La "dimostrazione" in geometria con l'aiuto di software didattici[1]

Giuseppe Accascina

(Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici,
Università "La Sapienza" di Roma)

Il titolo di questa chiacchierata apre un campo sterminato.
Io mi limiterò a descrivere alcuni esempi di "dimostrazioni" di geometria svolte con l'aiuto di *DERIVE* (ma il discorso è sempre estendibile a tutti i programmi di calcolo simbolico, quali *MATHEMATICA*, *MAPLE*, ed, in alcuni casi particolari, a *CABRI*). Spero che gli esempi da me scelti servano a suscitare dubbi e discussioni tra i partecipanti a questo seminario e, successivamente, tra i lettori degli Atti.

Primo Esempio
Fissato in un piano un sistema di assi cartesiani, ci chiediamo se i tre punti:

$$A=(-4,3) \quad , \quad B=\left(\frac{5}{2}\right) \quad , \quad C=\left(\frac{1}{2},-\frac{239}{325}\right)$$

siano allineati.

Se chiediamo ad uno studente di disegnare i tre punti su un foglio di carta, egli molto probabilmente ci risponderà che i punti appaiono allineati ma che non è sicuro che lo siano perché il suo disegno è impreciso.
Suggeriamogli di fare il disegno usando *DERIVE* . Riportiamo il listato del file così come appare sullo schermo del computer.

#1: "file: trepunti"

#2: [-4, 3]

#3: $\left[\frac{5}{2}, -\frac{12}{5}\right]$

#4: $\left[\frac{1}{2}, -\frac{239}{325}\right]$

Possiamo ora disegnare i tre punti.
I punti "sembrano" allineati anche quando ingrandiamo il disegno.

[1] Pubblicato in "Matematica e Software didattici" (a cura di G.Margiotta), IRRSAE Emilia Romagna, 1999, pp. 8 – 18

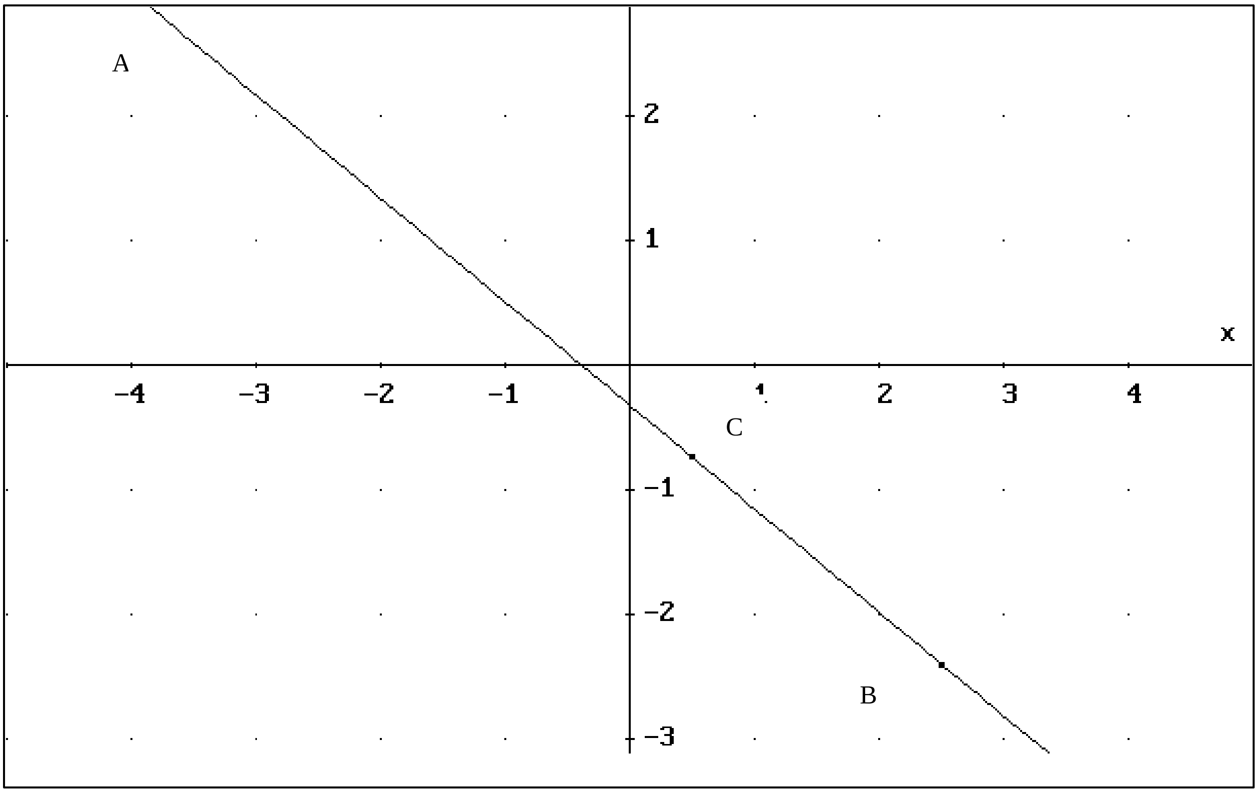
Ma ciò ovviamente non ci soddisfa. Scriviamo quindi l'equazione della retta passante per due punti generici (istruzione #5), consideriamo la retta passante per i punti A e B (istruzione #6) e semplifichiamo (istruzione #7)

#5: $$\text{RETTADUEPTI}(x1,\ y1,\ x2,\ y2) := (y2 - y1)\cdot(x - x1) = (x2 - x1)\cdot(y - y1)$$

#6: $$\text{RETTADUEPTI}\left[-4,\ 3,\ \frac{5}{2},\ -\frac{12}{5}\right]$$

#7: $$-\frac{27\cdot(x + 4)}{5} = \frac{13\cdot(y - 3)}{2}$$

La retta, una volta disegnata, "appare" passare per il punto C anche quando ingrandiamo il disegno.



