

Esami di stato con Derive¹

Giuseppe Accascina
Dipartimento MeMoMat, Università “La Sapienza” di Roma
Via A.Scarpa, 16
00161 Roma
accascina@dmmm.uniroma1.it

ABSTRACT

Esaminiamo in che misura le strategie di risoluzione di un problema assegnato agli esami da parte di uno studente cui sia permesso l'uso di un sistema di calcolo simbolico si differenziano da quelle usuali.

1. Introduzione

Quali conseguenze avrebbe la decisione di permettere agli studenti l'uso di calcolatori durante la prova scritta di matematica dell'esame di stato?

A questa domanda cerca di rispondere la conferenza “Agli esami con il calcolatore” del sito internet – intranet dell'IRRSAE Lazio: <http://www.irrsae.lazio.it/matematica>.

Nella conferenza vi sono soluzioni svolte con il calcolatore di buona parte dei temi di matematica assegnati all'esame di stato/maturità degli ultimi dieci anni.

Molti di questi sono risolti usando Derive. Per altri sono stati utilizzati Mathematica o Livemath. Per altri ancora è stato usato Cabri. Un esempio di uso di Cabri è descritto in G. Margiotta, *Esami di stato con Cabrijava*, che appare in questi atti.

Nel momento in cui sarà possibile usare agli esami di stato sistemi di calcolo simbolico, molti tipi di quesiti non sarebbero più proponibili (calcolo di limiti, derivate, integrali, ricerca di soluzioni di sistemi di equazioni lineari), altri sarebbero ancora proponibili con alcuni accorgimenti (studio di funzioni il cui grafico può dare adito a letture fuorvianti). Si veda [ACC], [CAP1], [CAP2], [IMP].

Vi sono alcuni tipi di quesiti che sarebbero risolti dallo studente che utilizza un sistema di calcolo simbolico in modo diverso dallo studente che usa i metodi usuali.

2. Un esempio

MATURITA' SCIENTIFICA PNI 1996 -PRIMO QUESITO

In un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy sono assegnati i punti A(2,0) e B(0,4). Sia P (x, y) un punto di detto piano con $x > 0$ ed $y > 0$, e C, D, E, F i punti medi dei lati OA, AP, PB, BO del quadrilatero OAPB. Il candidato:

- dica quali posizioni deve occupare P affinché il quadrilatero OAPB degeneri in un triangolo;
- dimostri che il quadrilatero CDEF è un parallelogramma;
- dica quali posizioni deve occupare P affinché il parallelogramma CDEF sia un rettangolo;
- dica quali posizioni deve occupare P affinché il parallelogramma CDEF sia un rombo;
- dica dove si trova P quando il parallelogramma CDEF è un quadrato e ne determini le coordinate;
- dimostri che l'area del parallelogramma CDEF è metà dell'area del quadrilatero OAPB;
- esprima in funzione dell'ascissa di P il rapporto z tra l'area del quadrato di lato EF e l'area del parallelogramma CDEF, quando P, oltre a rispettare le condizioni inizialmente assegnate, appartiene alla retta di equazione $y = 4 - x$;
- studi la funzione $z(x)$ e ne disegni il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxz.

¹ Pubblicato in Didamatica 2000, Atti (a cura di A.Andronico, G.Casadei, G.Sacerdoti), Vol. 2, pp. 13 - 16

2.1 Le possibili strategie di soluzione degli studenti senza calcolatore.

Innanzitutto lo studente fa il disegno:

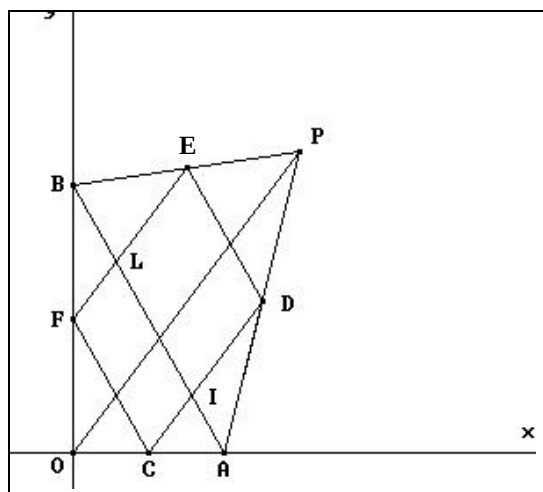


Fig.1 – Uno dei due disegni

Fa poi (speriamo) il disegno nel caso in cui il quadrilatero non sia convesso. Inizia poi a rispondere alle varie domande.

