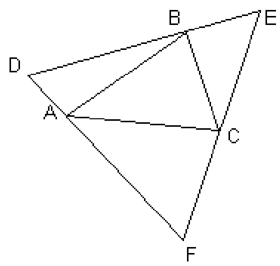
# Alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri (Parte prima)

**Giuseppe Accascina**
**Giovanni Margiotta**

**Riassunto** Proponiamo l'uso di *Cabri* in un'attività di Problem Posing e Problem Solving. Con questa attività gli studenti dovrebbero essere in grado di scoprire autonomamente (con un piccolo aiuto dei loro insegnanti) alcune proprietà dei triangoli quali le proprietà delle circonferenze di Fermat, il teorema di Napoleone e la costruzione di un triangolo DEF "circoscritto" ad un triangolo ABC assegnato.




**Abstract** We propose the use of *Cabri* in a Problem Posing and Problem Solving activity which should make the students able to find themselves (with a little help from their teacher) some properties of the triangles such as the properties of the Fermat Circles, the Napoleon Theorem and the construction of an equilateral triangle DEF which is "circumscribed" about a given triangle ABC.

**Giuseppe Accascina**
Dipartimento Metodi e Modelli Matematici
Università " La Sapienza" di Roma
e-mail: accascina@dmmm.uniroma1.it

**Giovanni Margiotta**
L. S. "Francesco d'Assisi" di Roma
Istituto Regionale Ricerca Educativa del Lazio
e-mail: margiotta@irrsae.lazio.it

*"Sogno una riforma che chieda poche cose e insista invece sullo sviluppo della creatività, che insegni ai ragazzi a scoprire da soli i concetti, ad avere fiducia nelle proprie capacità e a muovere la fantasia. Se poi non sanno fare le equazioni di secondo grado, pazienza: non servono niente."*

Gabriele Lolli

Il Venerdì di "Repubblica", 16 aprile 2002

La matematica non lascia indifferenti: o è amata o è odiata.

La geometria, in particolare, suscita sentimenti ancora più netti: o è molto amata o è molto odiata.

Alcuni la amano molto: quando svolgono problemi di geometria si sentono liberi. Liberi di trovare dimostrazioni, di sperimentare. Altri invece la odiano molto: si sentono schiavi. Costretti a disegnare le figure proprio nello stesso modo in cui sono disegnate nel libro o dall'insegnante. Costretti ad assegnare ai vari enti geometrici proprio gli stessi nomi ("il punto in alto a destra è chiamato A e quindi anch'io lo devo chiamare A"). Costretti a svolgere la stessa identica dimostrazione loro insegnata. Costretti, in poche parole, ad imparare a memoria definizioni, teoremi, con le loro ipotesi, tesi e dimostrazioni. Costoro si sentono infine defraudati, imbrogliati quando l'insegnante chiede loro di illustrare un teorema con una figura un po' differente da quella memorizzata con tanta difficoltà. Quando poi l'insegnante chiede "Ma perché fai questo passaggio?" hanno reazioni (di solito non espresse esplicitamente) del tipo: "Perché? Dove ho sbagliato? Non mi ricordo." oppure "Sto ripetendo tutto senza fare alcun errore. L'insegnante sbaglia."

Qui proponiamo un'attività di esplorazione della geometria che si avvale delle facilitazioni offerte da alcuni software didattici, in particolar modo *Cabri*. La speranza è che con attività di questo tipo chi ama la geometria continui ad amarla e chi la odia si faccia almeno coinvolgere dall'attività di esplorazione.

Inizieremo con argomenti molto semplici e finiremo con l'analizzare proprietà geometriche che, sebbene siano ben note, non sono di solito insegnate.

E' nostro intendimento mostrare gli argomenti in modo molto graduale affinché gli stessi studenti scoprano, eventualmente guidati, le proprietà.

Abbiamo suddiviso il lavoro in singole schede, che iniziano con lo sviluppo del problema assegnato nella scheda precedente e terminano con l'assegnazione di un nuovo problema. Abbiamo inserito nelle note i commenti didattici riservati al docente.

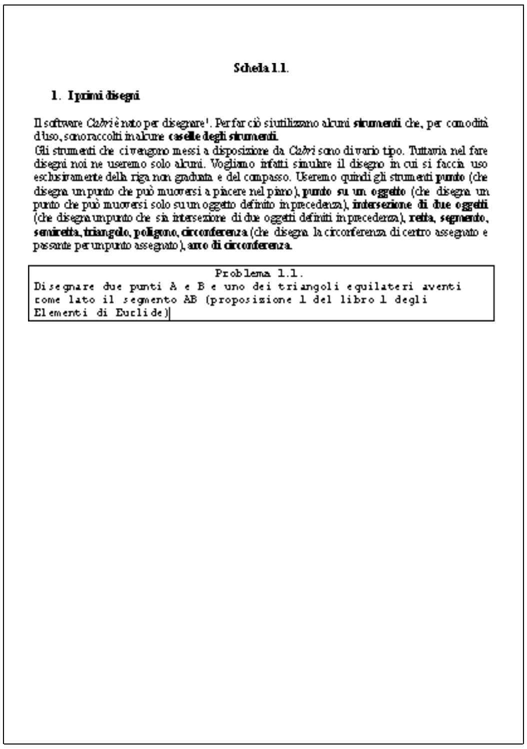
Dai siti:

http://www.irrsae.lazio.it/matema/software/cabri/cabri.html

http://www.dmmm.uniroma1.it/persone/accascina.php

si possono scaricare le schede fornibili direttamente agli studenti e i file di tutte le figure.

La figura seguente mostra a prima e la seconda scheda, di cui si vuole indicare la struttura. Il testo di queste due schede è quello più avanti riportato nel presente articolo.

