SCHEDA 15

Sviluppo del problema 3.3.

A prima vista appare che abbiamo dimostrato la congettura 3.2: le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto. Ma riguardiamo con attenzione la nostra dimostrazione.
Essa si basa sul fatto che gli angoli AFB e BFC misurano 120° e che i punti F e Q si trovano su semipiani differenti rispetto alla retta passante per A e C. Ciò sicuramente avviene quando F è interno al triangolo ABC. Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:
Teorema 3.2i. (il simbolo "i" sta per "interno"). *Se il punto F, punto di intersezione di c1 e c2 distinto da B, è interno al triangolo ABC, allora esso appartiene alla circonferenza c3. Le tre circonferenze di Fermat si intersecano quindi in un punto.*
Ma il punto F è sempre interno al triangolo ABC? Analizziamo ciò con *Cabri*.
Variamo il triangolo ABC a partire dalla **Figura_3_2.**, dopo aver disegnato il triangolo AQC e la circonferenza c3.
Ci conviene fissare una volta per tutte i vertici A e B e un punto R tale che il triangolo ABR sia equilatero. Anche la circonferenza c1 è pertanto fissata. Il punto C è invece libero di muoversi. Dal momento che i punti C e R devono appartenere, per costruzione, a semipiani differenti rispetto alla retta passante per A e B, facciamo muovere il punto C nel semipiano delimitato dalla retta passante per A e B non contenente il punto R. Muovendo il punto C in tale semipiano notiamo che il punto F può essere o interno o esterno al triangolo o appartenere al suo bordo.

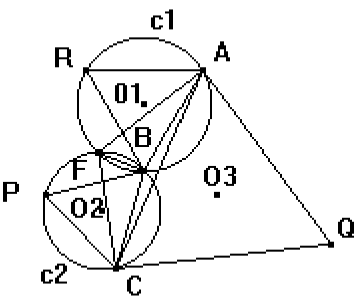

Figura_3_3a

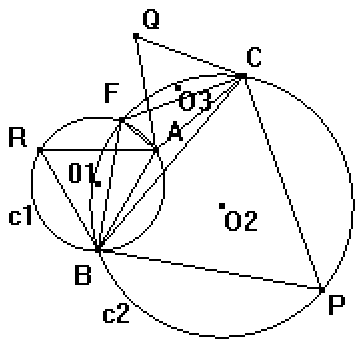

Figura_3_3b

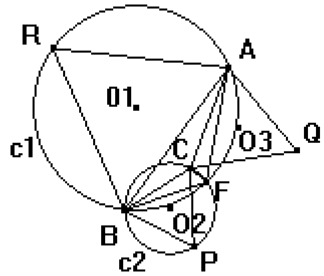

Figura_3_3c

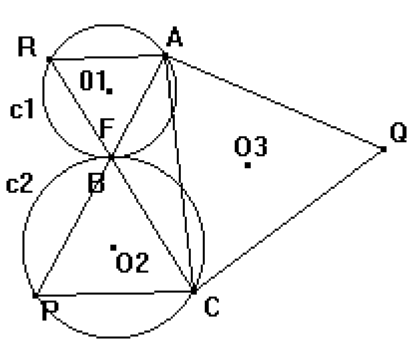

Figura_3_3d

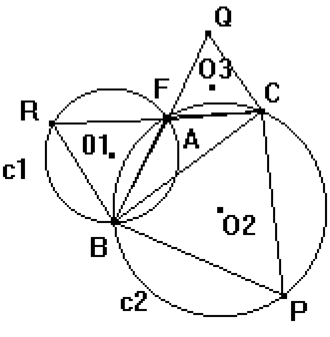

Figura_3_3e

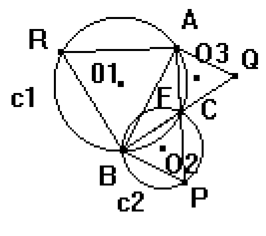

Figura_3_3f

Non abbiamo pertanto dimostrato completamente la nostra congettura 3.2. Dobbiamo dimostrare che il punto F appartiene alla circonferenza c3 anche quando esso non è interno al triangolo.
Ma quando avviene ciò?

Problema 3.4
`La posizione del punto F rispetto al triangolo ABC dipende dall'ampiezza degli angoli del triangolo? In che modo?`

Scheda tratta da:
G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*
Progetto Alice, n. 8 (2002) pp. 175 – 199, n. 9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 –23 pagina 17

SCHEDA 16

Sviluppo del problema 3.4.

Facciamoci aiutare ancora una volta da *Cabri*.
Misuriamo l'ampiezza dei tre angoli del triangolo ABC

- misuriamo con lo strumento **Misura dell'angolo** gli angoli ABC, BCA e CAB

Muoviamo il punto C. Otteniamo essenzialmente i seguenti casi:

A) tutti gli angoli sono del triangolo sono minori di 120°(Figura_3_3): il punto F è interno al triangolo;
B) un angolo è maggiore di 120: (Figure 3_3a, 3_3b, 3_3c) il punto F è esterno al triangolo;
C) un angolo è uguale a 120° (Figure 3_3d, 3_3e, 3_3f): il punto F è uno dei vertici del triangolo.

La dimostrazione di A) non è così semplice come può apparire a prima vista. La omettiamo. Una volta dato per buono A), possiamo sfruttare il teorema 3.2i e ottenere il seguente:
Teorema 3.4i . *Se gli angoli del triangolo ABC sono tutti minori di 120°, allora le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto F interno al triangolo ABC.*

Passiamo al caso B). Consideriamo il caso in cui l'angolo ABC è maggiore di 120° (Figura_3_3a) . Dalle figura appare che:

b1) il punto F e il punto R appartengono allo stesso semipiano delimitato dalla retta passante per A e B;
b2) il punto F e il punto P appartengono allo stesso semipiano delimitato dalla retta passante per B e C;
b3) il punto F e il punto Q appartengono a diversi semipiani delimitati dalla retta passante per A e C;
b4) gli angoli AFB e BFC sono contigui.