Per rendere più comprensibile il disegno ottenuto con *DERIVE*, sono stati aggiunti i simboli A,B,C accanto ai tre punti.

A questo punto lo studente inesperto invariabilmente conclude che i tre punti sono allineati.
Il fatto che il disegno fatto dal computer sia molto più preciso del disegno fatto a mano fa sì che lo studente abbandoni tutte le precauzioni usate fino a quel momento.
Spieghiamo allo studente che non è il caso di abbandonare le precauzioni.
Sempre utilizzano *DERIVE* sostituiamo le coordinate del punto C nell'equazione della retta (istruzione #8) e semplifichiamo (istruzione #9).

$$\#8:\quad -\frac{27\cdot\left[\frac{1}{2}+4\right]}{5}=\frac{13\cdot\left[-\frac{239}{325}-3\right]}{2}$$

$$\#9:\quad \text{false}$$

Il computer ci dice che l'uguaglianza non è verificata. I tre punti non sono allineati.
Ma possiamo fidarci della risposta?
I seguenti calcoli dovrebbero rassicurarci.

$$\#10:\quad -27\cdot\left[\frac{1}{2}+4\right]\cdot 2=-243$$

$$\#11:\quad 13\cdot\left[-\frac{239}{325}-3\right]\cdot 5=-\frac{1214}{5}$$

$$\#12:\quad -243\cdot 5=-1215$$

Abbiamo "dimostrato" che i tre punti sono allineati.

Nascono però spontanee le seguenti domande.
Domanda 1. E' opportuno l'uso del software in casi analoghi a questo?
Domanda 2. La verifica dell'appartenenza di un punto ad una retta (oppure dell'uguaglianza delle lunghezze di due segmenti) fatta con un programma di calcolo simbolico è accettabile?

Supponiamo ora di usare *CABRI* in una situazione analoga. Ci costruiamo una retta passante per due punti *A* e *B* distinti. Determiniamo per mezzo di una qualche costruzione geometrica un punto *C* e chiediamo a *CABRI* se il punto *C* appartenga alla retta. Ci possiamo fidare della risposta che ci darà *CABRI?*
Domanda 3. La verifica dell'appartenenza di un punto ad una retta (oppure dell'uguaglianza delle lunghezze di due segmenti) fatta con *CABRI* è accettabile?

Secondo Esempio
Vogliamo determinare la formula della distanza di un punto P_0 da una retta r assegnata in forma cartesiana implicita.
Usiamo *DERIVE*. Poiché con *DERIVE* non è possibile usare gli indici, indichiamo il punto con $P0=(x0,y0)$. Indichiamo poi con $ax+by+c=0$ l'equazione della retta *r*.
Scriviamo l'equazione della retta *r* (istruzione #2), l'equazione della retta *s* passante per $P0$ e perpendicolare ad *r* (istruzione #3), il sistema determinato dalle rette *r* e *s* (istruzione #4) e determiniamone la soluzione (istruzione #5).

#1: "file: distanza"

#2: $a\cdot x + b\cdot y + c = 0$

#3: $b\cdot(x - x0) - a\cdot(y - y0) = 0$

#4: $[a\cdot x + b\cdot y + c = 0,\ b\cdot(x - x0) - a\cdot(y - y0) = 0]$

#5: $$\left[x = \frac{b^2\cdot x0 - a\cdot(b\cdot y0 + c)}{a^2 + b^2},\ y = \frac{a^2\cdot y0 - a\cdot b\cdot x0 - b\cdot c}{a^2 + b^2}\right]$$

Diamo quindi un nome alle coordinate del punto di interserzione. Esso è la proiezione del punto *P*0 sulla retta *r* (istruzioni #6 e #7). Introduciamo la formula della distanza tra due punti (istruzione #8) e la distanza punto - retta come la distanza tra il punto e la sua proiezione sulla retta (istruzione #9). Semplificando otteniamo la formula cercata (istruzione #10).