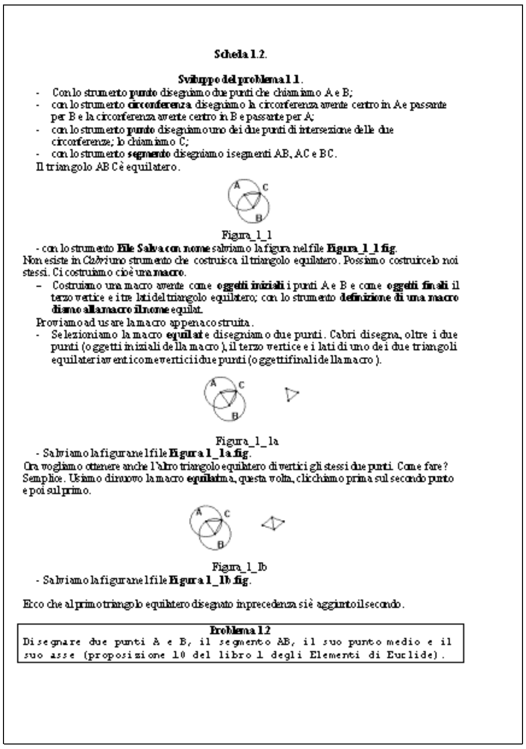


**Schela 1.1.**

**1. I primi disegni**

Il software *Cabri* è nato per disegnare[1]. Per far ciò si utilizzano alcuni **strumenti** che, per comodità d'uso, sono raccolti in alcune **caselle degli strumenti**.
Gli strumenti che ci vengono messi a disposizione da *Cabri* sono di vario tipo. Tuttavia nel fare disegni noi ne useremo solo alcuni. Vogliamo infatti simulare il disegno in cui si faccia uso esclusivamente della riga non graduata e del compasso. Useremo quindi gli strumenti **punto** (che disegna un punto che può muoversi a piacere nel piano), **punto su un oggetto** (che disegna un punto che può muoversi solo su un oggetto definito in precedenza), **intersezione di due oggetti** (che disegna un punto che sia intersezione di due oggetti definiti in precedenza), **retta, segmento, semiretta, triangolo, poligono, circonferenza** (che disegna la circonferenza di centro assegnato e passante per un punto assegnato), **arco di circonferenza**.

| Problema 1.1. |
|---|
| Disegnare due punti A e B e uno dei triangoli equilateri aventi come lato il segmento AB (proposizione 1 del libro 1 degli Elementi di Euclide) |



**Schela 1.2.**

**Sviluppo del problema 1.1.**

- Con lo strumento **punto** disegniamo due punti che chiamiamo A e B;
- con lo strumento **circonferenza** disegniamo la circonferenza avente centro in A e passante per B e la circonferenza avente centro in B e passante per A;
- con lo strumento **punto** disegniamo uno dei due punti di intersezione delle due circonferenze; lo chiamiamo C;
- con lo strumento **segmento** disegniamo i segmenti AB, AC e BC.

Il triangolo ABC è equilatero.

Figura_1_1

- con lo strumento **File Salva con nome** salviamo la figura nel file **Figura_1_1.fig**.

Non esiste in *Cabri* uno strumento che costruisca il triangolo equilatero. Possiamo costruircelo noi stessi. Ci costruiamo cioè una **macro**.

- Costruiamo una macro avente come **oggetti iniziali** i punti A e B e come **oggetti finali** il terzo vertice e i tre lati del triangolo equilatero; con lo strumento **definizione di una macro diamo alla macro il nome** equilat.

Proviamo ad usare la macro appena costruita.

- Selezioniamo la macro **equilat** e disegniamo due punti. Cabri disegna, oltre i due punti (oggetti iniziali della macro), il terzo vertice e i lati di uno dei due triangoli equilateri aventi come vertici i due punti (oggetti finali della macro).

Figura_1_1a

- Salviamo la figura nel file **Figura1_1a.fig**.

Ora vogliamo ottenere anche l'altro triangolo equilatero di vertici gli stessi due punti. Come fare? Semplice. Usiamo di nuovo la macro **equilat** ma, questa volta, clicchiamo prima sul secondo punto e poi sul primo.

Figura_1_1b

- Salviamo la figura nel file **Figura1_1b.fig**.

Ecco che al primo triangolo equilatero disegnato in precedenza si è aggiunto il secondo.

| Problema 1.2 |
|---|
| Disegnare due punti A e B, il segmento AB, il suo punto medio e il suo asse (proposizione 10 del libro 1 degli Elementi di Euclide). |

## 1. I primi disegni

Il software *Cabri* è nato per disegnare[1]. Per far ciò si utilizzano alcuni **strumenti** che, per comodità d'uso, sono raccolti in alcune **caselle degli strumenti.**

Gli strumenti che ci vengono messi a disposizione da *Cabri* sono di vario tipo. Tuttavia nel fare disegni noi ne useremo solo alcuni. Vogliamo infatti simulare il disegno in cui si faccia uso esclusivamente della riga non graduata e del compasso.

Useremo quindi gli strumenti **Punto** (che disegna un punto che può muoversi a piacere nel piano), **Punto su un oggetto** (che disegna un punto che può muoversi solo su un oggetto definito in precedenza), **Intersezione di due oggetti** (che disegna un punto che sia intersezione di due oggetti definiti in precedenza), **Retta**, **Segmento**, **Semiretta**, **Triangolo**, **Poligono**, **Circonferenza** (che disegna la circonferenza di centro assegnato e passante per un punto assegnato), **Arco di circonferenza** (che disegna l'arco di circonferenza delimitato da due punti e passante per un terzo punto).

**Problema 1.1**

Disegnare due punti A e B e uno dei triangoli equilateri aventi come lato il segmento AB (proposizione 1 del libro 1 degli Elementi di Euclide)

- Con lo strumento **Punto** disegniamo due punti che chiamiamo A e B;
- con lo strumento **Circonferenza** disegniamo la circonferenza avente centro in A e passante per B e la circonferenza avente centro in B e passante per A;
- con lo strumento **Punto** disegniamo uno dei due punti di intersezione delle due circonferenze; lo chiamiamo C;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti AB, AC e BC.
  Il triangolo ABC è equilatero.

---

[1] Scrive Mario Barra in *Coordinate ternarie, "ennarie" e coordinate proiettive omogenee*, Progetto Alice, n. 4 (2001) pp. 3 - 24 "Conosco l'ideatore di *Cabri*, Jean Marie Laborde, che mi ha detto che il programma, prima di divenire uno strumento importante per l'insegnamento della geometria, è nato per eseguire disegni".