Anche in questo caso omettiamo la dimostrazione di queste quattro proprietà.
Sfruttando queste quattro proprietà la dimostrazione è analoga a quella vista nel caso A):
da b1) e b2) segue che gli angoli AFB e BFC sono uguali a 60°; da b4) segue che l'angolo AFC è uguale a 120°; da b3) segue che il quadrilatero AFCQ è inscrivibile in una circonferenza e quindi il punto F appartiene alla circonferenza c3.
Abbiamo dimostrato quel che volevamo in un caso. Dobbiamo esaminare ancora due casi.

Consideriamo ora il caso in cui l'angolo CAB è maggiore a 120° (**Figura_3_3b**). Le proprietà b1), b2), b3), b4) non sono più verificate.
Tentiamo però di procedere in modo analogo al caso precedente. Dobbiamo dimostrare che il quadrilatero ACQF è inscrivibile in una circonferenza.
L'angolo ACQ misura 60°.
Dobbiamo quindi dimostrare che l'angolo QFA misura 120°. La dimostrazione di ciò non è affatto semplice. Ritorneremo tra poco su questo caso.

Analizziamo il caso in cui l'angolo BCA misura più di 120° (**Figura_3_3c**).
Procedendo in modo analogo ai due casi precedenti ci rendiamo conto che dobbiamo dimostrare che l'angolo CFQ misura 120°. Anche in questo caso la dimostrazione non è affatto semplice.

Bene, siamo stati in grado di dimostrare quel che volevamo solo in uno dei tre casi.

Osserviamo di nuovo le nostre tre dimostrazioni.
In tutti e tre i casi abbiamo che uno degli angoli del triangolo originario misura più di 120° gradi.
Siamo stati in grado di dimostrare il teorema solo nel caso in cui l'angolo di misura maggiore di 120° ha vertice nel punto di intersezione B delle due circonferenze.

Ricordiamo che noi abbiamo fissato due delle tre circonferenze di Fermat a priori.

Scheda tratta da:
G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*
Progetto Alice, n. 8 (2002) pp. 175 – 199, n. 9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 –23 pagina 18

Modifichiamo allora leggermente la nostra dimostrazione scegliendo le due circonferenze di Fermat che si intersecano nel vertice dell'angolo di misura maggiore di 120° e dimostrando poi che il loro ulteriore punto F di intersezione appartiene alla terza circonferenza di Fermat.

Più esplicitamente, nel caso in cui l'angolo di misura maggiore di 120° è l'angolo BAC, consideriamo le circonferenze c1 e c3 che si intersecano in A e in F e mostriamo che il punto F appartiene alla circonferenza c2 passante per B, C e P (nella **Figura_3_3b** nascondiamo c2).

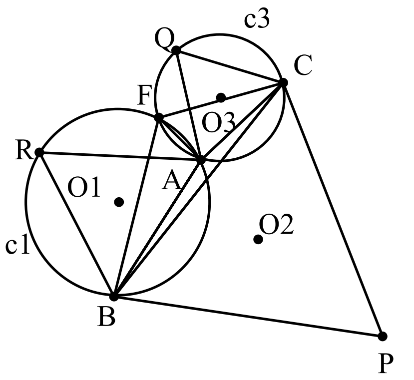

Figura_3_4

Nel caso in cui l'angolo di misura maggiore di 120° è l'angolo BCA, consideriamo le circonferenze c2 e c3 che si intersecano il C e in F e mostriamo che il punto F appartiene alla circonferenza c1 passante per A, B, e R (nella **Figura_3_3c** nascondiamo c1).

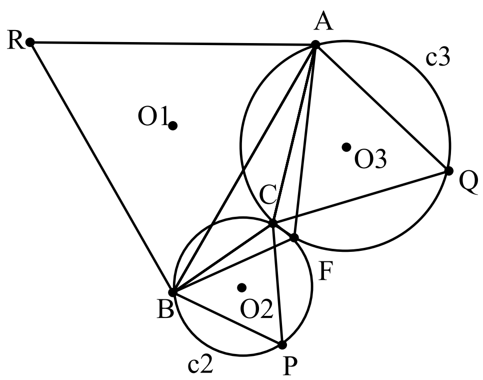

Figura_3_4a

Ovviamente la dimostrazione nei tre casi è identica. Abbiamo dimostrato quindi il seguente:

Teorema 3.4e ("e" sta per "esterno")**.** *Se uno degli angoli del triangolo ABC è maggiore di 120°, allora le tre circonferenze di Fermat si intersecano in un punto F esterno al triangolo ABC.*

Passiamo al caso C) in cui un angolo è uguale a 120°.

Problema 3.5

Disegnare un triangolo avente un angolo di misura uguale a 120° e dimostrare o confutare che le circonferenze di Fermat si intersecano in un punto.

SCHEDA 17

Sviluppo del problema 3.5.

Per disegnare un tale triangolo, disegniamo innanzitutto uno dei lati adiacenti il vertice dell'angolo di misura uguale a 120°. Chiamiamo B tale vertice e A l'altro estremo del lato.
Vogliamo determinare il vertice C in modo tale che l'angolo ABC misuri 120°.

Per far ciò riprendiamo la **Figura_3_2**:

- cancelliamo il punto C ponendo il **Puntatore** sul punto C e premendo il tasto **Canc**.

