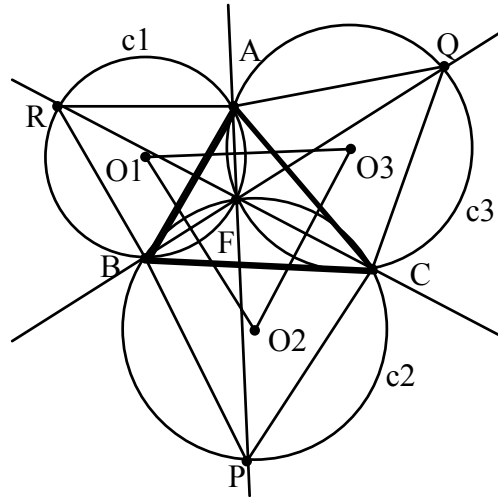


SCHEDA 23

5. Il teorema di Napoleone

Riprendiamo la **Figura_4_2**.

- Con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti O_1O_2 , O_2O_3 , O_3O_1 .



Figura_5_1

Appare che la retta AP è perpendicolare alla retta O_1O_3 , la retta BQ è perpendicolare alla retta O_1O_2 , la retta CR è perpendicolare alla retta O_2O_3 .

Problema 5.1.

Dimostrare o confutare le affermazioni precedenti.

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 32

SCHEMA 24

Sviluppo del problema 5.1.

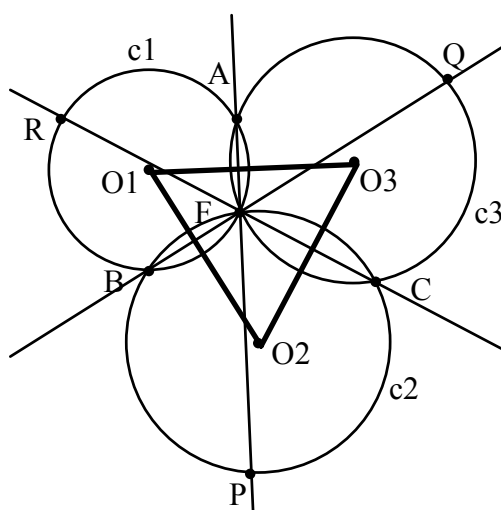
Nascondiamo nel nostro disegno ciò che non ci interessa:

- con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo il triangolo ABC e i tre triangoli equilateri esterni al triangolo ABC .

Ricordiamo che la retta AP coincide con la retta AF . Ora è chiaro che la retta passante per A e P è asse radicale delle circonferenze $c1$ e $c3$ e pertanto è perpendicolare alla retta congiungente i loro centri.

In modo analogo si dimostrano le altre due perpendicolarità.

Notiamo che nella nostra dimostrazione non abbiamo fatto alcun uso del fatto che il punto F sia interno al triangolo. Abbiamo infatti sfruttato solamente la proprietà dell'asse radicale di essere perpendicolare alla retta congiungente i centri.



Figura_5_2

Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:

Teorema 5.1. *Dato un triangolo ABC , costruiti sui suoi lati i triangoli equilateri ABR , ACQ e BCP esterni ad esso, le tre circonferenze $c1$, $c2$, $c3$ circoscritte ad essi e i loro centri $O1$, $O2$ e $O3$, si ha che la retta AP è perpendicolare alla retta $O1O3$, la retta BQ è perpendicolare alla retta $O1O2$, la retta CR è perpendicolare alla retta $O2O3$.*

Notiamo che nella figura il triangolo $O1O2O3$ appare equilatero.

Problema 5.2.

Dimostrare o confutare l'affermazione che il triangolo $O1O2O3$ è equilatero determinando la misura dei suoi angoli.