#6: $$\mathrm{XPROIEZPTORETTA}(x0, y0, a, b, c) := \frac{b^2\cdot x0 - a\cdot(b\cdot y0 + c)}{a^2 + b^2}$$

#7: $$\mathrm{YPROIEZPTORETTA}(x0, y0, a, b, c) := \frac{a^2\cdot y0 - a\cdot b\cdot x0 - b\cdot c}{a^2 + b^2}$$

#8: $$\mathrm{DISTANZADUEPTI}(x1, y1, x2, y2) := \mathrm{SQRT}((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2)$$

#9: DISTANZAPTORETTA(x0, y0, a, b, c) := DISTANZADUEPTI(x0, y0, XPROIEZPTORETTA

#10: $$\frac{|a\cdot x0 + b\cdot y0 + c|}{\mathrm{SQRT}(a^2 + b^2)}$$

Scriviamo per intero l'istruzione #9, troppo lunga per apparire nella sua interezza sullo schermo:
DISTANZAPTORETTA(x0,y0,a,b,c):=DISTANZADUEPUNTI(x0,y0,XPROIEZPTORETTA
(x0,y0,a,b,c),PROIEZPTORETTA(x0,y0,a,b,c))

Facciamo un esempio assegnando dei valori alle variabili x0,y0,a,b,c (istruzione #11).
Semplificando le espressioni #2,#3,#5 e #10 otteniamo l'equazione della retta *r* (istruzione #12), della retta *s* passante per P0 e ortogonale a *r* (istruzione #13), il punto di intersezione delle rette r e s (istruzione #14) e la distanza tra P0 e r (istruzione #15).

#11: $\left[x0 := -\dfrac{1}{2},\ y0 := 2,\ a := 2,\ b := -3,\ c := -\dfrac{3}{2}\right]$

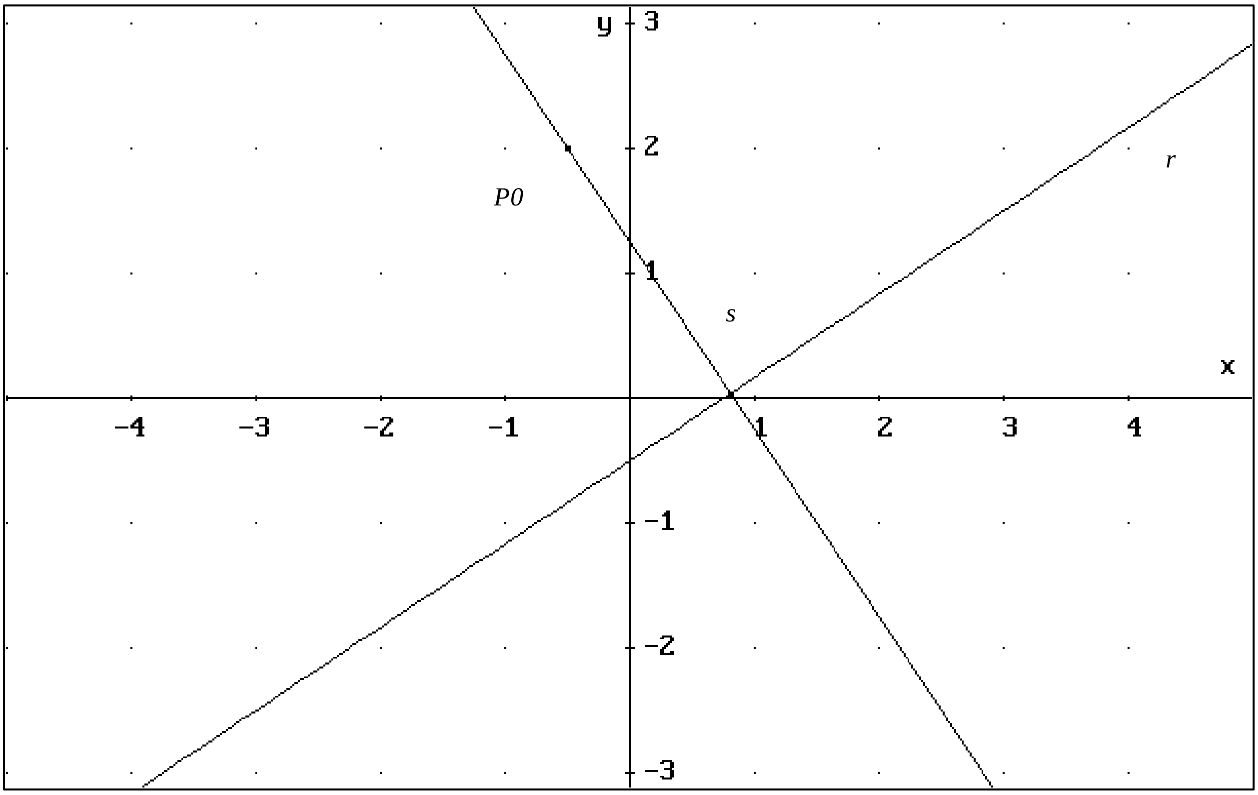
#12: $2\cdot x - 3\cdot y - \dfrac{3}{2} = 0$

#13: $-\dfrac{6\cdot x + 4\cdot y - 5}{2} = 0$

#14: $\left[x = \dfrac{21}{26},\ y = \dfrac{1}{26}\right]$

#15: $\dfrac{17\cdot \mathrm{SQRT}(13)}{26}$

Possiamo illustrare il procedimento seguito con un disegno.



Ci poniamo le seguenti domande.
Domanda 4. Possiamo accettare come dimostrazione il procedimento appena descritto?
Domanda 5. E' didatticamente conveniente utilizzare un programma di calcolo simbolico per una dimostrazione di questo genere?

