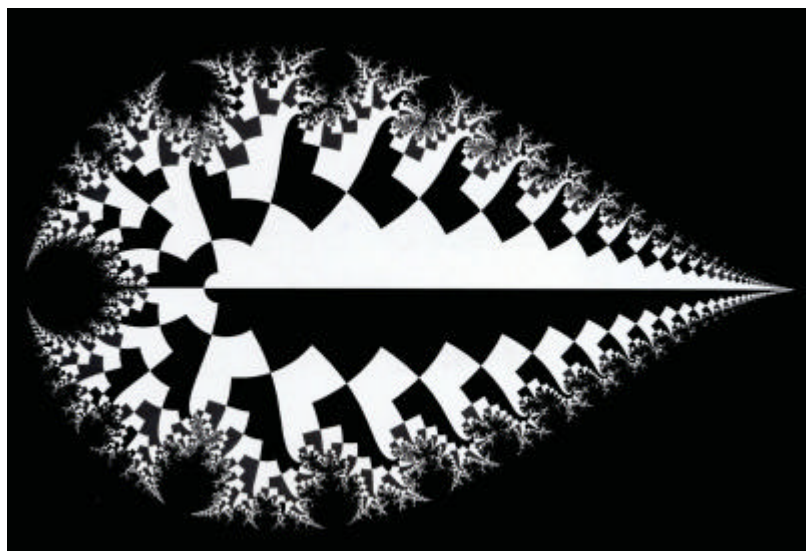




Alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri (Parte seconda)

Giuseppe Accascina
Giovanni Margiotta

Riassunto Proponiamo l'uso di *Cabri* in un'attività di Problem Posing e Problem Solving nella quale gli studenti dovrebbero essere in grado di scoprire autonomamente (con un piccolo aiuto dei loro insegnanti) alcune proprietà dei triangoli. In questa seconda parte analizziamo le proprietà delle circonferenze di Fermat e del punto di Fermat.

Abstract We propose the use of *Cabri* in a Problem Posing and Problem Solving activity which should make the students able to find themselves (with a little help from their teacher) some properties of the triangles. In this second part we analyze properties of the Fermat Circles and of the Fermat Point.

Giuseppe Accascina

Dip. Metodi e Modelli Matematici
Università "La Sapienza" di Roma
e-mail: accascina@dmmm.uniroma1.it

Giovanni Margiotta

Liceo Scientifico "Francesco d'Assisi"
Miur
e-mail: giovanni.margiotta@istruzione.it

Nella prima parte del nostro articolo abbiamo proposto un'attività di esplorazione della geometria con *Cabri* organizzata in modo tale che siano gli stessi studenti (con un piccolo aiuto dei loro insegnanti) a scoprire e dimostrare alcune proprietà dei triangoli.

Abbiamo suddiviso il lavoro in singole schede, che iniziano con lo sviluppo del problema assegnato nella scheda precedente e terminano con l'assegnazione di un nuovo problema. Abbiamo inserito nelle note i commenti didattici riservati al docente.

Dai siti:

<http://www.irrsae.lazio.it/matema/software/cabri/cabri.html>

<http://www.dnmmm.uniroma1.it/persone/accascina>

si possono scaricare le schede fornibili direttamente agli studenti e i file di tutte le figure.

Le schede sono state sperimentate in un laboratorio nell'ambito della Scuola di Specializzazione all'Insegnamento Secondario (SSIS) del Lazio nel corso di cinque sessioni di due ore l'una. Ogni coppia di specializzandi, per la maggior parte laureati in Matematica, aveva a disposizione un calcolatore su cui era installato *Cabri Géométrie II* e poteva liberamente scambiare opinioni con le altre coppie.

Siamo dell'idea che questo percorso di esplorazione sia proponibile anche a studenti di Scuola Secondaria Superiore che conoscano la geometria euclidea piana.

L'equiparazione di laureati in matematica con studenti della scuola secondaria può apparire sorprendente. In effetti l'esperienza di insegnamento di entrambi gli autori nella SSIS e di uno dei due autori in un liceo scientifico ci fa ipotizzare che le competenze dei due tipi di studenti siano purtroppo equiparabili.

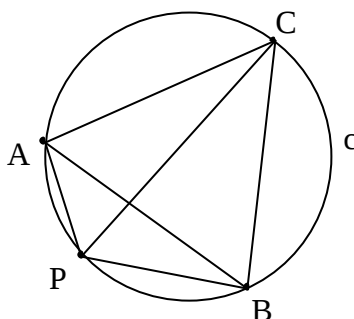
Facendo uso unicamente degli strumenti riconducibili all'uso della riga (non graduata) e del compasso, abbiamo all'inizio effettuato con *Cabri* semplici costruzioni quali un triangolo equilatero di lato assegnato (proposizione 1 del libro 1 degli Elementi di Euclide), l'asse di un segmento (proposizione 10 del libro 1), la retta passante per un punto assegnato perpendicolare ad una retta assegnata (proposizioni 11 e 12 del libro 1), la circonferenza circoscritta ad un triangolo (proposizione 5 del libro 4). Per ognuna di queste costruzioni abbiamo creato, quando necessario, le macro per *Cabri*.

Abbiamo poi iniziato ad esplorare alcune proprietà del triangolo equilatero e della circonferenza ad esso circoscritta.

In particolare abbiamo prima osservato e poi dimostrato il seguente teorema (manteniamo la numerazione della prima parte dell'articolo):

2.6 Teorema. *Dato un triangolo equilatero ABC , sia c la circonferenza ad esso circoscritta e sia P un punto appartenente all'arco della circonferenza c di estremi A e B non contenente C , allora:*

$$PC = PA + PB$$

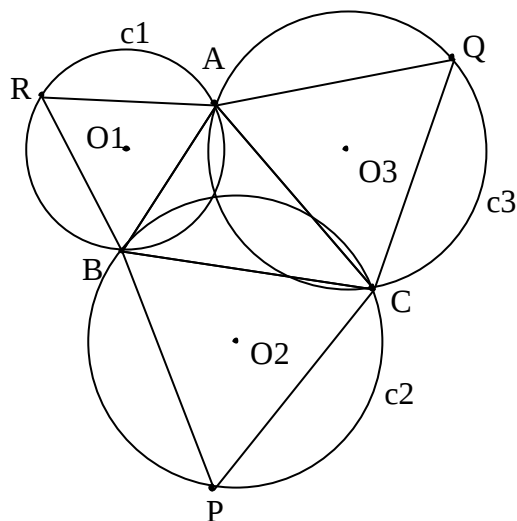


3. Le circonferenze di Fermat (continua)

Abbiamo poi esaminato il seguente problema:

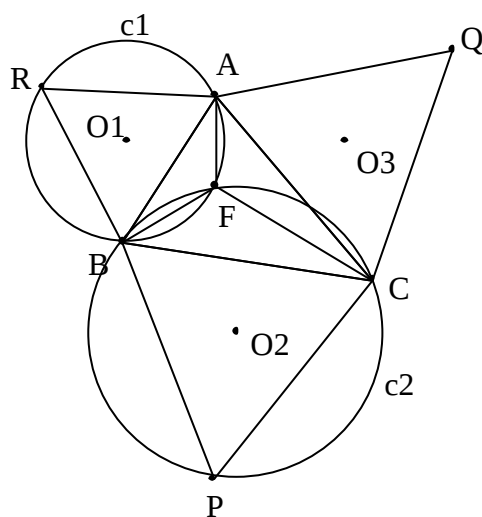
Problema 3.2

Dato un triangolo ABC , costruire sul lato AB il triangolo equilatero ABR esterno al triangolo e la circonferenza c_1 ad esso circoscritta; ripetere la stessa operazione sul lato BC e sul lato AC . Si ottengono i triangoli equilateri BCP e ACQ e le circonferenze c_2 e c_3 ad essi circoscritte. Dimostrare che le tre circonferenze, dette **circonferenze di Fermat**, si intersecano in un punto.



Figura_3_1

Una possibile dimostrazione consiste nel considerare le circonferenze $c1$ e $c2$. Esse si intersecano in un punto B e in un punto che chiamiamo F .



Figura_3_2

Vogliamo dimostrare che il punto F appartiene alla circonferenza c_3 passante per A , C e Q . In altre parole vogliamo dimostrare che il quadrilatero $FCQA$ è inscritto in una circonferenza.

I punti F e Q si trovano su semipiani differenti rispetto alla retta passante per A e C . Pertanto, per dimostrare quel che vogliamo, dobbiamo dimostrare che l'angolo AFC misura 120° (ricordiamo che l'angolo AQC ad esso opposto misura 60°). In effetti l'angolo AFC misura 120° perché gli angoli AFB e BFC , essendo supplementari di angoli di 60° , misurano 120° .

Abbiamo concluso la prima parte dell'articolo con il seguente problema:

Problema 3.3

Cosa possiamo dedurre da tutto ciò?

A prima vista appare che abbiamo dimostrato ciò che volevamo: le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto¹. Ma riguardiamo con attenzione la nostra dimostrazione.

Essa si basa sul fatto che gli angoli AFB e BFC misurano 120° e che i punti F e Q si trovano su semipiani differenti rispetto alla retta passante per A e C . Ciò sicuramente avviene quando F è interno al triangolo ABC .

Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:

Teorema 3.2i (il simbolo “i” sta per “interno”). *Se il punto F , punto di intersezione di c_1 e c_2 distinto da B , è interno al triangolo ABC , allora esso appartiene alla circonferenza c_3 . Le tre circonferenze di Fermat si intersecano quindi in un punto.*

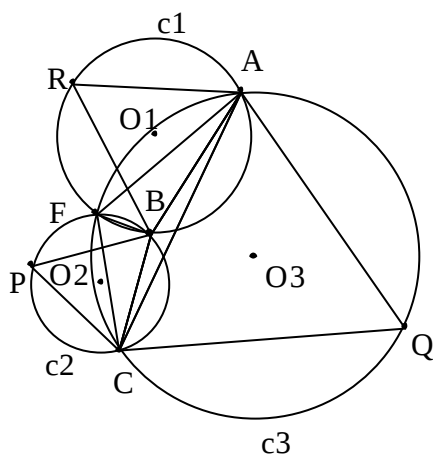
Ma il punto F è sempre interno al triangolo ABC ?

Analizziamo ciò con *Cabri*. Variamo il triangolo ABC a partire dalla **Figura_3_2**, dopo aver disegnato il triangolo AQC e la circonferenza c_3 .

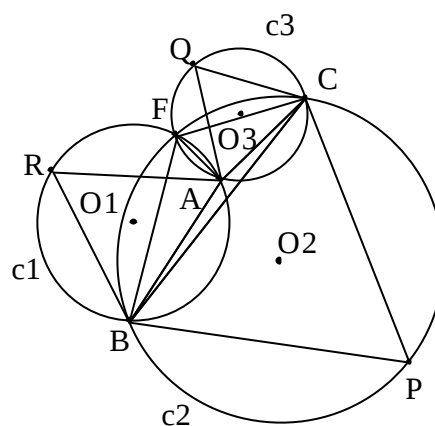
Ci conviene fissare una volta per tutte i vertici A e B e un punto R tale che il triangolo ABR sia equilatero. Anche la circonferenza c_1 è pertanto fissata. Il punto C è invece libero di muoversi. Dal momento che i punti C e R devono appartenere, per costruzione, a semipiani differenti rispetto alla retta passante per A e B , facciamo muovere il punto C nel semipiano delimitato dalla retta passante per A e B non con-

¹ **Commenti didattici.** In effetti questa è stata la prima risposta degli studenti della SSIS.

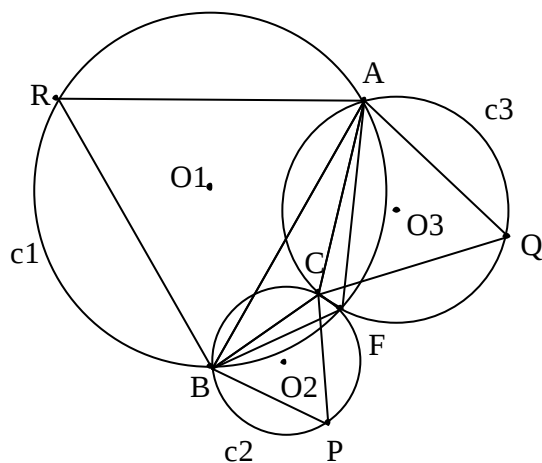
tenente il punto R. Muovendo il punto C in tale semipiano notiamo che il punto F può essere o interno o esterno al triangolo o appartenere al suo bordo².