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

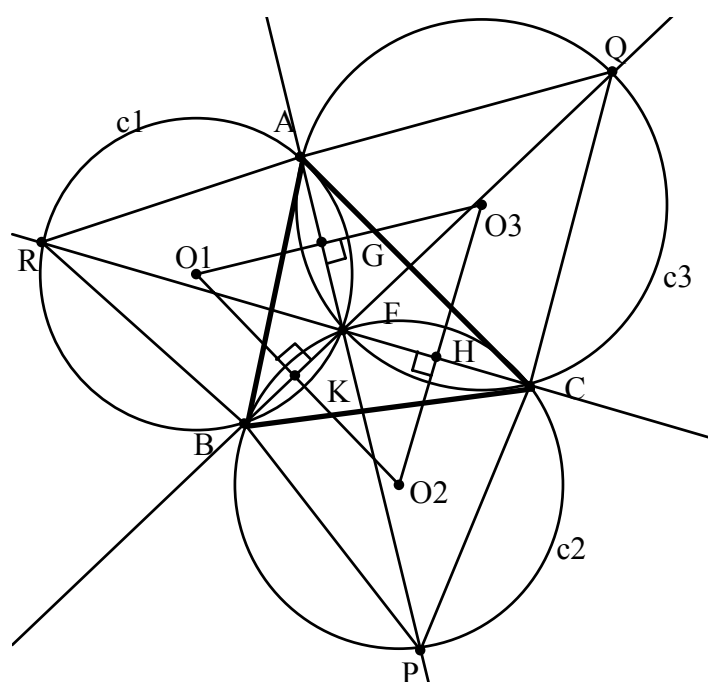
Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 33

SCHEMA 25

Sviluppo del problema 5.2.

Diamo un nome ai punti di intersezione degli assi radicali con le rette congiungenti i centri.

- Con lo strumento **Intersezione di oggetti** disegniamo il punto G di intersezione della retta AP con il segmento O_1O_3 , il punto H di intersezione della retta CR con il segmento O_2O_3 , il punto K di intersezione della retta BQ con il segmento O_1O_2 ;
- Con lo strumento **Segna un angolo** segniamo gli angoli O_3GP , O_2HR e O_1KQ . *Cabri* indica che essi sono retti. Abbiamo già dimostrato ciò.
- Con lo strumento **Mostra/Nascondi** mostriamo i triangoli ABC, ABR, ACQ e BCP.



Figura_5_3

Vogliamo dimostrare che l'angolo $O_3O_1O_2$ misura 60° .

Tale angolo coincide con l'angolo GO_1K . Notiamo allora che il quadrilatero $GFKO_1$ è convesso e quindi la somma dei suoi angoli interni è uguale ad un angolo giro. Ma due dei suoi angoli sono retti, l'angolo GFK , poiché coincide con l'angolo AFB , misura 120° e quindi l'angolo GO_1K misura 60° .

Possiamo dimostrare in modo analogo che gli altri angoli del triangolo $O_3O_1O_2$ hanno misura uguale a 60° . Pertanto il triangolo $O_3O_1O_2$ è equilatero.

Problema 5.3.

Cosa possiamo dedurre da tutto ciò?

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 34

SCHEDA 26

Sviluppo del problema 5.3.

A prima vista appare che abbiamo dimostrato l'affermazione del problema 5.2: il nostro triangolo è equilatero.

In effetti notiamo che abbiamo sfruttato in vari punti che il punto F è interno al triangolo ABC. Abbiamo quindi dimostrato l'affermazione 5.2. solo nel caso in cui tutti gli angoli del triangolo ABC abbiano misura minore di 120° . Abbiamo pertanto il seguente teorema che si dice essere stato scoperto da Napoleone:

Teorema 5.2.i (“i” sta per “interno”). Teorema di Napoleone. *Dato un triangolo ABC avente tutti gli angoli di misura minore di 120° , il triangolo di vertici i centri delle sue circonferenze di Fermat è equilatero.*

Ci chiediamo se il teorema di Napoleone sia estendibile a tutti i triangoli¹.

Per verificare ciò dobbiamo analizzare anche il caso in cui F appartenga al bordo del triangolo ABC e il caso in cui F sia esterno al triangolo.

Lo studio del caso in cui il punto F appartenga al bordo è molto semplice. Viene lasciato per esercizio.

Studiamo ora il caso in cui il punto F sia esterno al triangolo.

Per studiare questo caso ci conviene partire dalla Figura_5_3, ruotare in senso orario il punto C intorno a B in modo tale che il punto F esca dal triangolo ABC passando per il punto B.

Notiamo innanzitutto che l'etichetta F è assegnata al punto B invece che all'altro punto di intersezione delle circonferenze c_1 e c_2 . Pertanto:

- cancelliamo l'etichetta F e assegniamo l'etichetta F al punto di intersezione di c_1 con c_2 diverso da B.

- con lo strumento **Intersezione di oggetti** disegniamo il punto L di intersezione della retta RC con il segmento O_1O_2 e il punto M di intersezione della retta PA con il segmento O_1O_2 .