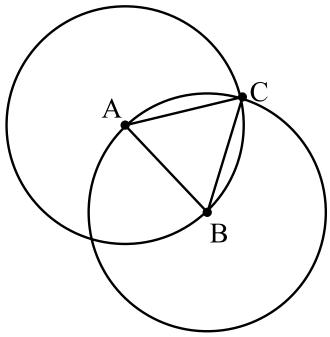



Figura_1_1

– Salviamo la figura nel file **Figura_1_1.fig**.

Non esiste in *Cabri* uno strumento che costruisca il triangolo equilatero. Possiamo costruircelo noi stessi. Ci costruiamo cioè una **macro**.

– Costruiamo una macro avente come **Oggetti iniziali** i punti A e B e come **Oggetti finali** il terzo vertice e i tre lati del triangolo equilatero; con lo strumento **Definizione di una macro** diamo alla macro il nome **Equilat.**
  Proviamo ad usare la macro appena costruita.
– Selezioniamo la macro **Equilat** e disegniamo due punti. *Cabri* disegna, oltre i due punti (oggetti iniziali della macro), il terzo vertice e i lati di uno dei due triangoli equilateri aventi come vertici i due punti (oggetti finali della macro).

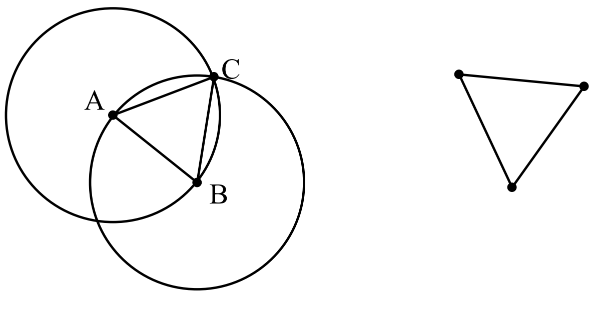



Figura_1_1_a

– Salviamo la figura nel file **Figura_1_1a.fig**.

Ora vogliamo ottenere anche l'altro triangolo equilatero di vertici gli stessi due punti. Come fare? Semplice. Usiamo di nuovo la macro **Equilat** ma, questa volta, clicchiamo prima sul secondo punto e poi sul primo.

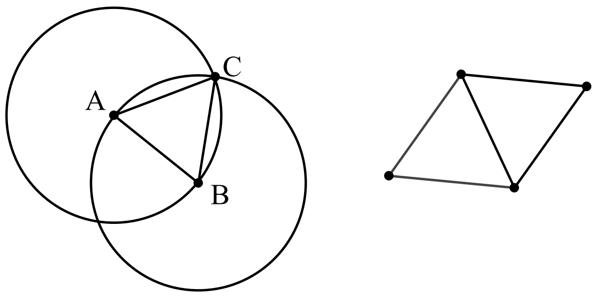



Figura_1_1b

Ecco che al primo triangolo equilatero disegnato in precedenza si è aggiunto il secondo.
– Salviamo la figura nel file **Figura_1_1b.fig**.

**Problema 1.2**

`Disegnare due punti A e B, il segmento AB, il suo punto medio e il suo asse (proposizione 10 del libro 1 degli Elementi di Euclide).`

– Con lo strumento **Punto** disegniamo due punti A e B distinti;
– con lo strumento **Segmento** disegniamo il segmento di estremi A e B;
– con la macro **Equilat** disegniamo uno dei due triangoli equilateri aventi come vertici i punti A e B; chiamiamo C il terzo vertice del triangolo;
– con la macro **Equilat** disegniamo l'altro triangolo equilatero avente come vertici i punti A e B; chiamiamo C' il terzo vertice del triangolo;
– con lo strumento **Retta** disegniamo la retta passante per C e C'; la chiamiamo r;
– con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto di in-

tersezione della retta passante per A e B con la retta r; lo chiamiamo M.

La retta r e il punto M sono rispettivamente asse e punto medio del segmento AB.

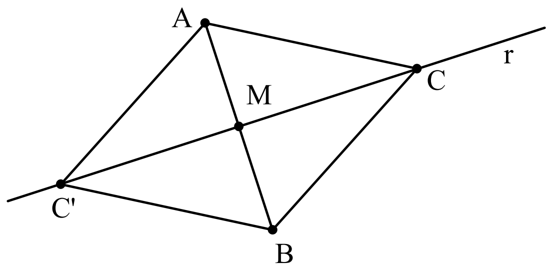



Figura_1_2

– Salviamo la figura nel file **Figura 1_2.fig**.

La costruzione appena fatta è proprio quella descritta da Euclide negli Elementi. Essa fa uso della macro **Equilat**. Quest'ultima in effetti fa uso della circonferenza di centro A passante per B e della circonferenza di centro B passante per A. I punti C e C' sono i punti di intersezione delle due circonferenze. Non è quindi necessario disegnare i due triangoli equilateri.

Ecco questa costruzione:

– con lo strumento **Punto** disegniamo i punti A e B distinti;
– con lo strumento **Segmento** disegniamo il segmento di estremi A e B;
– con lo strumento **Circonferenza** disegniamo la circonferenza di centro A passante per B e la circonferenza di centro B passante per A;
– con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo i punti di intersezione delle due circonferenze; li chiamiamo C e C';
– con lo strumento **Retta** disegniamo la retta passante per C e C'; la chiamiamo r;
– con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto di intersezione della retta passante per A e B con la retta r; lo chiamiamo M.

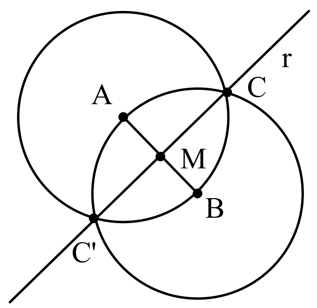



Figura_1_2a

– Salviamo la figura nel file **Figura_1_2a.fig**.

In effetti in *Cabri* esiste già lo strumento **Asse** che costruisce direttamente l'asse di un segmento di estremi assegnati. Dal momento che abbiamo visto che l'asse di un segmento può essere ottenuto con riga e compasso d'ora in poi useremo anche lo strumento **Asse**.