a) Dimostra che il quadrilatero degenera quando il punto P appartiene al segmento caratterizzato dalle condizioni $y = -2x + 4$, con $0 < x < 2$.

b) Per dimostrare che il quadrilatero è un parallelogramma, ne determina le equazioni dei lati e verifica che i lati opposti sono a due a due paralleli.

c) Per determinare in quali casi il parallelogramma è un rettangolo impone che due lati adiacenti siano perpendicolari. Ottiene che il punto P deve appartenere ad una retta che chiamiamo r.

d) Per determinare in quali casi il parallelogramma è un rombo impone che i lati adiacenti siano uguali. Analizzando l'equazione ottenuta si accorge che il punto P deve appartenere ad una circonferenza che chiamiamo Circ.

e) Affinché il parallelogramma sia un quadrato devono essere verificate sia c) che d). Il punto P deve quindi appartenere all'intersezione tra la retta r e la circonferenza Circ. Risolvendo il sistema determinato dalle loro due equazioni ottiene due punti: uno solo di essi appartiene al primo quadrante.

f) Facendo poi un po' di calcoli dimostra l'affermazione richiesta. L'unica difficoltà nasce dal fatto che deve distinguere il caso in cui il quadrilatero OAPB sia convesso dal caso in cui sia concavo.

g) Con qualche calcolo privo di grosse difficoltà determina la funzione desiderata:

$$z(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{x + 4}$$

h) Usando gli usuali metodi studia la funzione appena trovata e si accorge che la curva ha un punto di minimo, un asintoto verticale e uno obliquo.

Le difficoltà incontrate non sono state molte. Ha dovuto ricordarsi, oltre a semplici definizioni di geometria, alcune formule di geometria analitica (punto medio, retta per due punti, distanza tra due punti, condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra due rette), ha dovuto saper risolvere qualche semplice sistema di due equazioni. Per rispondere infine alla domanda h) ha dovuto calcolare qualche derivata.

L'unica vera difficoltà sta nella domanda f): capire che è necessario distinguere due casi.

A parte ciò, le più grosse difficoltà incontrate dallo studente con una preparazione appena sufficiente sono essenzialmente difficoltà di calcolo.

Consideriamo ora uno studente con una buona preparazione.

Un tale tipo di studente cerca innanzitutto la strategia più economica: quella cioè che gli richiede meno calcoli e quindi meno tempo.

Di fronte ad un problema di geometria egli si chiede se usare la geometria sintetica o usare la geometria analitica.

Un tale tipo di studente, forse, avrebbe utilizzato le sue conoscenze di geometria sintetica per rispondere alle domande b) e d).

L'affermazione b) si verifica usando il teorema di Talete. Sempre usando il teorema di Talete ci si accorge che affinché il parallelogramma CDEF sia un rombo si deve avere l'uguaglianza dei segmenti PO e AB. Da cui segue che il punto P deve appartenere alla circonferenza di centro O e raggio AB. Un accorto uso delle proprietà geometriche viste sopra permette poi di evitare molti calcoli per rispondere alla domanda f) (vedere [FOÀ].)

2.2 Le possibili strategie di soluzione degli studenti con calcolatore.

Consideriamo ora uno studente che sia stato abituato ad usare Derive. Egli si presenta all'esame dotato del suo calcolatore in cui è stato installato Derive insieme ai file che il suo professore gli ha fatto creare nel corso degli anni. Possiamo quindi immaginare che egli sia in possesso di uno o più file in cui siano inserite molte formule di geometria analitica quali, per esempio:

$$\text{DistanzaDuePunti}(x1,y1,x2,y2):=\text{SQRT}((x2-x1)^2+(y2-y1)^2)$$

e di formule che determinano il punto medio, l'equazione della retta per due punti e così via.

Uno studente di questo tipo, indipendentemente dal suo grado di preparazione, sicuramente è in grado di rispondere facilmente in poco tempo a tutte le domande fino alla g) compresa.

Anche lo studente con una buona preparazione non ha alcun interesse a risolvere alcuni quesiti per via sintetica.

In questo caso l'uso di Derive è controproducente: spinge lo studente, anche quello ben preparato, ad usare la geometria analitica a scapito della geometria sintetica.

Appare quindi preferibile abituare gli studenti ad usare, oltre che Derive, un programma che privilegia la geometria sintetica come Cabri.