Vogliamo mostrare che l'angolo $O_3O_1O_2$ misura 60° .

Esso coincide con l'angolo GO_1M .

Consideriamo allora i triangoli MGO_1 e FKM .

Essi hanno gli angoli MGO_1 e FKM retti e gli angoli O_1MG e FMK opposti al vertice. Pertanto anche gli angoli GO_1M e KFM (coincidente con l'angolo BFA) sono uguali. Ma quest'ultimo angolo misura 60° .

Abbiamo dimostrato che l'angolo $O_3O_1O_2$ misura 60° .

La dimostrazione che l'angolo $O_1O_2O_3$ misura 60° è analoga. In questo caso si considerano i triangoli FKL e O_2HL .

Deduciamo da tutto ciò che il triangolo $O_1O_2O_3$ è equilatero.

¹ **Nota.** In quel segue proveremo a dimostrare la validità del teorema di Napoleone per qualunque triangolo.

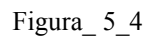
Dal momento che ciò che segue non sarà usato nei successivi paragrafi, volendo, si può passare direttamente al successivo paragrafo.

In ogni caso nell'ultimo paragrafo daremo una diversa dimostrazione del teorema di Napoleone per un qualsiasi triangolo.

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 35



Cosa possiamo dedurre da tutto ciò?

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 36

SCHEMA 27

Sviluppo del problema 5.4.

A prima vista appare che abbiamo finalmente dimostrato l'affermazione del problema 5.2: il nostro triangolo è equilatero.

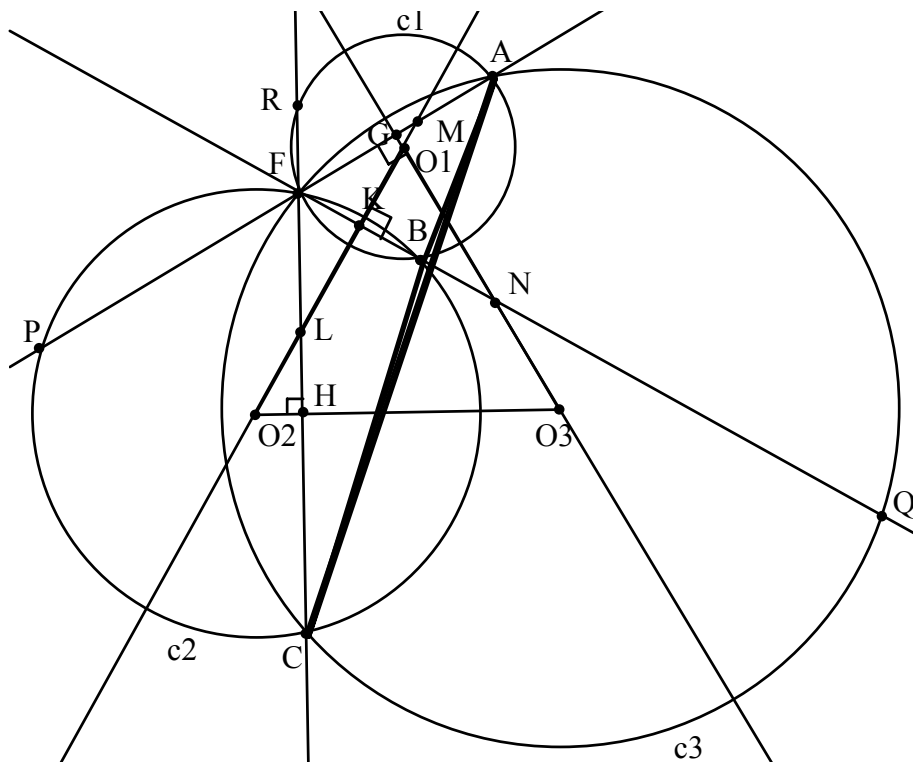
In effetti la situazione è un po' più complicata. La nostra dimostrazione si basa infatti sui punti di intersezione delle rette RC e PA con il segmento O1O2.

Muovendo il punto C ci accorgiamo che la retta AP non interseca il segmento O1O2 quando la retta AP non interseca il segmento O1O3.

Dobbiamo ancora una volta modificare la nostra dimostrazione.

Intanto modifichiamo la figura.