**Problema 1.3**

Disegnare un punto A, una retta r e la retta passante per A perpendicolare a r (proposizioni 11 e 12 del libro 1 degli Elementi di Euclide).

Analizziamo prima il caso in cui il punto A appartenga alla retta r.

- Con lo strumento **Punto** disegniamo un punto A;
- con lo strumento **Retta** disegniamo una retta passante per A; la chiamiamo r;
- con lo strumento **Circonferenza** disegniamo una circonferenza di centro il punto A;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo i punti di intersezione della circonferenza con la retta r; li chiamiamo B e C;
- con lo strumento **Asse** disegniamo l'asse del segmento BC.

Quest' ultima retta è perpendicolare alla retta r e passa per A.

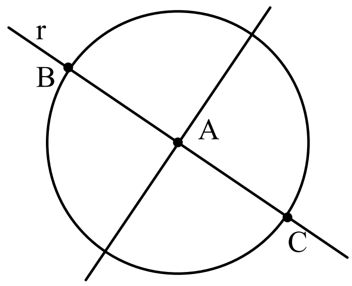



Figura_1_3

– Salviamo la figura nel file **Figura_1_3.fig**.

Analizziamo ora il caso in cui il punto A non appartenga alla retta r.

– Con lo strumento **Punto** disegniamo un punto A;
– con lo strumento **Retta** disegniamo una retta r non passante per A;
– con lo strumento **Circonferenza** disegniamo una circonferenza di centro il punto A intersecante la retta r;
– con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo i punti B e C di intersezione della circonferenza con la retta r;
– con lo strumento **Asse** disegniamo l'asse del segmento di estremi B e C.
  Quest' ultima retta è perpendicolare alla retta r e passa per A.

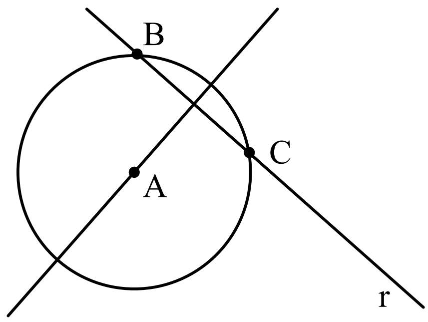



Figura_1_3a

– Salviamo la figura nel file **Figura_1_3a.fig**.

Notiamo che la costruzione è identica a quella data nel caso in cui il punto A appartenga alla retta r. Abbiamo dovuto però scegliere una circonferenza di centro A intersecante la retta r. Notiamo come si comporta *Cabri* se la circonferenza non interseca la retta r.

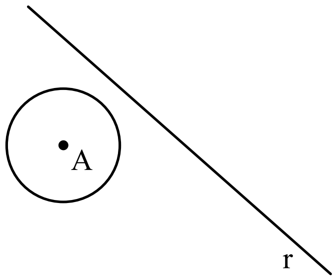



Figura 1_3b

La retta cercata non viene disegnata.

In *Cabri* esiste lo strumento **Retta perpendicolare** che costruisce la retta perpendicolare ad una retta r assegnata passante per un punto A, non necessariamente appartenente alla retta r. D'ora in poi useremo questo strumento.

**Problema 1.4**

Disegnare un triangolo ABC e la circonferenza ad esso circoscritta (proposizione 5 del quarto libro degli Elementi di Euclide).

- Con lo strumento **Triangolo** disegniamo un triangolo ABC;
- con lo strumento **Asse** disegniamo l'asse del segmento AB e l'asse del segmento AC;
- con lo strumento **Punto** disegniamo il punto D di intersezione dei due assi:
- con il comando **Circonferenza** disegniamo la circonferenza di centro D e passante per A.

La circonferenza ottenuta è la circonferenza cercata.

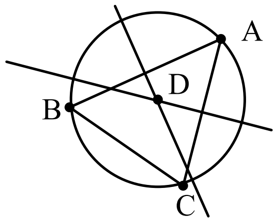



Figura_1_4

Non esiste in *Cabri* lo strumento circonferenza circoscritta. Ne costruiamo pertanto una macro.

- Creiamo una macro di nome **Circ_Circ** avente come **Oggetti iniziali** tre punti e come **Oggetti finali** la circonferenza passante per essi e il suo centro.
- Salviamo la figura nel file **Figura_1_4.fig**.

Nella nostra costruzione la circonferenza circoscritta ad un triangolo di vertici A, B e C ha come centro il punto D di intersezione degli assi dei lati AB e AC e passa per A.

La circonferenza ottenuta, oltre a passare ovviamente per A, sembra passare anche per i punti B e C. Ma siamo sicuri che ciò avvenga effettivamente?[2]

Ci poniamo anche la seguente domanda:

Dati tre punti, esiste sempre una circonferenza passante per essi?

Spostiamo pian piano il punto C fino a farlo appartenere alla retta passante per A e B. Otteniamo la figura riportata a pagina seguente.

---

2 **Commenti didattici.** Purtroppo di solito gli studenti non si pongono questa domanda. Credono ciecamente al disegno. Sarà cura del docente far capire agli studenti che è necessario dare una dimostrazione. Può essere didatticamente efficace disegnare, oltre agli assi dei segmenti AB e AC, anche l'asse del segmento BC e notare che nel disegno esso pare passare per il punto di intersezione degli altri due assi. Nasce il problema di far capire agli studenti che il fatto che *Cabri* mostra che i tre assi si intersecano in un punto non costituisce affatto una dimostrazione.

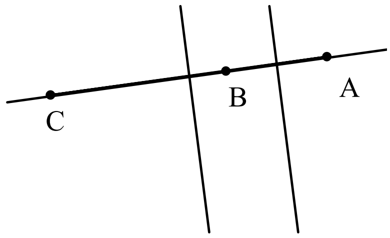



Figura_1_4a

La figura, nel caso in cui i punti A, B e C sono allineati, non mostra alcuna circonferenza passante per essi[3].

**Problema 1.5**

Disegnare due punti A e B,uno dei triangoli equilateri aventi come vertici i punti A e B, la circonferenza ad esso circoscritta e il suo centro.

Abbiamo a disposizione le macro **Equilat** e **Circ_Circ**. Utilizziamole.