Terzo Esempio
Nel primo esempio abbiamo usato *DERIVE* per "dimostrare" l'allineamento di tre punti. Nel secondo esempio abbiamo usato *DERIVE* per "dimostrare" una formula.

Vogliamo ora usare *DERIVE* per “dimostrare” il seguente teorema:

`Siano date una terna di punti` A, B e C `non allineati e una terna di punti` AF, BF e CF `tali che:`

$$d(A,B) = d(AF,BF) \;,\; d(A,C) = d(AF,CF) \;,\; d(B,C) = d(BF,CF)$$

`(con` $d(A,B)$ `intendiamo la distanza tra i punti` A e B).

`Esiste allora una ed una sola isometria` f `tale che:`

$$f(A) = AF \;,\; f(B) = BF \;,\; f(C) = CF.$$

Per illustrare la dimostrazione di questo teorema ho preparato il file ISOMETRIA.

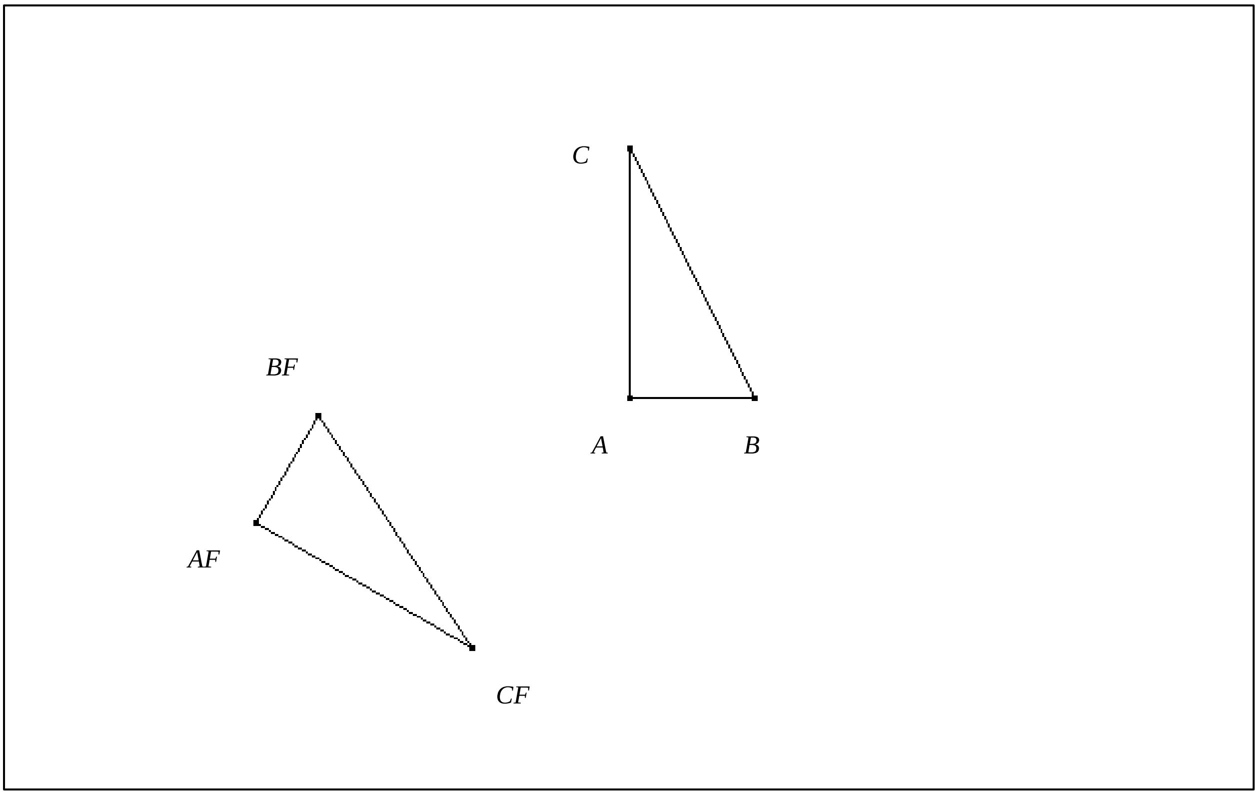
Non ne trascrivo qui il listato, molto lungo. Ad ogni modo questo file, come tutti gli altri file descritti in questo libro, è consultabile con le modalità descritte altrove.

In effetti in questo caso non ci interessa tanto il file quanto il suo uso. Utilizziamo infatti *DERIVE* in modo differente dai casi precedenti. I file scritti nei primi due casi sono molto semplici. Possono essere scritti senza difficoltà dagli stessi studenti. In questo caso invece non è necessario (e forse non è opportuno) chiedere agli studenti di scrivere loro stessi il file. Possiamo anche evitare di mostrarlo esplicitamente agli studenti.

Lo stesso docente che vuole usare il file può evitare, se vuole, di analizzare, il file. Egli deve solo assegnare i valori alle coordinate della prima terna di punti non allineati e ai tre parametri che permettono di assegnare una seconda terna di punti verificanti le condizioni richieste dal teorema. Deve poi disegnare alcuni enti geometrici. Per rendere più agevole ciò abbiamo inserito alla fine del file tutte le equazioni degli enti geometrici che devono essere disegnati.