Figura_3_3a

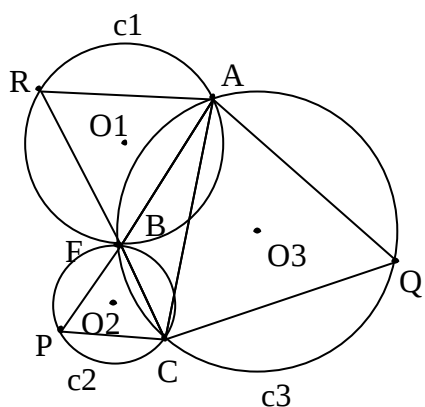


Figura_3_3b

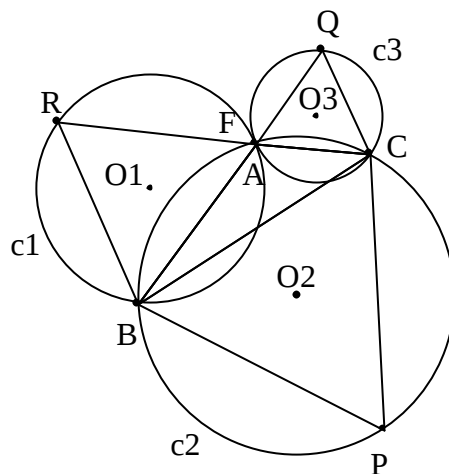


Figura_3_3c

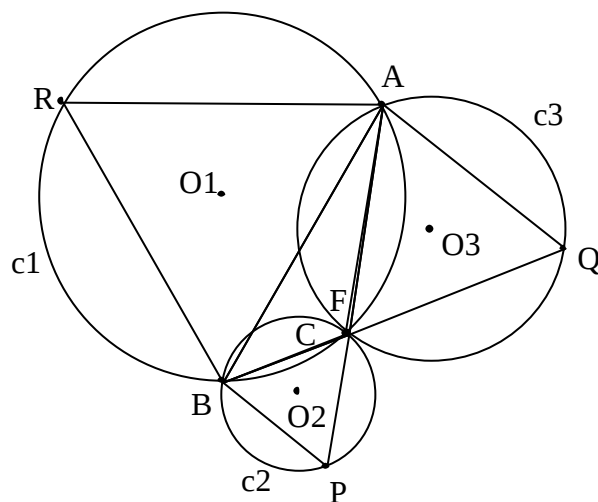
² **Commenti didattici.** In questo caso l'uso di *Cabri* ci è stato molto utile per capire che non sempre il punto F è interno al triangolo.



Figura_3_3d



Figura_3_3e



Figura_3_3f

Per rendere più intelligibili la **Figura_3_3c** e la **Figura_3_3f** il segmento AB è stato ingrandito.

Non abbiamo pertanto dimostrato completamente il nostro teorema. Dobbiamo dimostrare che il punto F appartiene alla circonferenza c3 anche quando esso non è

interno al triangolo.

Ma quando avviene ciò?

Problema 3.4

La posizione del punto F rispetto al triangolo ABC dipende dall'ampiezza degli angoli del triangolo? In che modo?

Facciamoci aiutare ancora una volta da *Cabri*.

Misuriamo l'ampiezza dei tre angoli del triangolo ABC :

- misuriamo con lo strumento **Misura dell'angolo** gli angoli ABC , BCA e CAB
Muoviamo il punto C . Otteniamo essenzialmente i seguenti casi:
 - A) tutti gli angoli sono del triangolo sono minori di 120° (**Figura_3_2**): il punto F è interno al triangolo;
 - B) un angolo è maggiore di 120° : (**Figura_3_3a, 3_3b, 3_3c**) il punto F è esterno al triangolo;
 - C) un angolo è uguale a 120° (**Figura_3_3d, 3_3e, 3_3f**): il punto F è uno dei vertici del triangolo.

La dimostrazione di A) non è così semplice come può apparire a prima vista. La omettiamo³. Una volta dato per buono A), possiamo sfruttare il teorema 3.2i e ottenere il seguente:

Teorema 3.4i . *Se gli angoli del triangolo ABC sono tutti minori di 120° , allora le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto F interno al triangolo ABC .*

Passiamo al caso B). Consideriamo il caso in cui l'angolo ABC è maggiore di 120° (**Figura_3_3a**). Dalla figura appare che:

- b1) il punto F e il punto R appartengono allo stesso semipiano delimitato dalla retta passante per A e B ;
- b2) il punto F e il punto P appartengono allo stesso semipiano delimitato dalla

³ **Commenti didattici.** Secondo noi la dimostrazione non è alla portata degli studenti. Per questa ragione la omettiamo. In ogni caso bisogna far ben capire agli studenti che la dimostrazione, pur esistente, viene omessa.

retta passante per B e C;

b3) il punto F e il punto Q appartengono a diversi semipiani delimitati dalla retta passante per A e C;

b4) gli angoli AFB e BFC sono contigui.

Anche in questo caso omettiamo la dimostrazione di queste quattro proprietà⁴.

Sfruttando queste quattro proprietà la dimostrazione è analoga a quella vista nel caso A): da b1) e b2) segue che gli angoli AFB e BFC sono uguali a 60° ; da b4) segue che l'angolo AFC è uguale a 120° ; da b3) segue che il quadrilatero AFCQ è inscritto in una circonferenza e quindi il punto F appartiene alla circonferenza c3.

Abbiamo dimostrato quel che volevamo in un caso.

Dobbiamo esaminare ancora due casi⁵.

Consideriamo ora il caso in cui l'angolo CAB è maggiore a 120° (**Figura_3_3b**). Le proprietà b1), b2), b3), b4) non sono più verificate.

Tentiamo però di procedere in modo analogo al caso precedente. Dobbiamo dimostrare che il quadrilatero ACQF è inscritto in una circonferenza.

L'angolo ACQ misura 60° .

Dobbiamo quindi dimostrare che l'angolo QFA misura 120° . La dimostrazione di ciò non è affatto semplice. Ritorneremo tra poco su questo caso.

Analizziamo il caso in cui l'angolo BCA misura più di 120° (**Figura_3_3c**).

Procedendo in modo analogo ai due casi precedenti ci rendiamo conto che dobbiamo dimostrare che l'angolo CFQ misura 120° . Anche in questo caso la dimostrazione non è affatto semplice.

Bene, siamo stati in grado di dimostrare quel che volevamo solo in uno dei tre casi⁶.

Osserviamo di nuovo le nostre tre dimostrazioni.

In tutti e tre i casi abbiamo che uno degli angoli del triangolo originario misura più di 120° gradi.

⁴ **Commenti didattici.** Vale ciò che è stato detto nella nota precedente.

⁵ **Commenti didattici.** Gli studenti non amano studiare situazioni, a loro parere, ripetitive. Conviene perciò suddividere gli studenti in tre gruppi ed assegnare ad ognuno di essi uno dei tre casi.

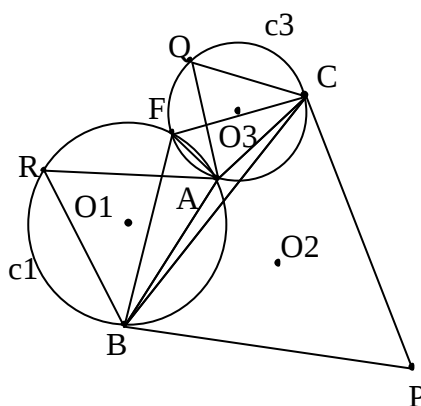
⁶ **Commenti didattici.** La situazione dal punto di vista didattico è interessante: solo uno dei tre gruppi è in grado di dare una dimostrazione.

Siamo stati in grado di dimostrare il teorema solo nel caso in cui l'angolo di misura maggiore di 120° ha vertice nel punto di intersezione B delle due circonferenze.

