagine della tangente appare essere tangente. Ma lo è effettivamente?
Notiamo infine che il vertice della parabola non ha come immagine il vertice della parabola immagine.

ESERCIZI

Esercizio 1
Dimostrare analiticamente (e **non** semplicemente illustrare, come abbiamo fatto in precedenza), che la composizione di due simmetrie assiali ad assi paralleli è una traslazione sfruttando la formula associata ad una simmetria assiale.

Esercizio 2
Determinare la matrice associata all'omotetia di centro l'origine e rapporto di similitudine k.
Determinare la matrice associata all'omotetia di centro un punto P0 = (x0,y0) e rapporto di similitudine k.

Esercizio 3
Creare, sulla falsariga del file A:unicisom un file che illustri un teorema di unicità delle similitudini analogo al teorema di unicità delle isometrie.

Esercizio 4
Sia assegnata una retta *r*, una retta s non parallela ad *r* e un numero *k*>0.
Chiamiamo omologia con asse la retta *r*, direzione la retta *s* e rapporto *k*, la trasformazione geometrica del piano che associa ad un punto P il punto P' definito nel modo seguente:
- P' = P se P appartiene alla retta *r*
- P' è tale che il vettore QP' è uguale al vettore QP dove Q è il punto di intersezione della retta *r* con la retta passante per P parallela alla retta *s*.

Determinare la formula che lega le coordinate di un punto con le coordinate della sua immagine. Verificare che si tratta di un'affinità.
Creare sulla falsariga del file A:affinita un file che aiuti ad analizzare gli invarianti di un'omologia.
Confrontare con le costruzione svolta in Crespina E., Margiotta G., Volpe S., *Uso di CABRI per esplorare le trasformazioni geometriche.*

Esercizio 5
Sia assegnata la circonferenza unitaria (di centro l'origine e raggio uguale a 1).
Chiamiamo inversione circolare rispetto alla circonferenza unitaria la legge che associa ad ogni punto P del piano escluso l'origine il punto P' appartenente alla semiretta *s* avente origine in O e contenente P tale che d(P',Q)=1/d(P,Q) dove Q è il punto di intersezione della circonferenza unitaria con la semiretta *s*.
Determinare la relazione intercorrente tra le coordinate di un punto e le coordinate della sua immagine. Verificare che non si tratta di un'affinità. Determinare le immagini di rette.
Confrontare con le costruzione svolta in Crespina E., Margiotta G., Volpe S., *Uso di CABRI per esplorare le trasformazioni geometriche.*

BIBLIOGRAFIA

Accascina G., *Trasformazioni geometriche e programma di Erlangen*, in L'insegnamento della geometria, MPI, UMI, 1997

Accascina G., Berneschi P. *Introduzione all'uso di DERIVE nella geometria*, Quaderni di didattica della matematica, n.2, IRRSAE LAZIO, 1998

Boieri P, *Le trasformazioni geometriche al calcolatore*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate (1995) pp. 629-647

Castagnola E, *Equazioni parametriche e trasformazioni geometriche*, TI Scuola, n.3, (1997), pp. 2-5

Crespina E., *Trasformazioni del piano*, TI Scuola, n.4 (1997), pp 13 - 14

Crespina E., Margiotta G., Volpe S., *Uso di CABRI per esplorare le trasformazioni geometriche*, Quaderni di didattica della matematica, n.1, IRRSAE LAZIO, 1998

Crespina E, Menghini M, Percario L, *Geometria "tradizionale" e geometria "delle trasformazioni"*, Notiziario UMI, Suppl. al n. 8-9 (1995) pp. 204-212

Dedò M, *Trasformazioni geometriche*, Decibel, 1996

Marchi M, *I gruppi delle trasformazioni geometriche*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate (1995) pp. 605-628

Olivieri G, *Lavorando con gli specchi. Introduzione alla geometria delle trasformazioni*, La Nuova Italia, 1984

Pergola M, Zanoli C, *Trasformazioni geometriche e macchine matematiche*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate (1995) pp. 689-714

Scimemi B, *Studio delle similitudini piane con il calcolatore*, Notiziario UMI, Suppl. al n. 8-9 (1995) pp. 45-58

Strolin Franzini A, *Le trasformazioni geometriche con il computer*, La Scuola, 1991

Villani V, *Similitudine e figure simili*, L'educazione matematica, anno XI (1990) pp. 55-64

Villani V, *Didattica della geometria delle trasformazioni*, IRRSAE Marche, 1992 (Pacchetto multimediale)

Villani V, *Le trasformazioni geometriche nella Scuola Secondaria Superiore*, L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate (1995) pp. 669-688

Villani V, *Il ruolo delle trasformazioni nell'insegnamento della geometria*, Notiziario UMI, Suppl. al n. 8-9 (1995) pp. 29-44

Vita V, *La geometria delle trasformazioni nell'insegnamento secondario superiore*, Archimede (1993), pp 76-83

Una buona guida all'uso di DERIVE non limitato alla sola geometria è:

Kutzler B., *Matematica con il PC, Introduzione a DERIVE*, Media Direct, 1995