- Con lo strumento **Retta** disegniamo la retta O1O2 e con il comando **Ridefinizione di un oggetto** definiamo il punto M come intersezione della retta AP con la retta O1O2 (e non più con il segmento O1O2);
- con lo strumento **Retta** disegniamo la retta O1O3 e con il comando **Ridefinizione di un oggetto** definiamo il punto G come intersezione della retta AP con la retta O1O3 (e non più con il segmento O1O3).



Figura_5_5

A questo punto la dimostrazione precedente cambia di poco. Continuiamo a considerare i triangoli rettangoli MGO1 e KFM; essi hanno un angolo in comune. Quindi gli angoli M01G e MFK sono uguali. Ma il primo dei due angoli è opposto al vertice dell'angolo O3O1O2 mentre il secondo coincide con l'angolo AFB e quindi misura 60° . Abbiamo dimostrato che l'angolo O3O1O2 misura 60° . La dimostrazione che l'angolo O3O2O1 misura 60° rimane invariata.

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 37

Non dimostriamo che non vi siano altri casi possibili.

Abbiamo pertanto dimostrato (quasi completamente) il teorema di Napoleone nel caso di un triangolo qualsiasi.

5.2 Teorema di Napoleone. *Dato un triangolo ABC, il triangolo avente come vertici i centri delle sue circonferenze di Fermat è equilatero.*

6. Triangoli equilateri circoscritti a triangoli.

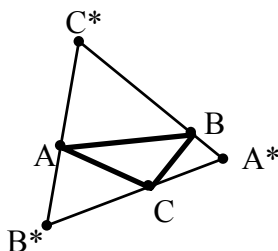
In tutti i problemi esaminati fino ad ora non abbiamo mai trovato grandi difficoltà nel disegnare con *Cabri* le figure proposte. Le difficoltà sono di solito nate nel momento in cui abbiamo cercato di dimostrare ciò che le figure costruite suggerivano.

Vogliamo ora studiare un problema nel quale la prima difficoltà risiede proprio nella costruzione della figura con *Cabri*.

Consideriamo il seguente problema descritto a pagina 25 del libro di Maria Dedò *Trasformazioni geometriche*, Decibel, Zanichelli, Bologna, 1996

Problema 6.1.

Dato un triangolo ABC, determinare un triangolo equilatero A^*, B^*, C^* ad esso circoscritto.



Figura_6_1

Il problema non è di facile soluzione. Diamo pertanto qualche suggerimento.

Scheda tratta da:

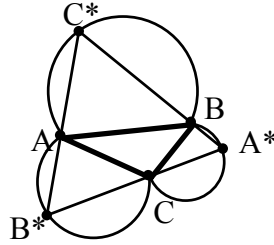
G. Accascina, G. Margiotto *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 38

SCHEDA 28

Sviluppo del problema 6.1.

Mostriamo alcuni particolari che nella **Figura_6_1** avevamo nascosto.



Figura_6_2

Riproponiamo il nostro problema.

Problema 6.2.

Determinare un triangolo equilatero circoscritto al triangolo ABC.

Scheda tratta da:

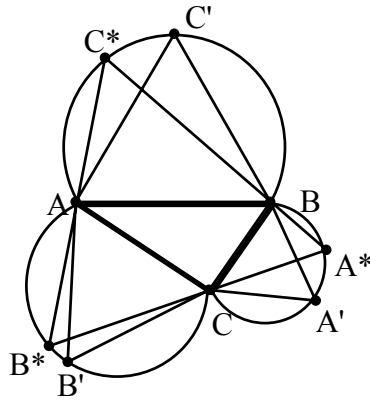
G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 39

SCHEDA 29

Sviluppo del problema 6.2.

Forse il problema non è ancora di facile soluzione. Mostriamo allora qualche altro particolare e riproponiamo il nostro problema.



Figura_6_3

Problema 6.3.

Determinare un triangolo equilatero circoscritto al triangolo ABC.

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotto *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 40

SCHEDA 30

Sviluppo del problema 6.3.

Ora dovrebbe essere tutto chiaro. Gli archi di circonferenza disegnati sono archi delle circonferenze di Fermat del triangolo ABC. Questi archi sono i luoghi dei punti del piano esterni al triangolo che vedono i tre lati con angoli di 60° .

La costruzione di un triangolo $A^*B^*C^*$ circoscritto al triangolo ABC è presto fatta.

Scegliamo un qualsiasi punto C^* sull'arco $AC'B$ e da esso conduciamo le semirette passanti per A e B.

Esistono pertanto infiniti triangoli equilateri che circoscrivono il triangolo ABC.