Ricordiamo che noi abbiamo fissato due delle tre circonferenze di Fermat a priori.

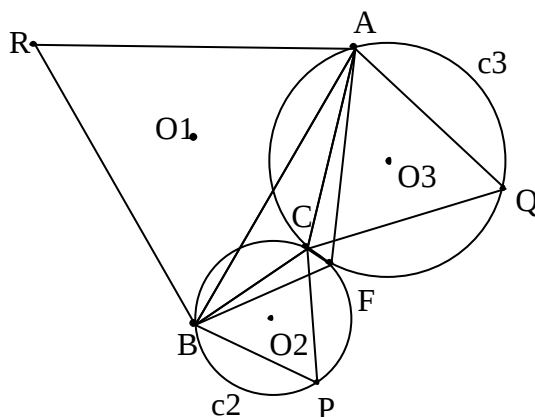
Modifichiamo allora leggermente la nostra dimostrazione scegliendo le due circonferenze di Fermat che si intersecano nel vertice dell'angolo di misura maggiore di 120° e dimostrando poi che il loro ulteriore punto F di intersezione appartiene alla terza circonferenza di Fermat.

Più esplicitamente, nel caso in cui l'angolo di misura maggiore di 120° è l'angolo BAC, consideriamo le circonferenze c1 e c3 che si intersecano in A e in F e mostriamo che il punto F appartiene alla circonferenza c2 passante per B, C e P.



Figura_3_4

Nel caso in cui l'angolo di misura maggiore di 120° è l'angolo BCA, consideriamo le circonferenze c2 e c3 che si intersecano in C e in F e mostriamo che il punto F appartiene alla circonferenza c1 passante per A, B, e R.



Figura_3_4a

Ovviamente la dimostrazione nei tre casi è identica⁷.

Abbiamo dimostrato quindi il seguente:

Teorema 3.4e (“e” sta per “esterno”). *Se uno degli angoli del triangolo ABC è maggiore di 120° , allora le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto F esterno al triangolo ABC.*

Passiamo al caso C) in cui un angolo è uguale a 120° .

Problema 3.5

Disegnare un triangolo avente un angolo di misura uguale a 120° e dimostrare o confutare che le circonferenze di Fermat si intersecano in un punto.

Per disegnare un tale triangolo, disegniamo innanzitutto uno dei lati adiacenti il vertice dell'angolo di misura uguale a 120° .

Chiamiamo B tale vertice e A l'altro estremo del lato.

Vogliamo determinare il vertice C in modo tale che l'angolo ABC misuri 120° .

Per far ciò riprendiamo la **Figura_3_2**:

- cancelliamo il punto C ponendo il **Puntatore** sul punto C e premendo il tasto **Canc**.

In tal modo vengono cancellate tutte le costruzioni fatte a partire dal punto C. Rimangono solo il segmento AB, il triangolo ABR, la circonferenza ad esso circoscritta e il suo centro.

Poiché l'angolo ABC deve misurare 120° , il punto C deve appartenere alla semiretta della retta passante per R e B che è delimitata dal punto B e non contiene il punto R.

⁷ **Commenti didattici.** Ci siamo dilungati su questo punto perché questo tipo di procedimento, usuale per chi ha una certa esperienza in matematica, non viene di solito utilizzato da coloro che non hanno una certa esperienza. Purtroppo nessuno degli studenti della SSIS ha proposto questo procedimento.

Per disegnarla abbiamo bisogno di un suo punto:

- disegniamo il punto simmetrico R' di R rispetto a B con il comando **Simmetria centrale**;
- disegniamo la semiretta s delimitata da B passante per R' con il comando **Semiretta**;
- disegniamo un punto C sulla semiretta s con il comando **Punto su un oggetto**;
- disegniamo i segmenti BC e AC con il comando **Segmento**.

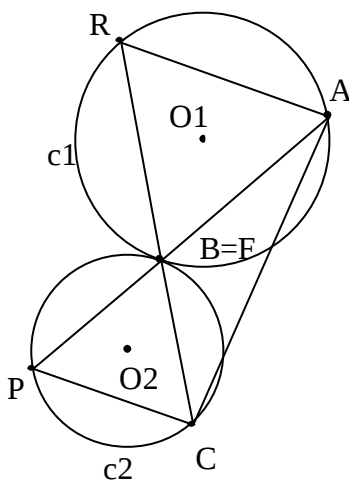
Ora nascondiamo (non cancelliamo) ciò che non ci interessa più vedere:

- nascondiamo con il comando **Mostra/Nascondi** il punto R' e la semiretta s .

Muovendo il punto C otteniamo tutti i triangoli ABC aventi l'angolo ABC di 120° .

- Disegniamo con la macro **Equilat_Circ_Circ** il triangolo equilatero sul lato BC appartenente al semipiano opportuno; chiamiamo P il terzo punto del triangolo equilatero, c_2 la circonferenza circoscritta al triangolo BCP e O_2 il suo centro.

Notiamo che dalla figura appare che le circonferenze c_1 e c_2 si intersecano nel solo punto B .



Figura_3_5

La dimostrazione di ciò deriva dal fatto che, poiché l'angolo ABC misura 120° , l'angolo O_1BO_2 misura 180° . I punti O_1 , B e O_2 sono quindi allineati.

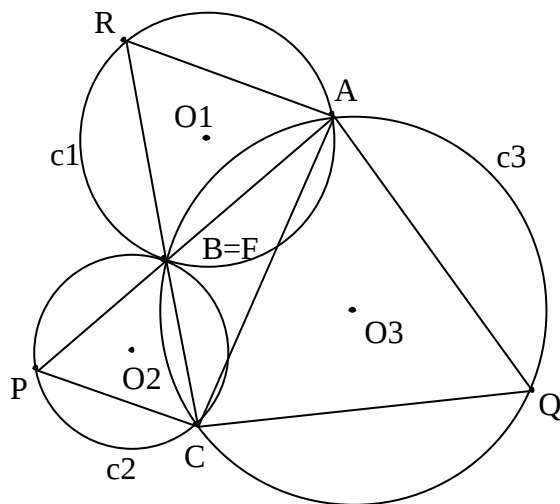
Le circonferenze c_1 e c_2 sono pertanto tangenti in B alla retta passante per B perpendicolare alla retta passante per O_1 e O_2 .

Il punto F coincide quindi con il punto B .

- Disegniamo con la macro **Equilat_Circ_Circ** il triangolo equilatero ACQ sul lato AC appartenente al semipiano opportuno e la circonferenza c_3 ad esso circoscritta.

Essa appare passare per F (**Figura_3_5a**).

La dimostrazione di ciò è semplice. Poiché l'angolo $AFC = ABC$ misura 120° , il quadrilatero $AFCQ$ è inscritto in una circonferenza e quindi il punto F appartiene alla circonferenza c_3 .