In tal modo vengono cancellate tutte le costruzioni fatte a partire dal punto C. Rimangono solo il segmento AB, il triangolo ABR, la circonferenza ad esso circoscritta e il suo centro.
Poiché l'angolo ABC deve misurare 120°, il punto C deve appartenere alla semiretta della retta passante per R e B che è delimitata dal punto B e non contiene il punto R. Per disegnarla abbiamo bisogno di un suo punto:

- disegniamo il punto simmetrico R'di R rispetto a B con il comando **Simmetria centrale**;
- disegniamo la semiretta s delimitata da B passante per R' con il comando **Semiretta**;
- disegniamo un punto C sulla semiretta s con il comando **Punto su un oggetto**;
- disegniamo i segmenti BC e AC con il comando **Segmento**.

Ora nascondiamo (non cancelliamo) ciò che non ci interessa più vedere:

- nascondiamo con il comando **Mostra/Nascondi** il punto R'e la semiretta s.

Muovendo il punto C otteniamo tutti i triangoli ABC aventi l'angolo ABC di 120°.

- Disegniamo con la macro **Equilat_Circ_Circ** il triangolo equilatero BCP sul lato BC appartenente al semipiano opportuno; chiamiamo P il terzo punto del triangolo equilatero, c2 la circonferenza circoscritta al triangolo BCP e O2 il suo centro.
- Salviamo la figura nel file **Figura_3_5**.

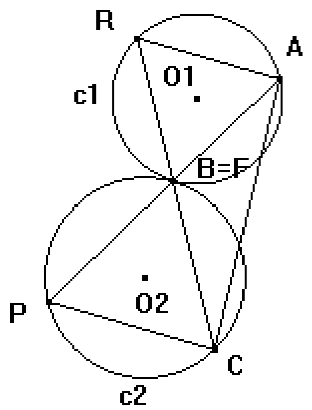

Figura_3_5

Notiamo che dalla figura appare che le circonferenze c1 e c2 si intersecano nel solo punto B.
La dimostrazione di ciò deriva dal fatto che, poiché l'angolo ABC misura 120°, l'angolo O1BO2 misura 180°. I punti O1, B e O2 sono quindi allineati. Le circonferenze c1 e c2 sono pertanto tangenti in B alla retta passante per B perpendicolare alla retta passante per O1 e O2.
Il punto F coincide quindi con il punto B.

- Disegniamo con la macro **Equilat_Circ_Circ** il triangolo equilatero ACQ sul lato BC appartenente al semipiano opportuno e la circonferenza c3 ad esso circoscritta.
- Salviamo la figura nel file **Figura_3_5a**.

La circonferenza c3 appare passare per F (**Figura_3_5a**).

La dimostrazione di ciò è semplice. Poiché l'angolo AFC = ABC misura 120°, il quadrilatero AFCQ è inscritto in una circonferenza e quindi il punto F appartiene alla circonferenza c3.

Scheda tratta da:
G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*
Progetto Alice, n. 8 (2002) pp. 175 – 199, n. 9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 –23 pagina 20

Abbiamo dimostrato quel che volevamo. In definitiva abbiamo dimostrato il seguente:
Teorema 3.3b ("b" sta per "bordo")**.** *Se uno degli angoli del triangolo ABC è uguale a 120°, allora le tre circonferenze di Fermat si intersecano nel vertice dell'angolo uguale a 120°.*
I teoremi 3.3i, 3.3e, 3.3b possono essere riassunti nel seguente:

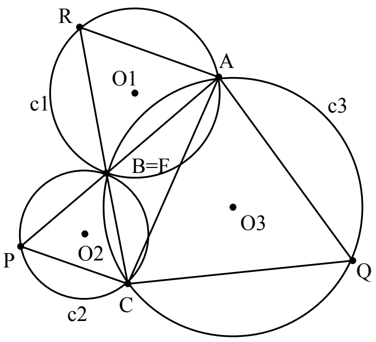

Figura_3_5_a

Teorema 3.3. *Le circonferenze di Fermat di un triangolo si intersecano in un punto. Lo chiamiamo **punto di Fermat**.*

È interessante notare le differenze tra la **Figura_3_5a** e la **Figura_3_3d**.
Abbiamo costruito la **Figura_3_5a** in modo tale che l'angolo ABC sia effettivamente di 120°. Nella **Figura_3_3d** invece abbiamo costruito dapprima un generico triangolo ABC e poi, muovendo il vertice C, abbiamo fatto in modo che il punto F si approssimi al punto B e quindi l'angolo ABC misuri approssimativamente 120°.
Anche la **Figura_3_3e** e la **Figura_3_3f** rappresentano triangoli aventi un angolo di misura approssimativamente uguale a 120°. Ci conviene sostituirle con disegni precisi.
Abbiamo visto come disegnare, a partire da un lato AB, un triangolo avente un angolo adiacente ad esso uguale a 120°. Nella seguente figura l'angolo BAC misura 120°. Lasciamo come esercizio la costruzione di questa figura a partire dalla **Figura_3_2**.

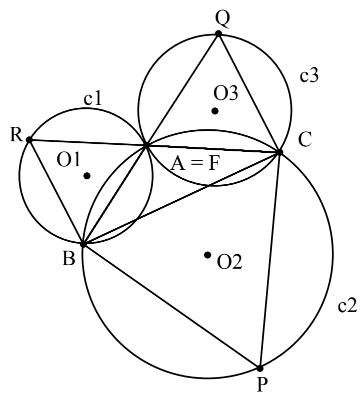

Figura_3_5b
Rimane da considerare il caso in cui l'angolo BCA misura 120°.

```
                    Problema 3.6

  Fissato un segmento AB, disegnare un triangolo ABC avente
 l'angolo BCA di misura uguale a 120° e disegnare le circonferenze
 di Fermat.
```

Scheda tratta da:
G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*
Progetto Alice, n. 8 (2002) pp. 175 – 199, n. 9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 –23

SCHEDA 18

Sviluppo del problema 3.6.