– Con lo strumento **Punto** disegniamo due punti A e B;
– con la macro **Equilat** disegniamo uno dei due triangoli equilateri di vertici A e B; indichiamo con C il terzo vertice;
– con la macro **Circ_Circ** disegniamo la circonferenza circoscritta al triangolo ABC;
– con lo strumento **Macro** costruiamo una macro, che chiamiamo **Equilat_Circ_Circ**, avente come **Oggetti iniziali** i punti A e B e come **Oggetti finali** il triangolo equilatero ABC, la circonferenza ad esso circoscritta e il suo centro.

Proviamo la macro appena costruita.

– Selezioniamo la macro **Equilat_Circ_Circ**, disegniamo due punti;

oltre ad essi, vengono disegnati uno dei due triangoli aventi come vertici i due punti, la circonferenza ad esso circoscritta e il suo centro.

[3] **Commenti didattici.** Sarà cura del docente darne una spiegazione o, meglio, chiedere agli studenti di darne una.

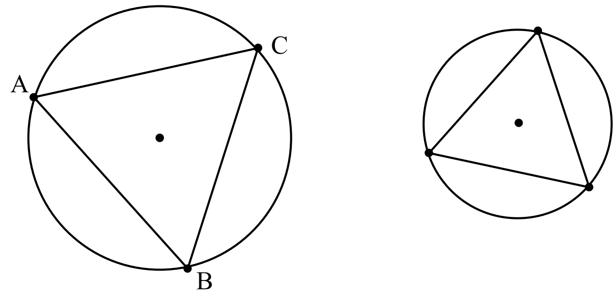



Figura_1_5

– Salviamo la figura sul file **Figura_1_5.fig**.

## 2. Le prime esplorazioni

Abbiamo fino ad ora usato *Cabri* come strumento per far disegni utilizzando solo strumenti che simulano l'uso della riga non graduata e del compasso.

Vogliamo ora esplorare le proprietà delle figure che costruiamo usando tutti gli strumenti che ci mette a disposizione *Cabri*, non solo quelli che simulano l'uso della riga e del compasso.

**Problema 2.1**

Disegnare due punti A e B, un triangolo equilatero di vertici A e B, la circonferenza c ad esso circoscritta, il suo centro O, un punto P sulla circonferenza c e i segmenti AP e BP.

Cosa possiamo dire sull'ampiezza dell'angolo APB?

– Con lo strumento **Punto** disegniamo i punti A e B;
– con la macro **Equilat_Circ_Circ** disegniamo un triangolo equilatero di vertici A e B, la circonferenza ad esso circoscritta e il suo centro. Chiamiamo C il terzo vertice del triangolo equilatero, c la circonferenza ad esso circoscritta e O il suo centro.

Vogliamo mettere in evidenza l'uguaglianza dei tre angoli del triangolo equilatero ABC:

– con lo strumento **Segna un angolo** poniamo lo stesso simbolo per i tre angoli del triangolo equilatero.

Ora disegniamo il punto P e i segmenti PA e PB:

- con lo strumento **Punto su un oggetto** disegniamo un punto P sulla circonferenza c;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti PA e PB.

Vogliamo mettere in evidenza l'angolo APB e determinarne l'ampiezza:

- con lo strumento **Segna un angolo** poniamo un simbolo differente dal precedente sull'angolo APB;
- con lo strumento **Misura dell' angolo** misuriamo l'angolo APB.

Notiamo che l'angolo APB misura 120°.

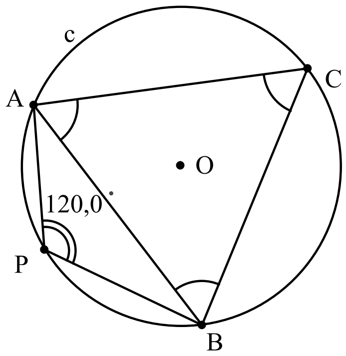



Figura_2_1

- Salviamo la figura nel file **Figura_2_1.fig**.

Muovendo il punto P sulla circonferenza notiamo che la misura dell'angolo APB è anche uguale a 60°.

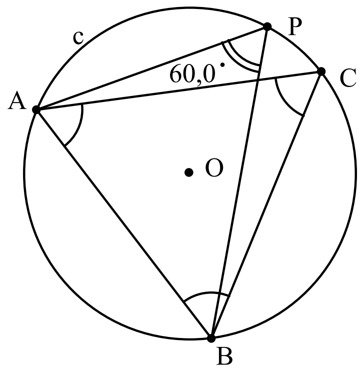



Figura_2_1a

- Salviamo la figura nel file **Figura_2_1.fig**.

Formuliamo la seguente:

**Congettura 2.2.** *Dato un triangolo equilatero ABC, e dato un punto P sulla circonferenza ad esso circoscritta, si ha che l'angolo APB misura 120° o 60°.*

Ciò va dimostrato o confutato[4].

**Problema 2.2**

`Dimostrare o confutare la congettura precedente.`

Notiamo che, se P appartiene all'arco di circonferenza AB contenente il punto C (figura 2.1a), si ha che l'angolo APB e l'angolo ACB sono angoli alla circonferenza che insistono sulla stesso arco. D'altronde per costruzione l'angolo ACB misura 60°, quindi APB misura 60°.

Se invece il punto P appartiene all'arco di circonferenza AB non contenente il punto C (figura 2.1), allora gli angoli APB e ACB sono supplementari e quindi APB misura 120°.

Abbiamo dimostrato il seguente

**Teorema 2.2.** *Dato un triangolo equilatero AB, e dato un punto P sulla circonferenza ad esso circoscritta, si ha che:*

- *se P appartiene all'arco di circonferenza AB contenente il punto C, l'angolo APB misura 60°;*
- *se P appartiene all'arco di circonferenza AB non contenente il punto C, l'angolo APB misura 120°.*

---

4 **Commenti didattici.** Ci troviamo di fronte allo stesso problema didattico incontrato già in occasione dell'esplorazione della circonferenza circoscritta. Dobbiamo convincere gli studenti che è necessario dimostrare ciò che *Cabri* ci mostra. In altre parole dobbiamo convincere gli studenti che *Cabri* ci ha permesso solo di fare una congettura, non di dimostrare un teorema. Perché la congettura si trasformi in un teorema è necessario fornirne una dimostrazione.