Figura_3_5_a

Abbiamo dimostrato quel che volevamo.

In definitiva abbiamo dimostrato il seguente:

Teorema 3.3b (“b” sta per “bordo”). *Se uno degli angoli del triangolo ABC è uguale a 120° , allora le tre circonferenze di Fermat si intersecano nel vertice dell'angolo uguale a 120° .*

I teoremi 3.3i, 3.3e, 3.3b possono essere riassunti nel seguente:

Teorema 3.3. *Le circonferenze di Fermat di un triangolo si intersecano in un punto. Lo chiamiamo **punto di Fermat**.*

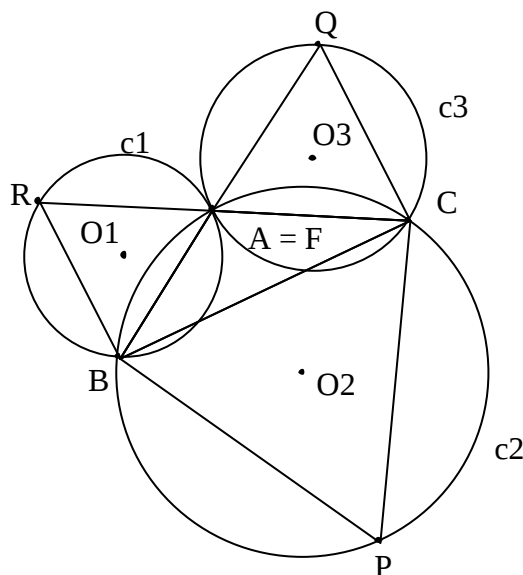
È interessante notare le differenze tra la **Figura_3_5a** e la **Figura_3_3d**.

Abbiamo costruito la **Figura_3_5a** in modo tale che l'angolo ABC sia effettivamente di 120° . Nella **Figura_3_3d** invece abbiamo costruito dapprima un generico triangolo ABC e poi, muovendo il vertice C, abbiamo fatto in modo che il punto F si approssimi al punto B e quindi l'angolo ABC misuri approssimativamente 120° .

Anche la **Figura_3_3e** e la **Figura_3_3f** rappresentano triangoli aventi un angolo di misura approssimativamente uguale a 120° . Ci conviene sostituirle con disegni precisi.

Abbiamo visto come disegnare, a partire da un lato AB, un triangolo avente un angolo adiacente ad esso uguale a 120° .

Nella seguente figura l'angolo BAC misura 120° .



Figura_3_5b

Rimane da considerare il caso in cui l'angolo BCA misura 120° .

Problema 3.6

Fissato un segmento AB, disegnare un triangolo ABC avente l'angolo BCA di misura uguale a 120° e disegnare le circonferenze di Fermat.

Per far ciò riprendiamo la **Figura_3_2**:

- cancelliamo il punto C ponendo il **Puntatore** sul punto C e premendo il tasto **Canc**.

Rimane il segmento AB, il punto R e la circonferenza di Fermat c1. Vogliamo determinare tutti i punti C appartenenti al semipiano delimitato dalla retta passante per A e B non contenente il punto R tali che l'angolo BCA misuri 120° .

Ingrandiamo il segmento AB per rendere più leggibile la figura.

Notiamo che l'angolo ARB misura 60° . Il punto C deve quindi appartenere all'arco della circonferenza c1 delimitato dai punti A e B non contenente R.

Per determinare tale arco dobbiamo determinare un suo punto.

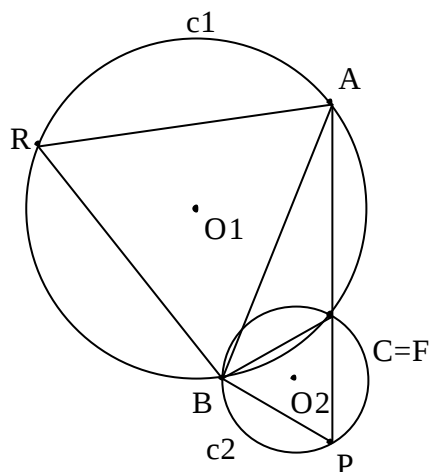
Possiamo prendere il punto R' simmetrico di R rispetto a O1.

- Disegniamo il punto simmetrico di R rispetto a O1 con il comando **Simmetria centrale**; chiamiamolo R';
- disegniamo l'arco s di circonferenza di estremi A e B passante per R' con il comando **Arco di circonferenza**;
- nascondiamo con il comando **Mostra/Nascondi** il punto R';
- disegniamo un punto, che chiamiamo C, sull'arco s con il comando **Punto su un oggetto**;
- disegniamo i segmenti BC e AC con il comando **Segmento**.

Muovendo il punto C otteniamo tutti i triangoli ABC aventi l'angolo BCA di 120° .

- Disegniamo con la macro **Equilat_Circ_Circ** il triangolo equilatero sul lato BC appartenente al semipiano opportuno;

- chiamiamo P il terzo punto del triangolo equilatero, c2 la circonferenza circoscritta al triangolo BCP e O2 il suo centro.



Figura_3_6

Notiamo che dalla figura appare che le circonferenze c1 e c2 si intersecano nel punto B e nel punto C. La dimostrazione di ciò è implicita nella costruzione che abbiamo fatto del punto C. Il punto C infatti appartiene alla circonferenza c1. Il punto F coincide quindi con il punto C.

- Disegniamo con la macro **Equilat_Circ_Circ** il triangolo equilatero ACQ sul lato AC appartenente al semipiano opportuno e la circonferenza c3 ad esso circoscritta.

Ovviamente la circonferenza c3 passa per $F = C$.

4. Punto di Fermat.

Torniamo al caso particolare in cui il triangolo ABC ha un angolo di 120° (**Figura_3_5a**, **Figura_3_5b**, **Figura_3_6**). In quest'ultima figura aggiungiamo il triangolo ACQ e la circonferenza c3). In ognuna di esse appare che

- 1) i punti F, A e P sono allineati;
- 2) i punti F, B e Q sono allineati;

- 3) i punti F, R e C sono allineati;
- 4) i segmenti AP, BQ e CR hanno uguale lunghezza⁸.

Proviamo a misurare i segmenti AP, BQ e CR con *Cabri*. Selezioniamo lo strumento **distanza e lunghezza** e misuriamo i segmenti AP, BQ e CR. Nella **Figura_4_1** mostriamo ciò che avviene a partire dalla **Figura_3_5_a**.