Per far ciò riprendiamo la **Figura_3_2**:
- cancelliamo il punto C ponendo il **Puntatore** sul punto C e premendo il tasto **Canc**.

Rimane il segmento AB, il punto R e la circonferenza di Fermat c1. Vogliamo determinare tutti i punti C appartenenti al semipiano delimitato dalla retta passante per A e B non contenente il punto R tali che l'angolo BCA misuri 120°.
Ingrandiamo il segmento AB per rendere più intelligibile la figura.
Notiamo che l'angolo ARB misura 60°. Il punto C deve quindi appartenere all'arco della circonferenza c1 delimitato dai punti A e B non contenente R.
Per determinare tale arco dobbiamo determinare un suo punto. Possiamo prendere il punto R' simmetrico di R rispetto a O1.
- Disegniamo il punto simmetrico di R rispetto a 01 con il comando **Simmetria centrale**; chiamiamolo R';
- disegniamo l'arco s di circonferenza di estremi A e B passante per R' con il comando **Arco di circonferenza**;
- nascondiamo con il comando **Mostra/Nascondi** il punto R'e l'arco s.
- disegniamo un punto, che chiamiamo C, sull'arco s con il comando **Punto su un oggetto**;
- disegniamo i segmenti BC e AC con il comando **Segmento**.

Muovendo il punto C otteniamo tutti i triangoli ABC aventi l'angolo BCA di 120°.
- Disegniamo con la macro **Equilat_Circ_Circ** il triangolo equilatero BCP sul lato BC appartenente al semipiano opportuno;
- chiamiamo P il terzo punto del triangolo equilatero, c2 la circonferenza circoscritta al triangolo BCP e O2 il suo centro.
- - Salviamo la figura nel file **Figura_3_6.fig**.

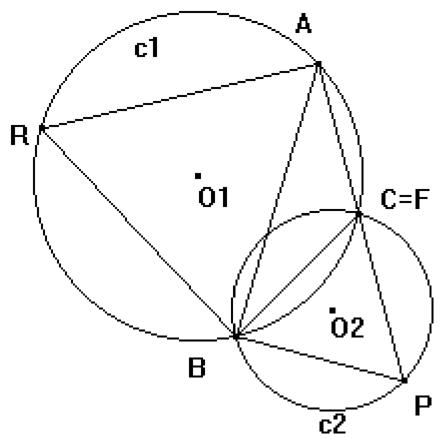

Figura_3_6

Notiamo che dalla figura appare che le circonferenze c1 e c2 si intersechino nel punto B e nel punto C. La dimostrazione di ciò è implicita nella costruzione che abbiamo fatto del punto C. Il punto C infatti appartiene alla circonferenza c1. Il punto F coincide quindi con il punto B.
- Disegniamo con la macro **Equilat_Circ_Circ** il triangolo equilatero ACQ sul lato BC appartenente al semipiano opportuno e la circonferenza c3 ad esso circoscritta.

Ovviamente la circonferenza c3 passa per F = C.

Scheda tratta da:
G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*
Progetto Alice, n. 8 (2002) pp. 175 – 199, n. 9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 –23 pagina 22

4. Punto di Fermat.
Torniamo al caso particolare in cui il triangolo ABC ha un angolo di 120° (**Figura_3_5a**, **Figura_3_5b**, **Figura_3_6.** In quest'ultima figura aggiungiamo il triangolo ACQ e la circonferenza c3). In ognuna di esse appare che

1) i punti F, A e P sono allineati;
2) i punti F, B e Q sono allineati;
3) i punti F, R e C sono allineati;
4) i segmenti AP, BQ e CR hanno uguale lunghezza.

Proviamo a misurare i segmenti AP, BQ e CR con *Cabri*. Selezioniamo lo strumento **distanza e lunghezza** e misuriamo i segmenti AP, BQ e CR. Nella **Figura_4_1** mostriamo ciò che avviene a partire dalla **Figura_3_5_a**.
Cabri ci mostra che, al variare del punto C, i segmenti sono sempre uguali tra loro. Nei casi della **Figura_3_5b** e della **Figura_3_6** la situazione è analoga. Vogliamo dimostrare o confutare ciò che ci mostra *Cabri*.

```
                          Problema 4.1

  Dimostrare o confutare che, dato un triangolo ABC con un angolo
di 120° , si ha:
  1) i punti F, C e R sono allineati;
  2) i punti F, A e P sono allineati;
  3) i punti F, B e Q sono allineati;
  4) i segmenti AP, BQ e CR hanno uguale lunghezza.
```

SCHEDA 19

Sviluppo del problema 4.1.

Studiamo il caso in cui l'angolo ABC misura 120°.