Iniziamo ad utilizzare il nostro file disegnando la terna iniziale A,B,C e la terna finale AF,BF,CF.

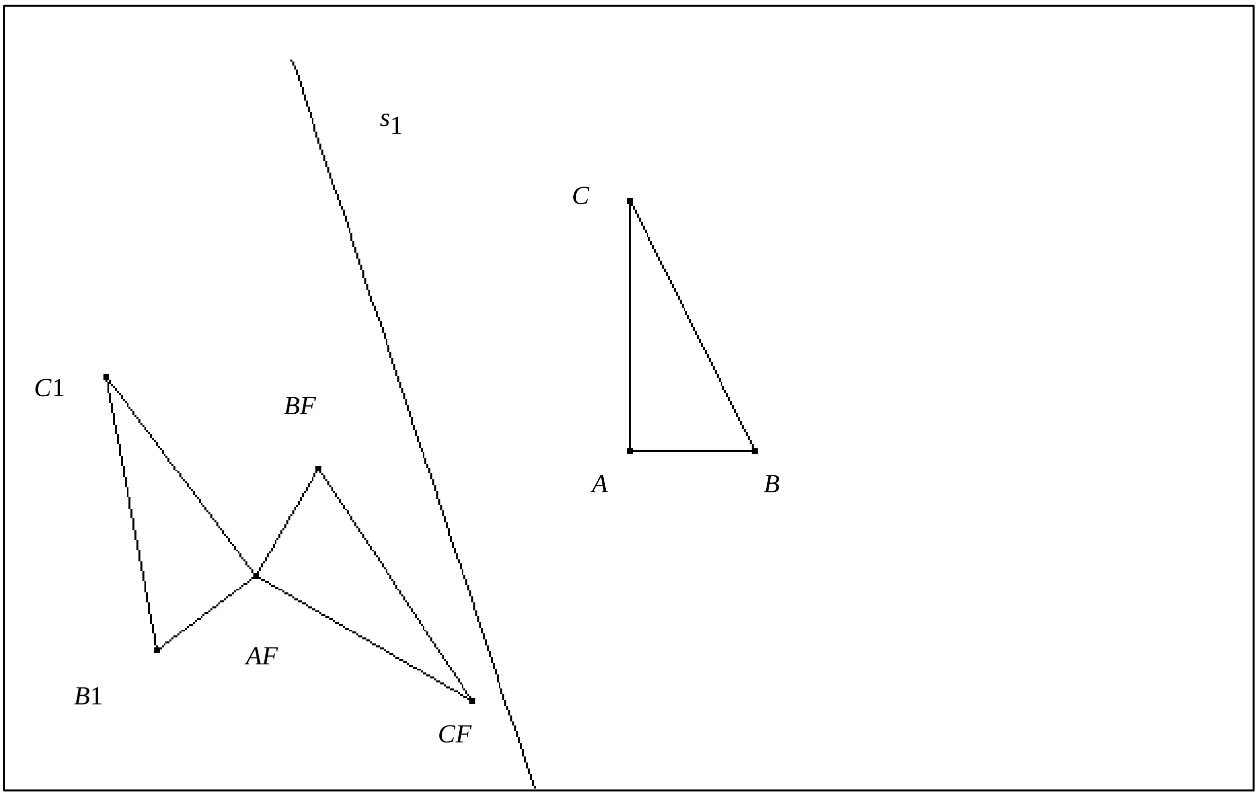
Per rendere il tutto più visibile disegniamo i due triangoli aventi come vertici tali terne.



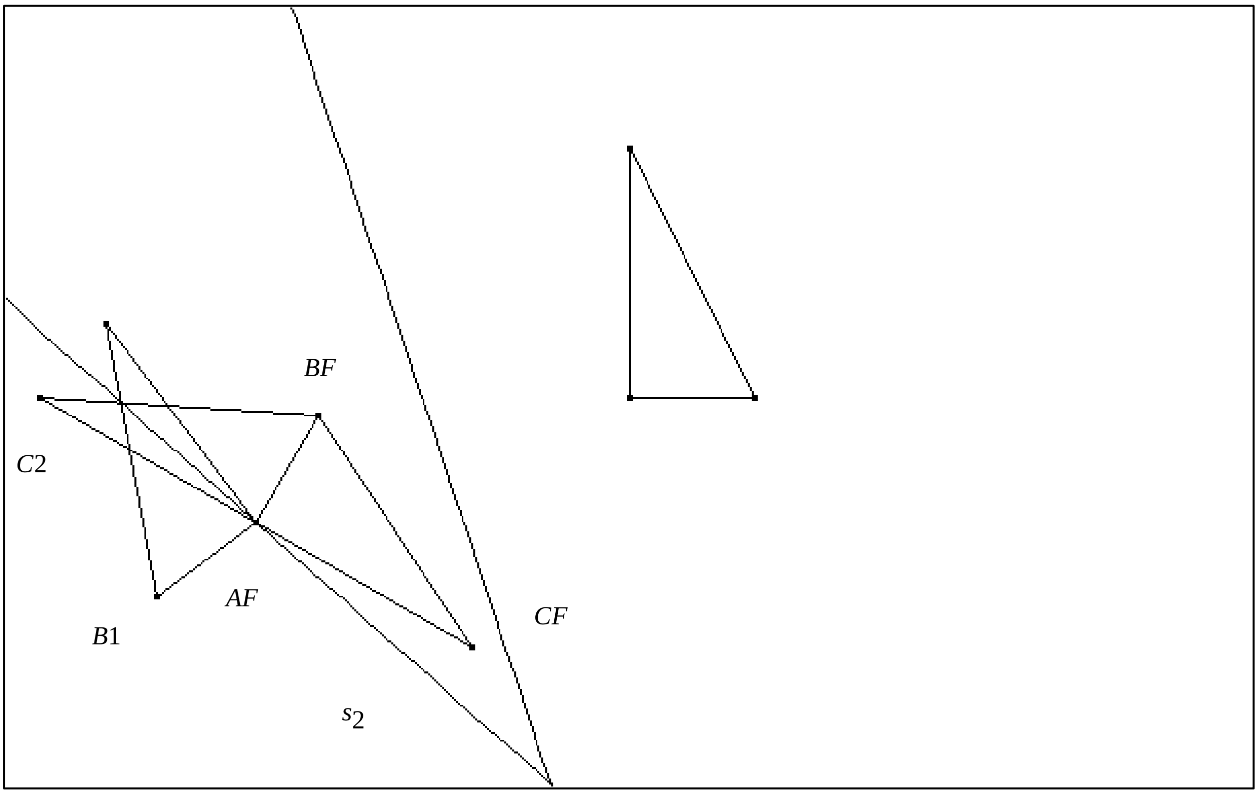
Come al solito sono stati aggiunti al disegno di *DERIVE* alcuni simboli.