Passiamo ora all'ultima domanda. Si chiede di studiare la funzione:

$$z(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{x + 4}$$

Il suo grafico è subito disegnato da Derive:

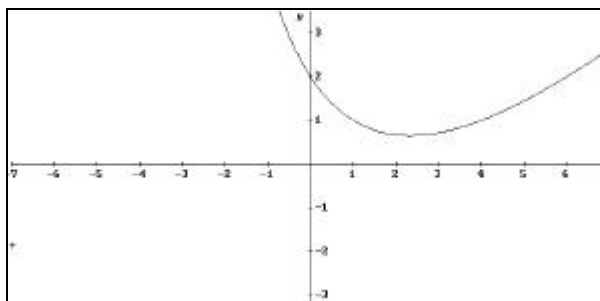


Fig.2 – Il grafico

Anche lo studente con una preparazione appena sufficiente sa che non è bene fidarsi del semplice grafico: il docente che lo ha abituato ad usare Derive lo avrà sicuramente messo in guardia mostrandogli esempi di funzioni il cui grafico può trarre in inganno.

Usa quindi gli usuali metodi per studiare la funzione. In questo è aiutato dal fatto che limiti e derivate sono calcolati immediatamente da Derive.

Ma torniamo allo studente con una buona preparazione.

Molto probabilmente egli cambia la scala nel disegno:

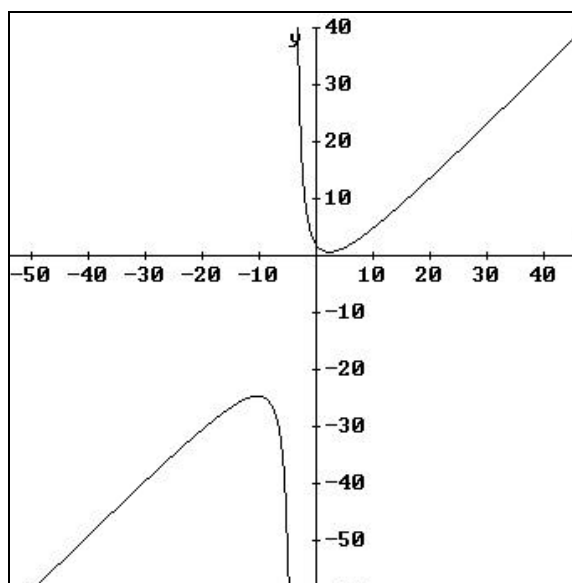


Fig.3 – Il grafico con una differente scala

e congettura che si tratta di un'iperbole. Per verificare la sua congettura egli effettua delle sostituzioni nell'equazione della curva, in modo tale da giungere ad un'equazione del tipo: $z1=k/x1$.

L'equazione della curva non è troppo complicata. Con successive trasformazioni, nel fare le quali le capacità di calcolo di Derive sono di grande aiuto, egli arriva all'equazione:

$$z1 = \frac{40}{x1}$$

Le formule di trasformazione delle coordinate sono:

$$x1 = x + 4, \quad z1 = -x + z + 8$$

La curva è effettivamente un'iperbole. Usando le formule di trasformazione egli arriva ora facilmente alle equazioni dei due asintoti della funzione $z(x)$.

In questo caso l'uso di Derive ha spinto lo studente, almeno quello ben preparato, a fare un buon uso delle sue conoscenze e ad avere maggiori informazioni sulla funzione studiata.

Naturalmente occorre che tutto questo sia almeno implicitamente suggerito nel testo della prova.

Ciò permetterebbe al docente di giudicare lo studente su capacità di livello più alto delle semplici capacità di calcolo ad esempio quella di saper collegare concetti appresi in ambiti e tempi diversi.

Bibliografia

[ACC] G.Accascina *Agli esami con il calcolatore*, in "Matematica e Software didattico, II", Atti del seminario residenziale di Latina 1999, Irrsae Lazio (in preparazione)

[CAP1] S.Cappuccio *Il CAS in classe: il problema della valutazione*, in Atti del 1° Convegno Internazionale "L'insegnamento della Matematica delle Scienze Sperimentali con le Calcolatrici Grafiche e Simboliche, ADT, 1999, pag. 211 – 221

[CAP2] S.Cappuccio *I Computer Algebra System nella valutazione*, in "Matematica e Software didattico, II", Atti del seminario residenziale di Latina 1999, Irrsae Lazio (in preparazione)

[FOÀ] D.Foà *Il teorema di matematica per la maturità scientifica sperimentale*, Archimede, 1996, pag. 61 - 71

[IMP] M.Impedovo *Cinque ore sono troppe*, Ipotesi, n.1/1999, pag. 11 - 15