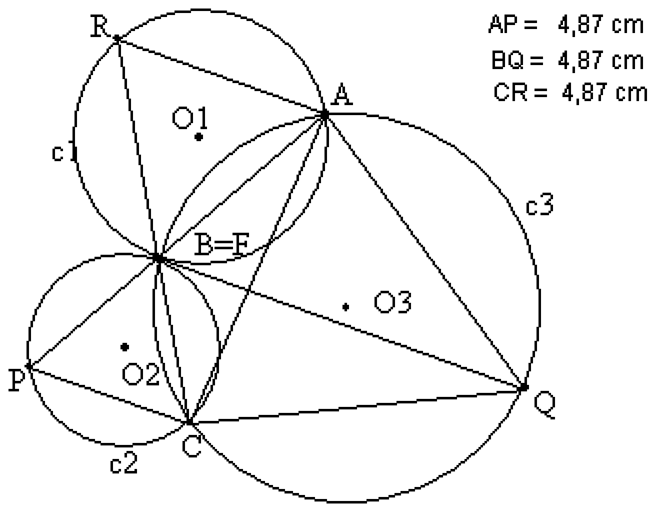

Figura_4_1

Ormai sappiamo che gli altri due casi si riconducono a questo semplicemente rinominando i punti.
I punti F, C e R sono allineati perché gli angoli RFA e ABC sono supplementari.
I punti F, A e P sono allineati perché gli angoli AFC e PFC sono supplementari.
I punti F, B e Q sono ovviamente allineati perché B e F coincidono.

Dimostriamo la quarta proprietà.
È facile dimostrare che AP e RC hanno la stessa lunghezza. Infatti

$$AP = AB + BP = RB + BC = RC.$$

Dobbiamo ora dimostrare che il segmento BQ ha la stessa lunghezza dei segmenti AP e RC.
Dal teorema 2.6 segue BQ = BA + BC. Essendo BA = RB, abbiamo

$$BQ = RB + BC = RC.$$

Abbiamo dimostrato ciò che volevamo.

Problema 4.2

Le quattro proprietà viste per triangoli che hanno un angolo di misura uguale a 120° sono valide per qualsiasi triangolo?

Scheda tratta da:
G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*
Progetto Alice, n. 8 (2002) pp. 175 – 199, n. 9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 –23 pagina 24

SCHEDA 20

Sviluppo del problema 4.2.

Esploriamo il problema con *Cabri*. Riprendiamo la **Figura_3_2**.

- Con lo strumento **Mostra/Nascondi** mostriamo la circonferenza c3**;**
- con lo strumento **Retta** disegniamo le rette passanti per A e P, per Q e B, per C e R;
- salviamo la figura nel file **Figura_4_2.fig**.

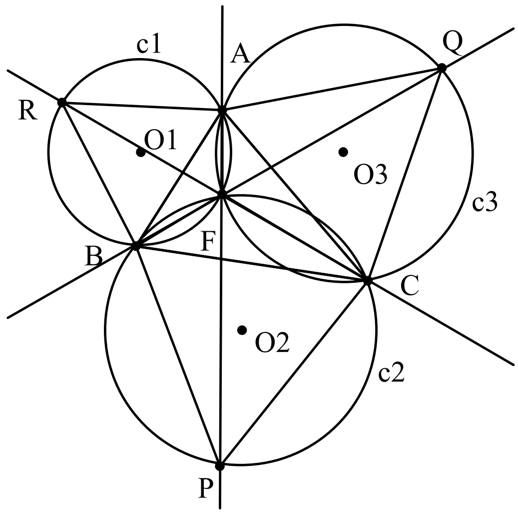

Figura_4_2

Dalla figura sembra che i punti siano allineati.
Dimostriamolo:

- il punto F è allineato con R e C perché gli angoli RFA e AFC sono supplementari;
- il punto F è allineato con B e Q perché gli angoli BFC e CFQ sono supplementari;
- il punto F è allineato con A e P perché gli angoli AFC e CFP sono supplementari.

Abbiamo dimostrato le tre proprietà nel caso in cui il punto F sia interno al triangolo ABC.

Esaminiamo ora il caso in cui F sia esterno.
Consideriamo il caso in cui l'angolo ABC sia maggiore di 120° (gli altri due casi come al solito possono essere ricondotti a questo).

Scheda tratta da:
G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*
Progetto Alice, n. 8 (2002) pp. 175 – 199, n. 9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 –23 pagina 25

Riprendiamo la **Figura_3_3a**.

- con lo strumento **Retta** disegniamo le rette passanti per A e P, per Q e B, per C e R;
- salviamo la figura nel file **Figura_4_2a.fig**.

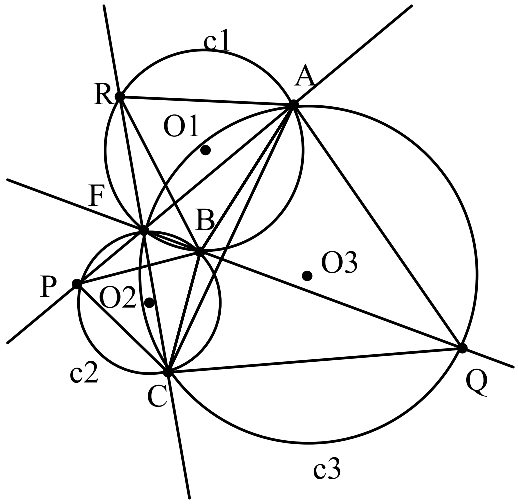

Figura_4_2a

Anche in questo caso i punti paiono essere allineati. Dimostriamolo.
Le dimostrazioni che R, F, C e A, F, P sono allineati sono identiche a quelle svolte nel caso precedente.
Dimostriamo che F è allineato con B e Q.
Gli angoli AFB e AFQ misurano entrambi 60° e quindi, poiché B e Q appartengono allo stesso semipiano delimitato dalla retta passante per A e F, i punti F, B e Q sono allineati.

Abbiamo quindi dimostrato completamente le prime tre proprietà.

Passiamo alla quarta proprietà.
Vogliamo verificare se si ha AP = BQ = CR.