Dimostriamo innanzitutto l’esistenza di un’isometria che porti la terna iniziale di punti nella terna finale. Mostriamo che una tale isometria è la composizione di al più tre simmetrie assiali.

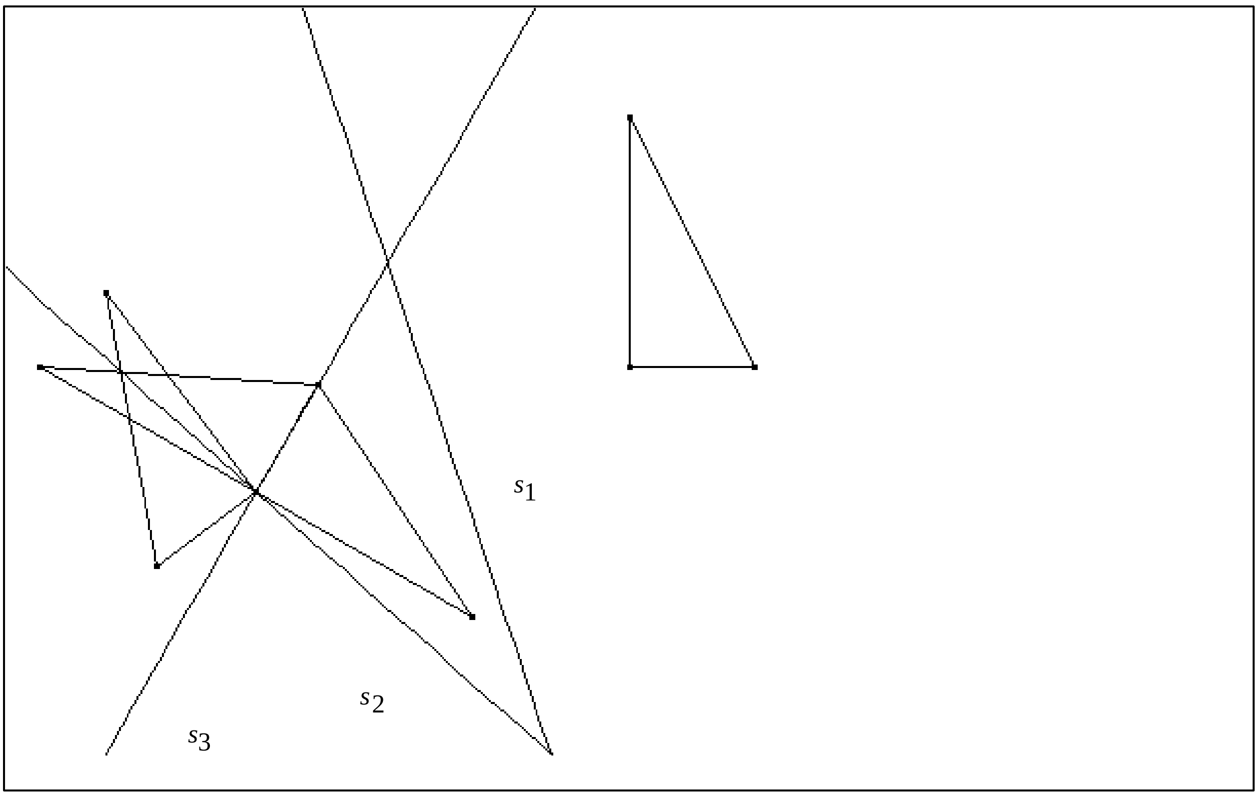
Se $A \neq AF$, consideriamo la simmetria assiale f_1 avente come asse s_1 l'asse del segmento di estremi A e AF. Se $A = AF$, poniamo f_1 uguale alla trasformazione identica. Disegniamo le immagini A_1, B_1 e C_1, attraverso f_1, di A, B e C. Si ha ovviamente $A_1 = AF$.