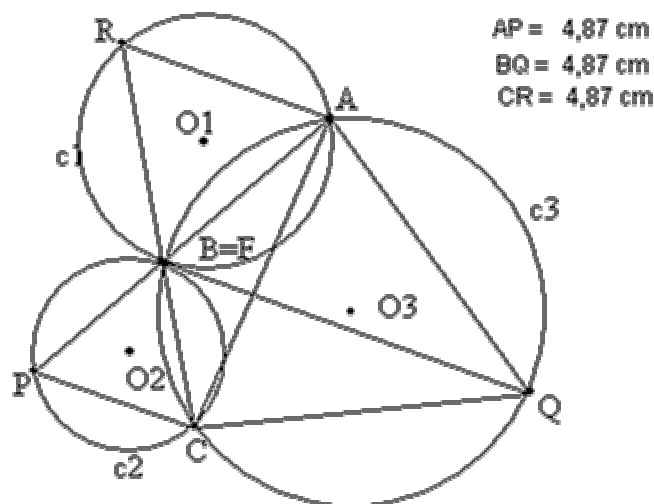
Cabri ci mostra che, al variare del punto C, i segmenti sono sempre uguali tra loro. Nei casi della **Figura_3_5b** e della **Figura_3_6** la situazione è analoga. Vogliamo dimostrare o confutare ciò che ci mostra *Cabri*.

Problema 4.1

Dimostrare o confutare che, dato un triangolo ABC con un angolo di 120° , si ha:

- 1) i punti F, C e R sono allineati;
- 2) i punti F, A e P sono allineati;
- 3) i punti F, B e Q sono allineati;
- 4) i segmenti AP, BQ e CR hanno uguale lunghezza.

Studiamo il caso in cui l'angolo ABC misura 120° .



⁸ **Commenti didattici.** E' interessante far notare agli studenti le differenze tra le Figure 3_5_a, 3_5b e 3_6 e le figure 3_3d, 3_3e e 3_3f. In queste ultime tre figure, nelle quali il punto F approssima uno dei tre vertici del triangolo, le proprietà di allineamento non appaiono sempre verificate.

Figura_4_1

Ormai sappiamo che gli altri due casi si riconducono a questo semplicemente rinominando i punti.

I punti F, C e R sono allineati perché gli angoli RFA e ABC sono supplementari.

I punti F, A e P sono allineati perché gli angoli AFC e PFC sono supplementari.

I punti F, B e Q sono ovviamente allineati perché B e F coincidono.

Dimostriamo la quarta proprietà.

È facile dimostrare che AP e RC hanno la stessa lunghezza. Infatti

$$AP = AB + BP = RB + BC = RC.$$

Dobbiamo ora dimostrare che il segmento BQ ha la stessa lunghezza dei segmenti AP e RC.

Dal teorema 2.6 segue $BQ = BA + BC$. Essendo $BA = RB$, abbiamo

$$BQ = RB + BC = RC.$$

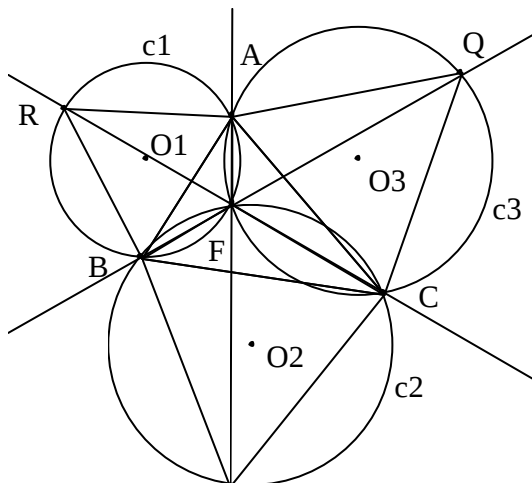
Abbiamo dimostrato ciò che volevamo.

Problema 4.2

Le quattro proprietà viste per triangoli che hanno un angolo di misura uguale a 120° sono valide per qualsiasi triangolo?

Esploriamo il problema con *Cabri*. Riprendiamo la **Figura_3_2**.

- Con lo strumento **Mostra/Nascondi** mostriamo la circonferenza c3;
- con lo strumento **Retta** disegniamo le rette passanti per A e P, per Q e B, per C e R.



Figura_4_2

Dalla figura sembra che i punti siano allineati. Dimostriamolo:

- il punto F è allineato con R e C perché gli angoli RFA e AFC sono supplementari;
- il punto F è allineato con B e Q perché gli angoli BFC e CFQ sono supplementari;
- il punto F è allineato con A e P perché gli angoli AFC e CFP sono supplementari.

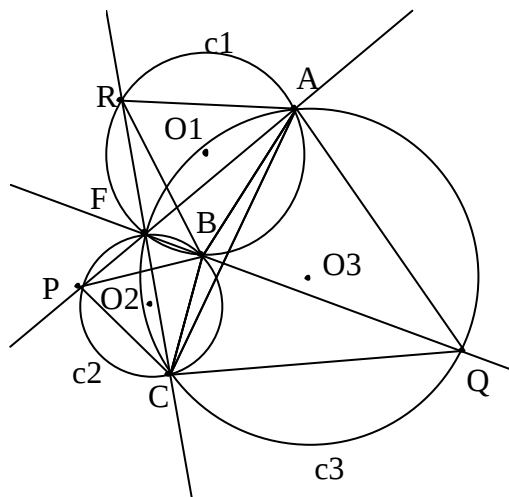
Abbiamo dimostrato le tre proprietà nel caso in cui il punto F sia interno al triangolo ABC.

Esaminiamo ora il caso in cui F sia esterno.

Consideriamo il caso in cui l'angolo ABC sia maggiore di 120° (gli altri due casi come al solito possono essere ricondotti a questo).

Riprendiamo la **Figura_3_3a**.

- con lo strumento **Retta** disegniamo le rette passanti per A e P, per Q e B, per C e R.



Figura_4_2a

Anche in questo caso i punti paiono essere allineati. Dimostriamolo.

Le dimostrazioni che R, F, C e A, F, P sono allineati sono identiche a quelle svolte

nel caso precedente.

Dimostriamo che F è allineato con B e Q .

Gli angoli AFB e AFQ misurano entrambi 60° e quindi, poiché B e Q appartengono allo stesso semipiano delimitato dalla retta passante per A e F , i punti F , B e Q sono allineati.

Abbiamo quindi dimostrato completamente le prime tre proprietà.

Passiamo alla quarta proprietà.

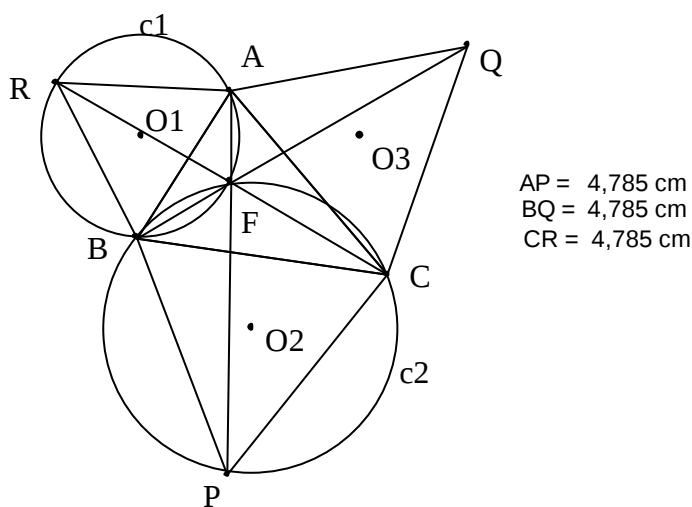
Vogliamo verificare se si ha $AP = BQ = CR$.