Facciamo innanzitutto un'esplorazione con *Cabri*.
Iniziamo con il caso in cui il punto F sia interno al triangolo.

Riprendiamo la **Figura_4_2**.

- Selezioniamo lo strumento **distanza e lunghezza** e misuriamo i segmenti AP, BQ e CR;
- salviamo la figura nel file **Figura_4_2b.fig**.

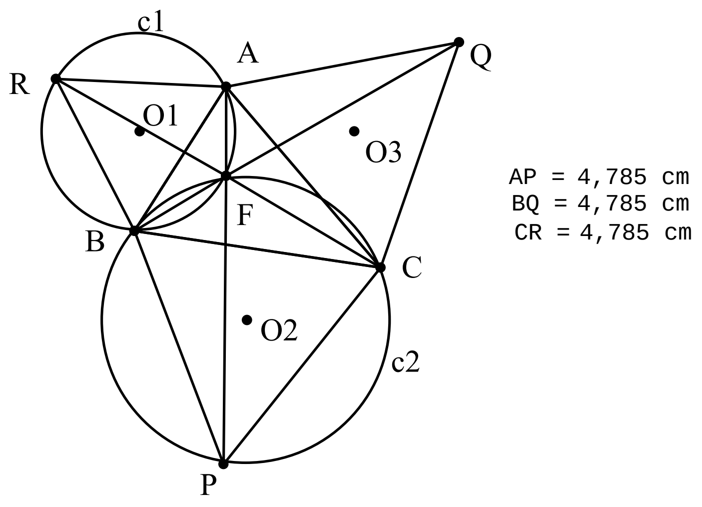

Figura_4_2b

Cabri ci mostra che i segmenti sono uguali. Dimostriamolo.
L'uguaglianza dei segmenti segue da:

$$AP = AF + FP = AF + FC + FB = QF + FB = QB$$

$$CR = CF + FR = CF + AF + BF = QF + FB = QB$$

Consideriamo ora il caso in cui un angolo del triangolo ABC sia maggiore di 120°.
Riprendiamo la **Figura_4_2a**.

- Selezioniamo lo strumento **distanza e lunghezza** e misuriamo i segmenti AP, BQ e CR;
- Salviamo la figura nel file **Figura_4_2c.fig**.

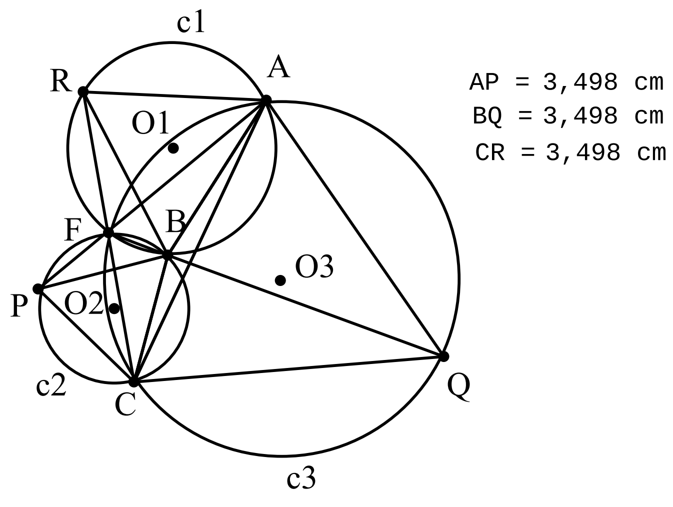

Figura_4_2c

Anche in questo caso sembra che i tre segmenti siano uguali. Dimostriamolo.

$$AP = AF + FP = AF + FC - BF = FQ - BF = BQ$$
$$CR = CF + FR = CF + AF - BF = FQ - BF = BQ$$

Abbiamo in definitiva:

Teorema 4.2. *Dato un triangolo ABC, costruiti sui suoi lati i triangoli equilateri ABR, ACQ e BCP esterni ad esso e il punto F di Fermat, si ha:*

1) *i punti F, A e P sono allineati;*
2) *i punti F, B e Q sono allineati;*
3) *i punti F, R e C sono allineati;*
4) *i segmenti AP, BQ e CR hanno uguale lunghezza.*

Vogliamo ora analizzare in particolare il caso in cui il triangolo ABC abbia tutti gli angoli di misura minore di 120°.
Riprendiamo la **Figura_4_2b** e consideriamo le distanze del punto di Fermat dai vertici del triangolo:

- misuriamo con lo strumento **Distanza e lunghezza** la lunghezza dei segmenti AF, BF e CF.

Notiamo che la somma delle tre lunghezze è uguale alla lunghezze dei segmenti AP, BQ e CR.
Possiamo anche far fare i calcoli direttamente a C*abri*

- con lo strumento **Calcolatrice** calcoliamo la somma delle lunghezze dei segmenti AF, BF e CF. Inseriamo il risultato nella parte inferiore della figura;
- salviamo la figura nel file **Figura_4_2d.fig**.