Se $B_1 \neq BF$, consideriamo la simmetria assiale f_2 avente come asse s_2 l'asse del segmento di estremi B_1 e BF. Se $B_1 = BF$, poniamo f_2 uguale alla trasformazione identica. Disegniamo le immagini A_2, B_2 e C_2, attraverso f_2, di A_1, B_1 e C_1.



Si vede che si ha $A_2 = AF$ e $B_2 = BF$.
Se $C_2 \neq CF$, consideriamo la simmetria assiale f_3 avente come asse s_3 l'asse del segmento di estremi C_2 e CF . Se $C_2 = CF$, poniamo f_3 uguale alla trasformazione identica. Disegniamo le immagini A_3 , B_3 e C_3 , attraverso f_3 , di A_2 , B_2 e C_2.

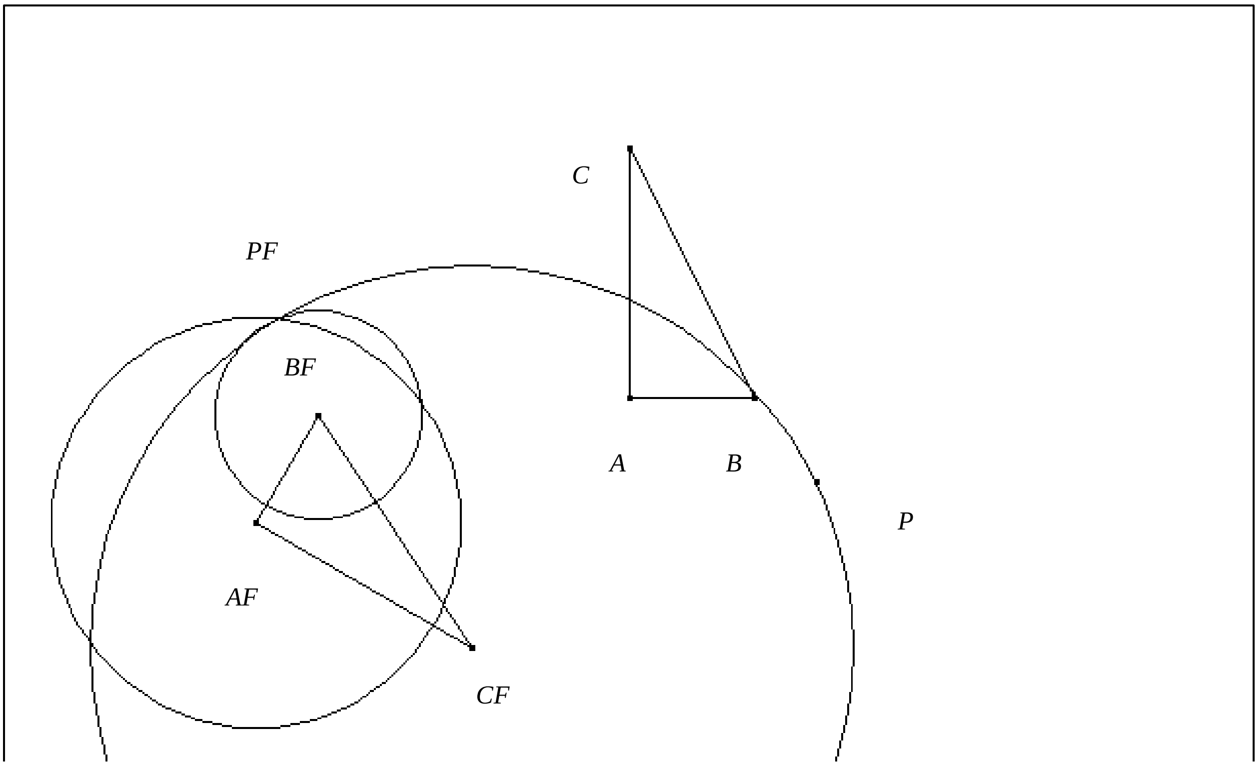


Si vede che si ha $A_3 = AF$, $B_3 = BF$ e $C_3 = CF$.

L’isometria $f_3 \circ f_2 \circ f_1$ verifica pertanto le proprietà richieste.

Analizziamo la “dimostrazione” appena data.
L’uso di un programma di calcolo simbolico ha fatto sì che il disegno sia molto accurato. Senza l’uso del calcolo simbolico gli errori di approssimazione avrebbero reso illeggibile il disegno.
Provare, per credere, ad utilizzare qualcuno dei software didattici dedicati alle trasformazioni geometriche in commercio già da qualche anno.
La precisione del disegno ha però qualche inconveniente.
Ritorniamo alla parte iniziale della nostra dimostrazione. Ad un certo punto abbiamo scritto “Si vede che si ha $A_2 = AF$ e $B_2 = BF$ ”.
In effetti dal disegno “si vede”. Ma è proprio così? Perché, per esempio, $A_2 = AF$?
Lo studente di solito, affascinato dalla precisione del disegno, non si pone questa domanda.
Supponiamo invece di illustrare la dimostrazione facendo un disegno alla lavagna o su un foglio di carta. Ecco che qualunque studente si chiede perché $A_2 = AF$. Si pone il problema di dimostrare che il punto A_2 appartiene all’asse s_2 . Ecco che ora il nostro studente si rende conto che la “dimostrazione” data sopra non è completa. Non basta dire “si vede che”. Deve dimostrarlo. In modo analogo egli si rende conto che deve dimostrare che i punti A_2 e B_2 appartengono all’asse s_3 .