Descriviamo in tutti i suoi particolari l'algoritmo di costruzione di un triangolo equilatero circoscritto al triangolo ABC.

- Con gli strumenti **Punto** e **Segmento** disegniamo tre punti A, B e C e i lati del triangolo ABC;
- con la macro **Equilat** disegniamo i tre triangoli equilateri ABC' , ACB' , BCA' esterni al triangolo;
- con lo strumento **Arco di circonferenza** disegniamo gli archi di circonferenza $AC'B$, $AB'C$ e $BA'C$;
- con lo strumento **Punto su un oggetto** disegniamo un punto C^* sull'arco $AC'B$;
- con lo strumento **Semiretta** disegniamo la semiretta s di origine C^* passante per A;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto B^* di intersezione della semiretta s con l'arco di circonferenza $AB'C$;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo il segmento C^*B^* ;
- con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo la semiretta s;
- con lo strumento **Semiretta** disegniamo la semiretta s' di origine C^* passante per B;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto A^* di intersezione della semiretta s' con l'arco di circonferenza $CA'B$;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo il segmento C^*A^* ;
- con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo la semiretta s';
- con lo strumento **Segmento** disegniamo il segmento A^*B^* .

Il triangolo $A^*B^*C^*$ è uno dei triangoli equilateri circoscritti al triangolo ABC. Muovendo il punto C^* sull'arco $AC'B$ otteniamo tutti i triangoli equilateri circoscritti al triangolo ABC.

Problema 6.4.

Abbiamo risolto completamente il nostro problema?

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

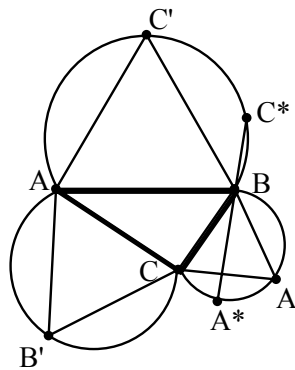
Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 41

SCHEMA 31

Sviluppo del problema 6.4.

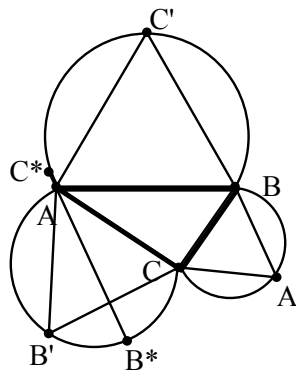
In effetti dobbiamo ancora mettere in luce alcuni particolari.

Notiamo innanzitutto che, se spostiamo il punto C^* in vicinanza del punto B , non appare più il punto B^* .



Figura_6_4

Analogamente, se spostiamo il punto C^* in vicinanza del punto A , non appare il punto A^* .



Figura_6_5

Ci siamo resi conto che non possiamo scegliere il punto C^* in un punto qualsiasi dell'arco $AC'B$.
Ci poniamo allora il seguente:

Problema 6.5

In quale parte dell'arco $AC'B$ dobbiamo scegliere il punto C^* ?

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 42

SCHEDA 32

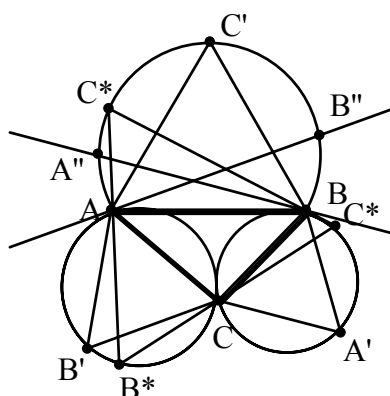
Sviluppo del problema 6.5.

Osserviamo di nuovo la **Figura_6_4**. Notiamo che il punto B^* non appare perché la semiretta con origine C^* passante per A interseca la circonferenza di Fermat $AB'C$, oltre che in A , in un punto non appartenente all'arco $AB'C$.

Nel caso della **Figura_6_5** la situazione è analoga.

E' facile ora capire che dobbiamo considerare, se esistono:

- l'intersezione A'' con l'arco $AC'B$ della tangente nel punto B alla circonferenza di Fermat c_2 ;
- l'intersezione B'' con l'arco $AC'B$ della tangente nel punto A alla circonferenza di Fermat c_3 .



Figura_6_6

Possiamo ora rispondere al problema 6.5:

Dobbiamo scegliere il punto C^* sull'arco $A''C'B''$.