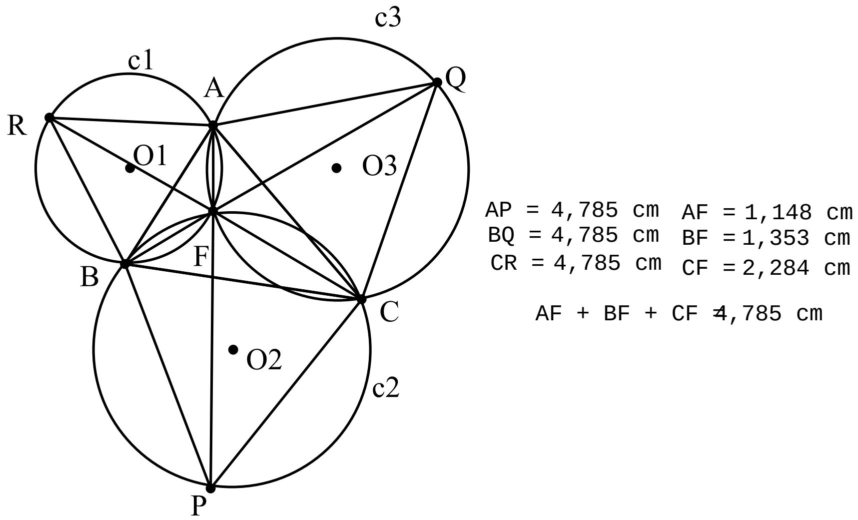

Figura_4_2d

Problema 4.3
`Dimostrare o confutare l'affermazione`
$AF + BF + CF = AP = BQ = CR$
`sia nel caso in cui il punto F sia interno al triangolo, sia che sia esterno, sia che appartenga al bordo del triangolo.`

SCHEDA 21

Sviluppo del problema 4.3.

Analizziamo innanzitutto il caso in cui tutti gli angoli del triangolo abbiano misura minore di 120° (**Figura_4_2d**).
Dal teorema 2.6. segue AF+BF=RF e quindi:

$$AF + BF + CF = RF + CF = RC = AP = BQ$$

Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:

Teorema 4.3 *Dato un triangolo ABC avente tutti gli angoli di misura minore di 120°, costruiti sui suoi lati i triangoli equilateri ABR, ACQ e BCP esterni ad esso e il punto F di Fermat, si ha:*

$$AF + BF + CF = RC = AP = BQ$$

Esaminiamo ora il caso in cui uno degli angoli del triangolo sia maggiore di 120°. Facciamoci aiutare da *Cabri*
Consideriamo la **Figura_4_2c** e operiamo su essa così come abbiamo fatto nel caso precedente:

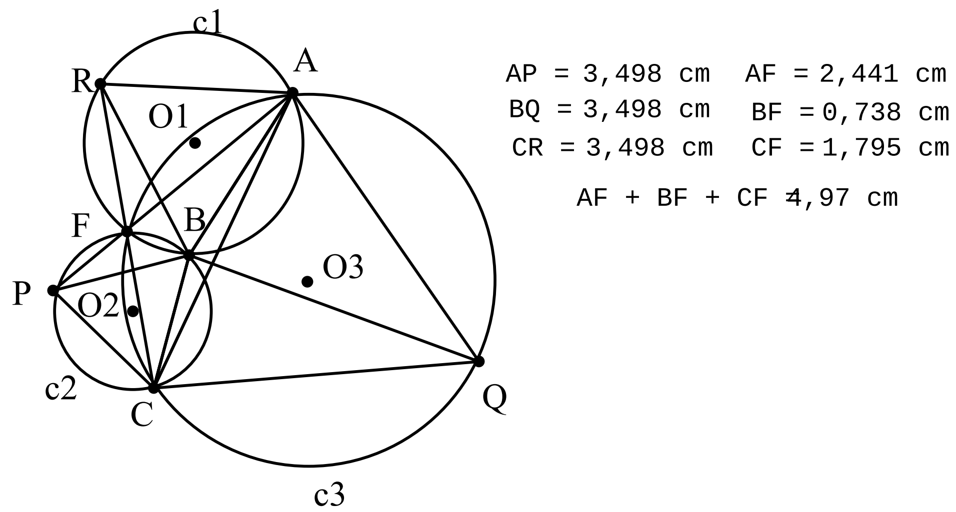

Figura_4_3

Il teorema 4.3 non è generalizzabile al caso in cui F sia esterno al triangolo.
Lasciamo al lettore l'esame dei casi in cui uno dei tre angoli del triangolo ABC misuri 120°.

Scheda tratta da:
G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*
Progetto Alice, n. 8 (2002) pp. 175 – 199, n. 9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 –23 pagina 29

SCHEDA 22

4.4 Un'altra proprietà del punto di Fermat[1]

Ritorniamo al caso in cui il triangolo ABC ha tutti gli angoli di misura minore di 120° (**Figura_ 4_2**).
Vogliamo ora dimostrare che il punto di Fermat ha un'altra interessante proprietà che viene evidenziata dalla dimostrazione del teorema 4.2.
Quest'ultima si basa sul fatto, dimostrato nel teorema 2.4, che si ha

$$AF + BF = RF.$$

Riprendiamo in esame la dimostrazione del teorema 2.6 in questo caso.
Utilizziamo la **Figura_4_2d** e modifichiamola per renderla più intelligibile.

- Con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo le rette RQ, AP e RC;
- Con lo strumento **Segmento** disegniamo il segmento RF;
- con la macro **Equilat** costruiamo il punto F', terzo vertice del triangolo equilatero di lato BF interno alla circonferenza c1.