**Problema 2.3**

Modificare la **Figura_2_1** imponendo al punto P di appartenere, anziché a tutta la circonferenza c, all'arco della circonferenza c delimitato da A e B non contenente il punto C.
Cosa possiamo dire sugli angoli formati dalla diagonale AB del quadrilatero APBC con i lati del quadrilatero?
Disegnare la diagonale PC del quadrilatero APBC.
Cosa possiamo dire sugli angoli formati dalla diagonale PC del quadrilatero APBC con i lati del quadrilatero?

- Usiamo la **Figura_2_1**.
- Poniamo il **Puntatore** sul punto P e lo cancelliamo; oltre al punto P vengono cancellati i segmenti PA e PB.

Vogliamo scegliere il punto P sull'arco di estremi A e B non contenente il punto C. Per far ciò dobbiamo usare lo strumento **Arco di circonferenza**. L'uso di questo strumento contempla la scelta degli estremi dell'arco e di un punto interno all'arco.

Nel nostro caso è quindi necessario scegliere un punto appartenente all'arco di estremi A e B non contenente C. Tale scelta deve essere fatta in modo tale che il punto scelto continui ad essere interno all'arco quando si spostano i punti A e B. Ci sono tanti metodi per far ciò. Eccone uno. Notiamo che il simmetrico del punto C rispetto ad O, centro della circonferenza circoscritta, appartiene all'arco desiderato.
Pertanto:

- con lo strumento **Simmetria centrale**[5] disegniamo il punto simmetrico del punto C rispetto ad O; chiamiamolo D;
- con lo strumento **Arco di circonferenza** disegniamo l'arco di estremi A e B passante per D;
- con lo strumento **Punto su un oggetto** disegniamo un punto sull'arco AB passante per D, che chiamiamo P;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti PA e PB.

Se ora muoviamo il punto P ci accorgiamo che esso è vincolato a muo-

[5] **Commenti didattici**. Prima di usare lo strumento Simmetria centrale è opportuno chiedere agli studenti di costruire con riga e compasso il simmetrico di un punto rispetto a un punto.

versi sull'arco desiderato.
Il punto D ci è servito solamente per definire l'arco AB non contenente C: ci conviene quindi nasconderlo.

– Con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo il punto D.

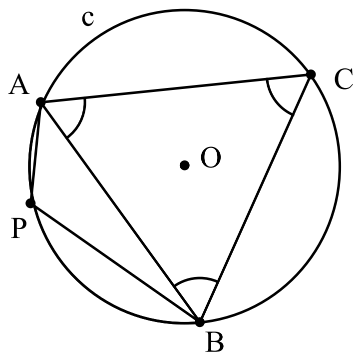



Figura_2_3

– Salviamo la figura nel file **Figura_2_3.fig**.

La diagonale AB forma con i lati del quadrilatero APBC gli angoli BAC e ABC, che misurano 60°, e gli angoli BAP e ABP, che hanno misura variabile al variare del punto P.
Consideriamo ora l'altra diagonale del quadrilatero:

– con lo strumento **Segmento** disegniamo il segmento PC.

Vediamo come la diagonale PC divide gli angoli ACB e BPA che sappiamo essere uguali rispettivamente a 60° e a 120°.

Il segno dell'angolo ACB ci dà fastidio: lo nascondiamo:

– con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo il segno dell'angolo ACB.

Gli angoli BPC e CPA misurano 60°. Pertanto:

– con lo strumento **Segna un angolo** indichiamo gli angoli BPC e CPA con lo stesso segno usato per gli angoli del triangolo ABC.

La diagonale PC è quindi bisettrice dell'angolo APB.

Essa non è però bisettrice dell'angolo ACB. Infatti, mentre il punto P si muove da A a B, la misura dell'angolo ACP cresce da 0° a 60°. La misura dell'angolo BCP invece nel frattempo descresce da 60° a 0°. Pertanto:

– con lo strumento **Segna un angolo** indichiamo l'angolo ACP con un simbolo diverso da quello usato fino ad ora e l'angolo BCP con un altro simbolo ancora.

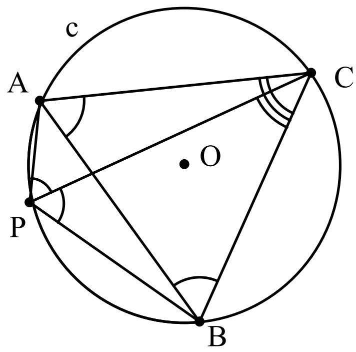



Figura 2_3a

– Salviamo la figura nel file **Figura_2_3a.fig**.

Notiamo infine che gli angoli ACP e BCP sono uguali se e solo se il punto P coincide con il punto D simmetrico di C rispetto ad O.

Abbiamo dimostrato il seguente:

**Teorema 2.3.** *Sia dato un triangolo equilatero ABC, la sua circonferenza circoscritta c e il suo centro O. Sia P un punto dell'arco di circonferenza AB non contenente C. Allora la diagonale CP del quadrilatero APBC è bisettrice dell'angolo APB ed è bisettrice dell'angolo ACB se e solo se il punto P coincide con il punto D (simmetrico di C rispetto ad O).*

Vogliamo esaminare il caso particolare in cui PA è uguale a PB e quindi P coincide con D.

**Problema 2.4**

Nella figura 2_3a sostituire il punto P con il punto D simmetrico di C rispetto a O.
Disegnare il quadrilatero ADBC e le sue diagonali.
Disegnare i segmenti AO e OB. Cosa si può dire sui triangoli AOD e BOD?
Cosa si può dire sulle distanze del punto D dai vertici A, B e C?

- Usiamo la **Figura_2_3a**;
- poniamo il **Puntatore** sul punto P e lo cancelliamo;
- con lo strumento **Mostra/Nascondi** mostriamo il punto D;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti DA, DB e DC;
- Con lo strumento **Segna un angolo** indichiamo gli angoli ADC e BDC con il simbolo usato per gli angoli di misura uguale a 60°;
- con lo strumento **Segna un angolo** indichiamo gli angoli ACD e BCD con un simbolo differente da quello usato in precedenza;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti AO e BO.