Ovviamente, se il punto A'' (o il punto B'') non esiste, scegliamo il punto C^* sull'arco $AC'B''$ (o sull'arco $A''C'B$).

Risolto il problema 6.5., ci chiediamo se vi siano altri problemi.

Problema 6.6.

Abbiamo effettivamente determinato un triangolo equilatero circoscritto al triangolo ABC ?

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 43

SCHEMA 33

Sviluppo del problema 6.6.

In effetti dobbiamo ancora porci la seguente domanda: il triangolo $A^*B^*C^*$ passa per i punti A, B e C?

Le figure ottenute con *Cabri* ci danno risposta affermativa. Ma sappiamo bene che ciò non costituisce una dimostrazione.

Esaminando con attenzione la nostra costruzione notiamo che, dopo aver fissato C^* , abbiamo scelto i punti B^* e A^* in modo tale che i segmenti B^*C^* e A^*C^* contenessero rispettivamente i punti A e B. Abbiamo poi disegnato il segmento A^*B^* . Non ci siamo mai posti il problema di dimostrare che il punto C appartenga al segmento B^*A^* . Poniamo quindi il seguente problema:

Problema 6.7

Il punto C appartiene al segmento A^*B^* ?

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotto *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 44

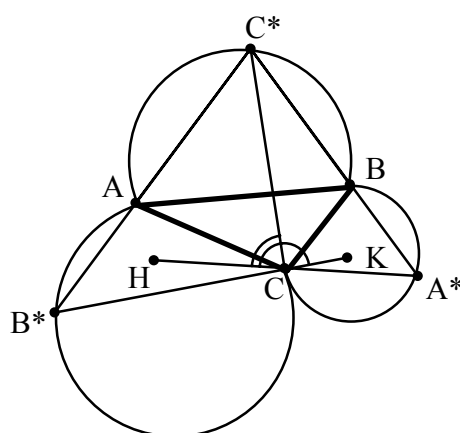
SCHEDA 34

Sviluppo del problema 6.8.

Proprio il fatto che in tutte le figure ottenute con *Cabri* il punto C sembra appartenere al segmento A^*B^* ci fa capire che, se vogliamo farci aiutare da una figura, è conveniente abbandonare le figure fatte con *Cabri* e fare un disegno “sbagliato” in cui i punti A^* , C e B^* non appaiono allineati. Potremmo fare un disegno a mano libera.

Nella seguente figura noi abbiamo preferito usare *Cabri*; abbiamo però disegnato tre archi che solo apparentemente appartengono alle tre circonferenze di Fermat.

Ovviamente nella dimostrazione che ora faremo supporremo che questi tre archi appartengano alle circonferenze di Fermat e che quindi i suoi punti vedano i tre lati del triangolo ABC sotto angoli di 60° .



Figura_6_7

Vogliamo dimostrare che l'angolo HCK misura 180° .

Abbiamo:

$$HCK = HCC^* + C^*CK$$

D'altronde, per il teorema sull'angolo esterno ad un triangolo, abbiamo:

$$HCC^* = CC^*A^* + CA^*C^*$$

$$C^*CK = CC^*B^* + C^*B^*C$$

Sommando membro a membro otteniamo:

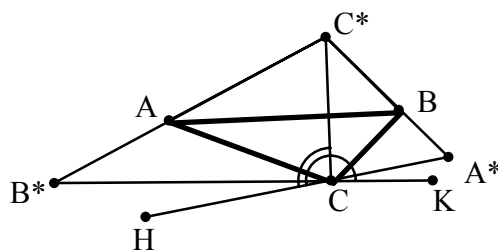
$$HCK = CC^*A^* + CA^*C^* + CC^*B^* + C^*B^*C.$$

Abbiamo poi:

$$CA^*C^* = C^*B^*C = 60^\circ \quad \text{e} \quad CC^*B^* + CC^*A^* = B^*C^*A^* = 60^\circ.$$

L'angolo HCK misura pertanto 180° e quindi il punto C appartiene al segmento A^*B^* .

Notiamo che avremmo avuto la stessa dimostrazione se avessimo fatto la seguente figura:



Figura_6_8

Abbiamo finalmente dimostrato che il triangolo $A^*B^*C^*$ è circoscritto al triangolo ABC.

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 45

SCHEDA 35

7. Triangolo equilatero massimo circoscritto ad un triangolo.

Il problema esaminato nel paragrafo precedente ci ha permesso di costruire triangoli equilateri circoscritti a un triangolo. Vogliamo ora determinare tra questi uno che abbia il perimetro massimo.