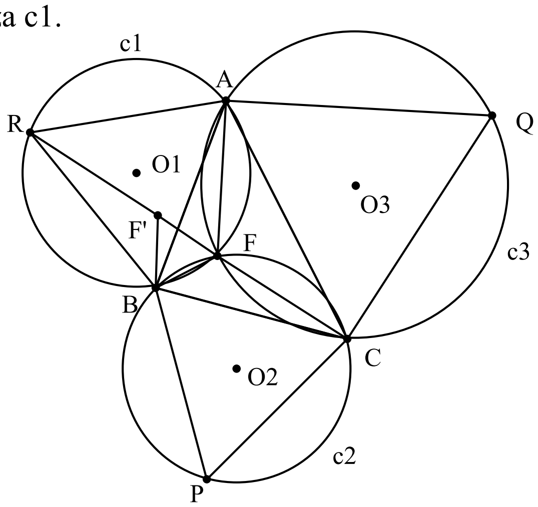

Figura_4_4

Nella dimostrazione del teorema 2.6 abbiamo visto che il punto F' appartiene al segmento RC. Abbiamo anche visto che i segmenti RF' e F'F hanno lunghezza uguale rispettivamente ai segmenti AF e BF.
La costruzione ci ha permesso di disegnare una poligonale CFF'R di lunghezza uguale alla somma delle lunghezze dei segmenti AF, BF e CF.
Ripetiamo la stessa costruzione per un qualsiasi punto G interno al triangolo ABC.
Riprendiamo la **Figura_4_2d**:

- Con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo le rette RQ, AP e RC;
- con lo strumento **Punto** disegniamo un punto G interno al triangolo ABC;
- con la macro **Equilat** costruiamo il punto G', terzo vertice del triangolo equilatero di lato BG interno alla circonferenza c1;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo il segmento RG' e i segmenti AG, BG e CG.
- misuriamo con lo strumento **Distanza e lunghezza** la lunghezza dei segmenti AG, BG e CG.

[1] **Nota.** Si può in una prima lettura saltare questa scheda poiché la proprietà in essa studiata non verrà utilizzata in seguito.

- con lo strumento **Calcolatrice** calcoliamo la somma delle lunghezze dei segmenti AG, BG e CG; inseriamo il risultato nella parte destra della figura;
- salviamo la figura nel file **Figura 4_4a.fig**.

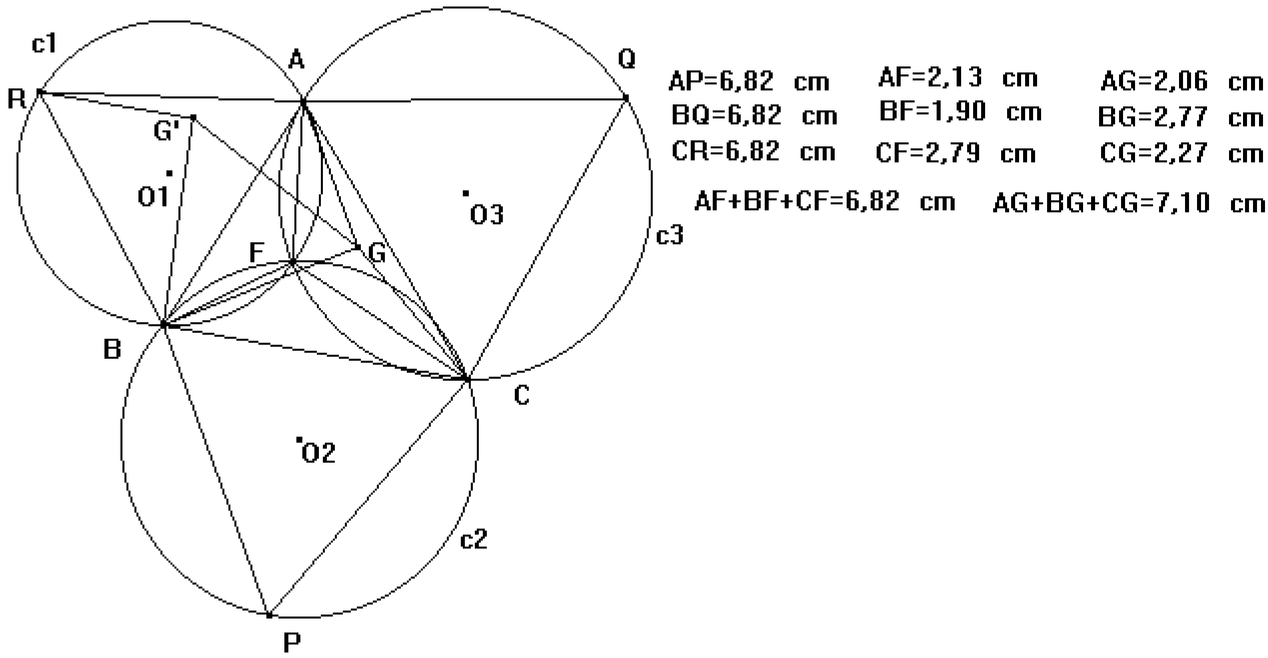

Figura_4_4a

Se ora muoviamo il punto G all'interno del triangolo ABC, notiamo che la somma delle sue distanze dai vertici A, B e C è maggiore o uguale alla somma delle distanze di F da A, B,C. Si ottiene l'uguaglianza solo quando il punto G coincide con il punto F.
Vogliamo dimostrare ciò.
Notiamo che la rotazione intorno a B di 60° in senso orario porta il triangolo BG'R nel triangolo BGA e quindi i segmenti RG' e AG sono uguali.
Pertanto la poligonale CGG'R ha per lunghezza la somma delle lunghezze dei segmenti CG, BG e AG.
Al variare di G la costruzione precedente disegna tutte le possibili poligonali da C a R che hanno per lunghezza la somma delle lunghezze della distanza del punto G dai vertici del triangolo ABC.
Tra tutte le poligonali quella di lunghezza minima è quella che ha i punti allineati. Sappiamo che C, F, F' e R sono allineati. Quindi, se G coincide con F, la poligonale CR ha lunghezza minima.
Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:

Teorema 4.4. *Dato un triangolo avente tutti gli angoli di misura minore di 120°, il suo punto di Fermat è il punto interno al triangolo tale che la somma delle sue distanze dai vertici del triangolo sia minima.*