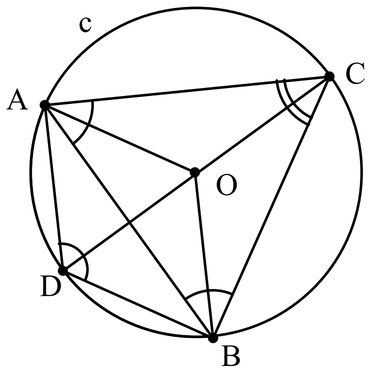



Figura_ 2_4

- Salviamo la figura nel file **Figura_2_4.fig**.

Dalla figura appare che i triangoli AOD e BOD sono equilateri.
Ciò si dimostra facilmente.
Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:

**Teorema 2. 4**. *Dato un triangolo equilatero ABC, sia c la circonferenza ad esso circoscritta, O il suo centro e D il punto simmetrico di C rispetto a O. Allora i triangoli AOD e BOD sono equilateri.*

Dal teorema precedente segue immediatamente che i triangoli ABD e ACO sono uguali e quindi

$$DC = DO + OC = DA + DB.$$

Abbiamo dimostrato il seguente:

**Teorema 2.4a.** *Dato un triangolo equilatero* ABC*, sia c la circonferenza circoscritta ad esso,* O *il suo centro e* D *il punto di c simmetrico di* C *rispetto ad* O*. Si ha* DC = DA + DB.

| **Problema 2.5** |
|---|
| Il teorema 2.4a si generalizza al caso in cui il punto D sia sostituito da un qualsiasi punto appartenente all'arco della circonferenza c delimitato da A e B non passante per C? |

Torniamo al caso generale in cui il punto P varia sull'arco AB non contenente il punto C.

- Usiamo la **Figura_2_3a**.

Non abbiamo a prima vista elementi per confutare o dimostrare l'affermazione del problema 2.5.

Facciamoci aiutare allora da *Cabri* per misurare le distanze del punto P da A, B e C:

- misuriamo con lo strumento **Misura lunghezza** la lunghezza dei segmenti PA, PB e PC.

Accanto ai segmenti appaiono le loro misure che variano al variare del punto P sull'arco.

Per maggiore chiarezza sulla figura indichiamo, accanto alla misura del segmento, il nome del segmento.

Otteniamo ciò semplicemente scrivendo il nome del segmento nella finestra che indica la sua misura.

Sommiamo le misure di PA e di PB e confrontiamo il risultato con la misura di PC.

Otteniamo lo stesso risultato.

Possiamo far fare direttamente a *Cabri* i calcoli:

- con lo strumento **Calcolatrice** della casella degli strumenti **Misure** calcoliamo la somma delle lunghezze dei segmenti PA e PB. Inseriamo nella parte destra della figura il risultato di tale calcolo.

Questo risultato varia al variare del punto P sull'arco; ora è facile vedere che esso è uguale alla lunghezza del segmento CP

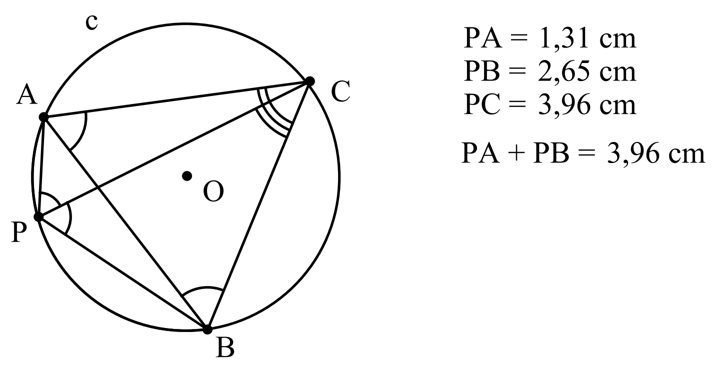



Figura_2_5

– Salviamo la figura nel file **Figura_2_5.fig.**

Il fatto che PA + PB = PC va dimostrato[6]. La dimostrazione non è assolutamente facile. Analizziamo la dimostrazione che abbiamo dato nel caso particolare in cui P coincide con il punto D.

Il nucleo della dimostrazione sta nell'aver considerato il triangolo equilatero ADO.

Proviamo a considerare il triangolo equilatero di lato AP avente il terzo vertice interno al triangolo ABC[7]. Esso, se P è diverso da D, non avrà come terzo vertice il punto O.

In ogni caso forse ci può dare qualche informazione.

**Problema 2.6**

Dimostrare che si ha PC = PA + PB.
Suggerimento: considerare il triangolo equilatero APP′ con P′ interno al triangolo ABC.

– Usiamo la **Figura_2_5**.
– Con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo le misure delle di-

[6] **Commenti didattici**. Anche in questo caso nasce il solito problema: gli studenti di solito si fidano di quel che dice il calcolatore e quindi non reputano necessario dare una dimostrazione di ciò.
[7] **Commenti didattici**. Chiediamo agli studenti di dimostrare l'esistenza di un tale triangolo.

stanze di P da A, B e C;

– Usiamo la macro **Equilat** per costruire il triangolo equilatero di vertici A e P avente il terzo vertice interno al triangolo ABC, chiamiamo P' il terzo vertice del triangolo equilatero appena costruito.

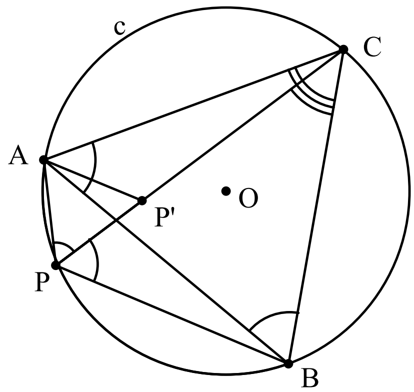



Figura_2_6

– Salviamo la figura nel file **Figura_2_6.fig**.

Per costruzione abbiamo AP = PP'. Se quindi riusciamo a dimostrare che si ha PB = P'C, abbiamo PC = PP' + P'C = PA + PB, che è quel che vogliamo dimostrare.