Vogliamo ora dimostrare che esiste una sola isometria verificante le condizioni richieste.
Per far ciò dimostriamo che la conoscenza delle immagini, attraverso un’isometria, dei punti A,B,C implica la conoscenza dell’immagine di un qualsiasi punto P.
Usiamo il nostro file ISOMETRIA per illustrare la dimostrazione di ciò.
Cancelliamo il disegno precedente e disegniamo di nuovo il triangolo iniziale e il triangolo finale. Disegniamo poi un punto P.
Poiché, per definizione, le isometrie conservano le distanze, si ha che l’immagine di P deve appartenere alla circonferenza di centro AF e raggio uguale alla distanza di P da A. Disegniamo questa circonferenza.
Operando sui punti B e C in modo analogo, notiamo che l’immagine di P deve appartenere alle circonferenze di centri BF e CF e raggi uguali alle distanze di P dai punti BF e CF rispettivamente. Disegniamo anche queste due circonferenze.



Deduciamo che l’immagine del punto *P* è necessariamente data dall’unico punto di intersezione *PF* delle tre circonferenze.

Analizzando la dimostrazione appena data, ci rendiamo conto che la precisione del disegno è nello stesso tempo di aiuto e di ostacolo.
Aiuta perché fa “capire” che le tre circonferenze si intersecano in un unico punto. E’ di ostacolo perché molto probabilmente nessuno studente si rende conto che ciò va dimostrato.
Se avessimo infatti fatto il disegno a mano libera, molto probabilmente ogni studente si sarebbe chiesto perché mai la terza circonferenza passi per uno ed un solo dei due punti di intersezione delle prime due circonferenze (e perché mai poi le prime due circonferenze si intersecano in due punti?). Lo studente accorto si rende finalmente conto che l’ipotesi che i punti A,B,C non sono allineati viene sfruttata proprio per dimostrare che le tre circonferenze non possono avere più di un punto di intersezione.

Si impongono le seguenti domande.
Domanda 6. Dal punto di vista didattico è conveniente utilizzare *DERIVE* per illustrare la dimostrazione di questo teorema o in casi analoghi?
Domanda 7. Dal punto di vista didattico è conveniente utilizzare *CABRI* per illustrare la dimostrazione di questo teorema o in casi analoghi?

Chi è interessato all’uso di DERIVE nell’insegnamento della geometria può consultare:
[Accascina, Berneschi, 1998a] e [Accascina, Berneschi, 1998b].

Analizziamo ora i tre file. In essi sono stati volutamente usati solamente i comandi principali di *DERIVE*.
Ciò ha reso i file spesso più lunghi del necessario e poco eleganti.
Si sarebbe potuto operare una scelta diversa. Nel rappresentare i punti, per esempio, si sarebbero potuti usare i vettori. Sarebbe stato quindi utile il comando che permette di estrarre da un vettore una sua componente.
Una scelta di questo genere è stata fatta, per esempio, in [Kutzler, 1995] .
Ci poniamo allora la seguente, ultima, domanda.

DOMANDA 8
Dal punto di vista didattico è preferibile scrivere file “eleganti” che facciano ampio uso delle possibilità offerte dal programma che stiamo utilizzando?

Nel corso di questa chiacchierata ho posto delle domande e, volutamente, alla maggior parte di esse non ho dato alcuna risposta. In effetti la risposta ad alcune di queste domande poste non è univoca. Essa dipende dagli obiettivi che si è posto l'insegnante.
Supponiamo, per esempio, che un insegnante abbia deciso, per qualche ragione (che in ogni caso deve essere a lui ben chiara) di usare un determinato software. La risposta alla domanda 8 sarà di un certo tipo se egli si è posto l'obiettivo di creare degli esperti nell'utilizzo del software in questione, sarà di tipo diverso se egli si è posto l'obiettivo di far capire agli studenti, attraverso l'uso del software, alcuni concetti matematici. I due obiettivi non sono certamente in contrapposizione. E' compito del docente avere ben chiaro quale dei due sia preponderante e in quale proporzione.

Bibliografia

[Accascina, Berneschi, 1998a]
G.Accascina, P.Berneschi, *Introduzione all'uso di DERIVE in geometria*, Quaderni di didattica della matematica, n.2, IRRSAE Lazio, 1998

[Accascina, Berneschi, 1998a]
G.Accascina, P.Berneschi, *Uso di DERIVE per esplorare le trasformazioni geometriche*, Quaderni di didattica della matematica, n.3, IRRSAE Lazio, 1998

[B Kutzler, 1995]
B.Kutzler, *Matematica con il PC, introduzione a DERIVE*, Media Direct, Bassano del Grappa, 1995 (trad. it. di *Introduction to DERIVE*, Soft Warehouse, 1994).