Facciamo innanzitutto un'esplorazione con *Cabri*.

Iniziamo con il caso in cui il punto F sia interno al triangolo.

Riprendiamo la **Figura_4_2**.

- Selezioniamo lo strumento **distanza e lunghezza** e misuriamo i segmenti AP , BQ



e CR

Figura_4_2b

Cabri ci mostra che i segmenti sono uguali.

Dimostriamolo.

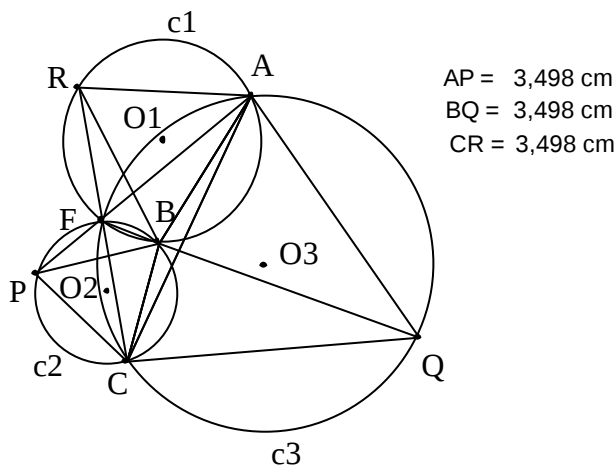
L'uguaglianza dei segmenti segue da:

$$AP = AF + FP = AF + FC + FB = QF + FB = QB$$

$$CR = CF + FR = CF + AF + BF = QF + FB = QB$$

Consideriamo ora il caso in cui un angolo del triangolo ABC sia maggiore di 120° . Riprendiamo la **Figura_4_2a**.

- Selezioniamo lo strumento **distanza e lunghezza** e misuriamo i segmenti AP, BQ e CR



AP = 3,498 cm
BQ = 3,498 cm
CR = 3,498 cm

Figura_4_2c

Anche in questo caso sembra che i tre segmenti siano uguali. Dimostriamolo.

$$AP = AF + FP = AF + FC - BF = FQ - BF = BQ$$

$$CR = CF + FR = CF + AF - BF = FQ - BF = BQ$$

Abbiamo in definitiva:

Teorema 4.2. Dato un triangolo ABC, costruiti sui suoi lati i triangoli equilateri ABR, ACQ e BCP esterni ad esso e il punto F di Fermat, si ha:

- 1) i punti F, A e P sono allineati;
- 2) i punti F, B e Q sono allineati;

- 3) i punti F , R e C sono allineati;
 4) i segmenti AP , BQ e CR hanno uguale lunghezza.

Vogliamo ora analizzare in particolare il caso in cui il triangolo ABC abbia tutti gli angoli di misura minore di 120° .

Riprendiamo la **Figura_4_2b** e consideriamo le distanze del punto di Fermat dai vertici del triangolo:

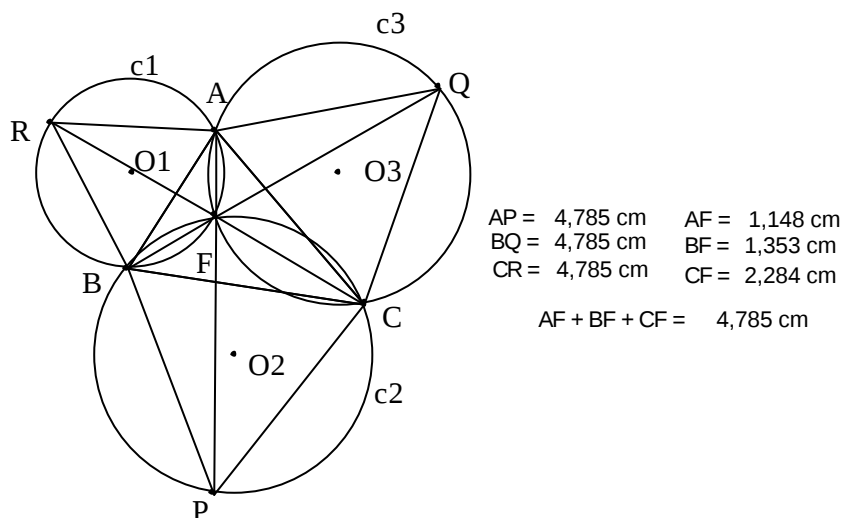
- misuriamo con lo strumento **Distanza e lunghezza** la lunghezza dei segmenti AF , BF e CF .

Notiamo che la somma delle tre lunghezze è uguale alla lunghezza dei segmenti AP , BQ e CR .

Possiamo anche far fare i calcoli direttamente a *Cabri*

- con lo strumento **Calcolatrice** calcoliamo la somma delle lunghezze dei segmenti AF , BF e CF . Inseriamo il risultato nella parte inferiore della figura.

Figura_4_2d



Problema 4.3

Dimostrare o confutare l'affermazione
 $AF + BF + CF = AP = BQ = CR$
 sia nel caso in cui il punto F sia interno al triangolo, sia che sia esterno, sia che appartenga al bordo del triangolo.

Analizziamo innanzitutto il caso in cui tutti gli angoli del triangolo abbiano misura minore di 120° (**Figura_4_2d**).

Dal teorema 2.6. segue $AF+BF=RF$ e quindi:

$$AF + BF + CF = RF + CF = RC = AP = BQ$$

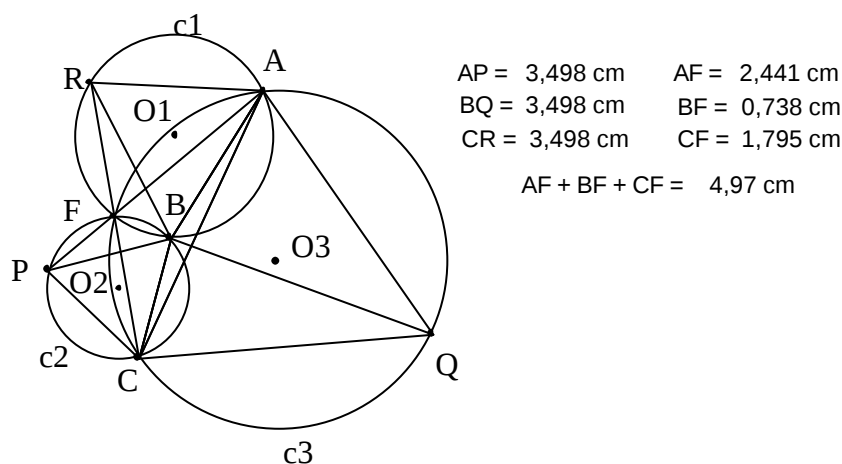
Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:

Teorema 4.3 Dato un triangolo ABC avente tutti gli angoli di misura minore di 120° , costruiti sui suoi lati i triangoli equilateri ABR , ACQ e BCP esterni ad esso e il punto F di Fermat, si ha:

$$AF + BF + CF = RC = AP = BQ$$

Esaminiamo ora il caso in cui uno degli angoli del triangolo sia maggiore di 120° . Facciamoci aiutare da *Cabri*

Consideriamo la **Figura_4_2c** e operiamo su essa così come abbiamo fatto nel



caso precedente:

Figura_4_3

Il teorema 4.3 non è generalizzabile al caso in cui F sia esterno al triangolo⁹.

⁹ **Commenti didattici.** Notiamo che l'analisi di un caso particolare svolta con *Cabri* è sufficiente per confutare una qualche affermazione mentre l'analisi di molti casi non è sufficiente per dimostrare un'affermazione. E' utile far notare ciò agli studenti. E' anche utile esaminare la dimostra-

Lasciamo al lettore l'esame dei casi in cui uno dei tre angoli del triangolo ABC misuri 120° .

4.4 Un'altra proprietà del punto di Fermat

Ritorniamo al caso in cui il triangolo ABC ha tutti gli angoli di misura minore di 120° (**Figura_4_2**).

Vogliamo ora dimostrare che il punto di Fermat ha un'altra interessante proprietà¹⁰ che viene evidenziata dalla dimostrazione del teorema 4.2.

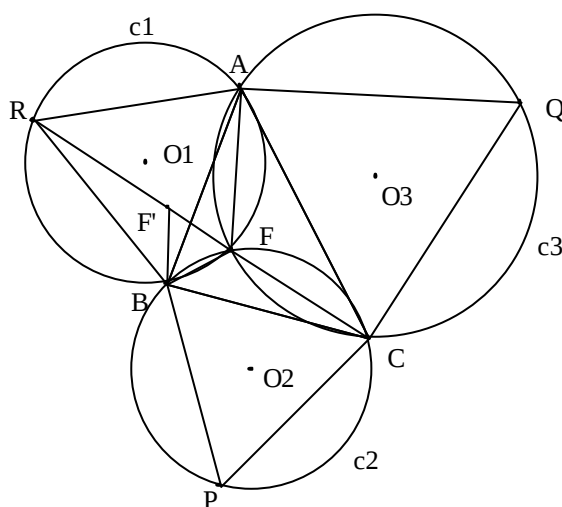
Quest'ultima si basa sul fatto, dimostrato nel teorema 2.4, che si ha

$$AF + BF = RF.$$

Riprendiamo in esame la dimostrazione del teorema 2.6 in questo caso.

Utilizziamo la **Figura_4_2d** e modifichiamola per renderla più intelligibile.

- Con la macro **Equilat** costruiamo il punto F', terzo vertice del triangolo equilatero di lato BF interno alla circonferenza c1.



zione svolta nel caso di F interno al triangolo e determinare per quali ragioni essa non è estendibile al caso di F esterno.

¹⁰ **Commenti didattici.** Questa dimostrazione si differenzia da tutte le altre viste fino ad ora perché lo studente, pur potendo comprenderla, non è in grado di trovarla autonomamente. In ogni caso tutto ciò non verrà utilizzato in seguito.

Figura_4_4

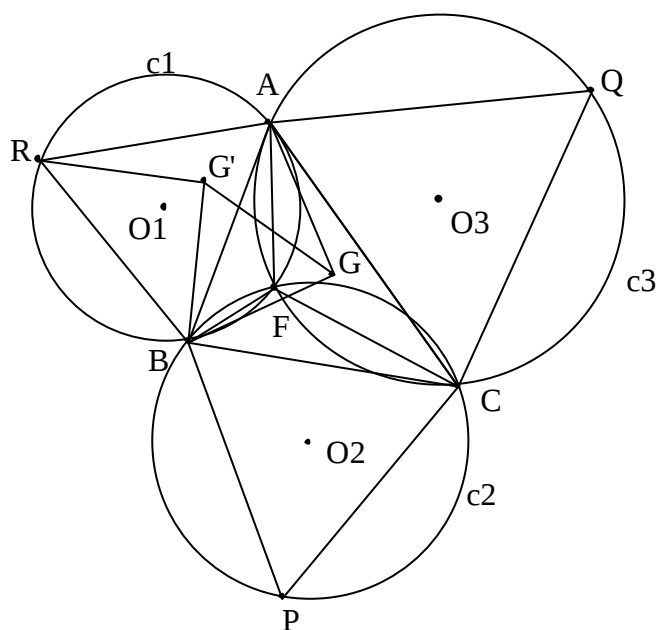
Nella dimostrazione del teorema 2.6 abbiamo visto che il punto F' appartiene al segmento RC . Abbiamo anche visto che i segmenti RF' e $F'F$ hanno lunghezza uguale rispettivamente ai segmenti AF e BF .

La costruzione ci ha permesso di disegnare una poligonale $CFF'R$ di lunghezza uguale alla somma delle lunghezze dei segmenti AF , BF e CF .

Ripetiamo la costruzione per un qualsiasi punto G interno al triangolo ABC .

- Con la macro **Equilat** costruiamo il punto G' , terzo vertice del triangolo equilatero di lato BG interno alla circonferenza $c1$.

La rotazione intorno a B di 60° in senso orario porta il triangolo $BG'R$ nel triango-



lo BGA e quindi i segmenti RG' e AG sono uguali.

Figura_4_4a

Pertanto la poligonale $CGG'R$ ha per lunghezza la somma delle lunghezze dei segmenti CG , BG e AG .

Al variare di G la costruzione precedente disegna tutte le possibili poligonali da C

a R che hanno per lunghezza la somma delle lunghezze della distanza del punto G dai vertici del triangolo ABC.

Tra tutte le poligonali quella di lunghezza minima è quella che ha i punti allineati. Sappiamo che C, F, F' e R sono allineati. Quindi, se G coincide con F, la poligonale CR ha lunghezza minima. Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:

Teorema 4.4. *Dato un triangolo avente tutti gli angoli di misura minore di 120° , il suo punto di Fermat è il punto interno al triangolo tale che la somma delle sue distanze dai vertici del triangolo sia minima.*

Errata corrige della prima parte. Nella stampa della **Figura_2_3a** manca il segmento AB. Ridisegnatelo: la figura ora ha senso.

Giuseppe Accascina
Giovanni Margiotta