In effetti dalla figura appare che i triangoli APB e AP'C sono uguali. La dimostrazione di ciò è semplice: essi hanno uguali due lati (AP =AP' e AB = AC) e i tre angoli (ABP = ACP' perché insistono sullo stesso arco e APB = AP'C perché entrambi misurano 120°).

La dimostrazione appare completa.

In effetti, a ben guardare, nella dimostrazione abbiamo più volte sfruttato il fatto che il punto P' appartenga al segmento PC.

Ma ciò va dimostrato[8]. La dimostrazione è semplice: basta osservare che gli angoli APC e APP' misurano entrambi 60°.

---

[8] **Commenti didattici.** Di solito gli studenti si accontentano del fatto che il calcolatore mostra che il punto P' appartiene al segmento PC e quindi non reputano necessario darne una dimostrazione. Anzi, gli studenti di solito non si pongono neanche il problema. Implicitamente assumono l'allineamento dei tre punti.

Abbiamo dimostrato il seguente:

**2.6. Teorema.** *Dato un triangolo equilatero* ABC*, sia c la circonferenza ad esso circoscritta e sia* P *un punto appartenente all'arco della circonferenza c di estremi* A *e* B *non contenente* C*, allora:*

PC = PA + PB

## 3. Le circonferenze di Fermat

**Problema 3.1**

Dato un triangolo ABC, costruire sul lato AB il triangolo equilatero ABR esterno al triangolo e la circonferenza c1 ad esso circoscritta; ripetere la stessa operazione sul lato BC e sul lato AC. Si ottengono i triangoli equilateri BCP e ACQ e le circonferenze c2 e c3 ad essi circoscritte. Quali proprietà suggerisce la figura?

- Disegniamo con lo strumento **Triangolo** un triangolo ABC;
- applichiamo al lato AB la macro **Equilat_Circ_Circ** per disegnare il triangolo ABR e la circonferenza circoscritta c1 di centro O1;
- applichiamo al lato BC la macro **Equilat_Circ_Circ** per disegnare il triangolo BCP e la circonferenza circoscritta c2 di centro O2;
- applichiamo al lato AC la macro **Equilat_Circ_Circ** per disegnare il triangolo ACQ e la circonferenza circoscritta c3 di centro O3.

Chiamiamo le circonferenze c1, c2 e c3 **circonferenze di Fermat.**

Questa costruzione potrebbe esserci utile in seguito. Creiamo quindi una macro:

- costruiamo una macro avente come **Oggetti iniziali** tre punti e come **Oggetti finali** il triangolo da essi determinato**,** le sue tre circonferenze di Fermat e i loro centri; con lo strumento **Definizione di una macro** diamo alla macro il nome **Circonferenze_Fermat**.

Mettiamo alla prova la macro.

- Selezioniamo la macro **Circonferenze_Fermat** e disegniamo tre punti.

La macro, oltre ai tre punti, disegna tutti i punti finali richiesti.

Le tre circonferenze di Fermat sembrano intersecarsi in un punto.

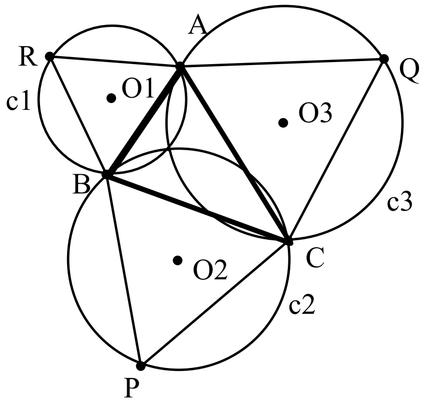



Figura_3_1

– Salviamo la figura nel file **Figura_3_1.fig**.

Enunciamo pertanto la:
**Congettura 3.2.** *Le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto*[9].

| **Problema 3.2** |
|---|
| Dimostrare o confutare la congettura 3.2. |

Una possibile dimostrazione consiste nel considerare le circonferenze c1 e c2. Esse si intersecano in un punto B e in un punto che chiamiamo F. Vogliamo dimostrare che il punto F appartiene alla circonferenza c3 passante per A C e Q. In altre parole vogliamo dimostrare che il quadrilatero FCQA è inscrivibile in una circonferenza.

Per rendere più comprensibile il discorso conviene nascondere nella figura 3.1 la circonferenza c3.
– Nascondiamo il cerchio c3 con lo strumento **Mostra/Nascondi**.
Ora dobbiamo disegnare il punto F:
– con lo strumento **Punto** disegniamo il punto di intersezione di c1 e c2 di-

[9] **Commenti didattici**. L'evidenza della figura di solito fa sì che molti studenti diano per scontato che le tre circonferenze si intersechino in un punto. Essi non formulano pertanto la congettura 3.2. e cercano direttamente le proprietà di tale punto.

stinto da B; lo chiamiamo F.

Per dimostrare che F appartiene alla circonferenza passante per A, C e Q ci conviene disegnare il quadrilatero FCQA:

– con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti FA, FB e FC.

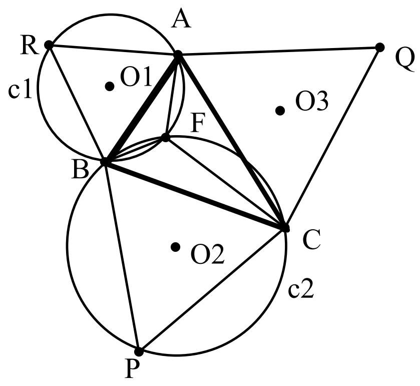



Figura_3_2

– Salviamo la figura nel file **Figura_3_2.fig**.

I punti F e Q si trovano su semipiani differenti rispetto alla retta passante per A e C. Pertanto, per dimostrare quel che vogliamo, dobbiamo dimostrare che l'angolo AFC misura 120° (ricordiamo che l'angolo AQC ad esso opposto misura 60°). In effetti l'angolo AFC misura 120° perché gli angoli AFB e BFC, essendo supplementari di angoli di 60°, misurano 120°.

| **Problema 3.3** |
| --- |
| Cosa possiamo dedurre da tutto ciò? |

**Giuseppe Accascina**
**Giovanni Margiotta**