Anche questo problema è stato posto da Maria Dedò nel libro citato.

Problema 7.1.

Dato un triangolo ABC , determinare un triangolo equilatero circoscritto ad esso di perimetro massimo.

Suggerimento: Costruire il grafico della funzione data dalla lunghezza del segmento $A*B*$ in funzione della lunghezza dell'arco $AC*$.

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

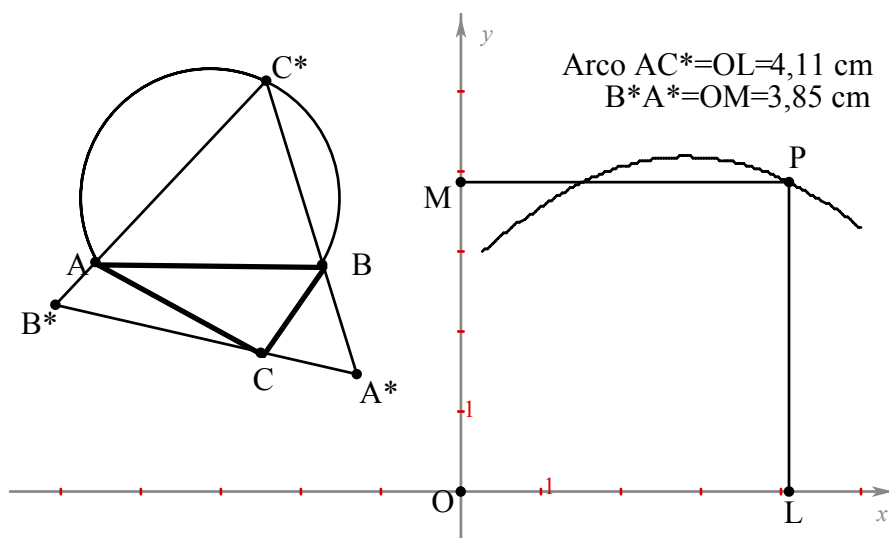
Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 46

SCHEMA 36

Sviluppo del problema 7.1.

Ci troviamo nuovamente a studiare un problema nel quale la prima difficoltà risiede proprio nella costruzione della figura con *Cabri*.

Utilizziamo *Cabri* per costruire il luogo individuato dalla lunghezza del segmento A^*B^* in funzione della lunghezza dell'arco AC^* .



Figura_7_1

Descriviamo la costruzione del luogo.

- Prendiamo la **Figura_6_2**;
- Con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo gli archi AB^*C e CA^*B .
- Con lo strumento **Asse** disegniamo l'asse del segmento AC^* ;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto D intersezione tra l'asse e l'arco AC^* ;
- con lo strumento **Arco** disegniamo l'arco ADC^* ;
- con lo strumento **Distanza Lunghezza** misuriamo la lunghezza dell'arco ADC^* e la lunghezza del segmento A^*B^* ;
- con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo l'asse del segmento AC^* e il punto D;
- con lo strumento **Mostra gli assi** disegniamo gli assi cartesiani e assegniamo il nome O all'origine degli assi;
- con lo strumento **Trasporto di misura** disegniamo il punto L sull'asse delle ascisse avente per ascissa la lunghezza dell'arco ADC^* e il punto M sull'asse delle ordinate avente come ordinata la lunghezza del segmento A^*B^* ;
- con lo strumento **Retta parallela** disegniamo la retta r passante per il punto L parallela all'asse delle y e la retta s passante per M parallela all'asse delle x;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto P di intersezione delle rette r e s;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti MP e PL;
- con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo le rette r e s;
- con lo strumento **Luogo** disegniamo il luogo descritto dal punto P al variare di C^* sull'arco AB.

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 47

L'andamento del luogo ci fa ipotizzare l'esistenza di un solo triangolo avente il segmento A^*B^* (e quindi il perimetro) di lunghezza massima, ma non ci da indicazioni sulle condizioni da imporre al triangolo $A^*B^*C^*$.

Problema 7.2.

Quando otteniamo un triangolo avente il lato A^*B^* massimo?

Suggerimento: arricchire il disegno aggiungendo le circonferenze di Fermat del triangolo ABC , i loro centri O_1, O_2, O_3 , il punto di Fermat F e il triangolo $O_1O_2O_3$.

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

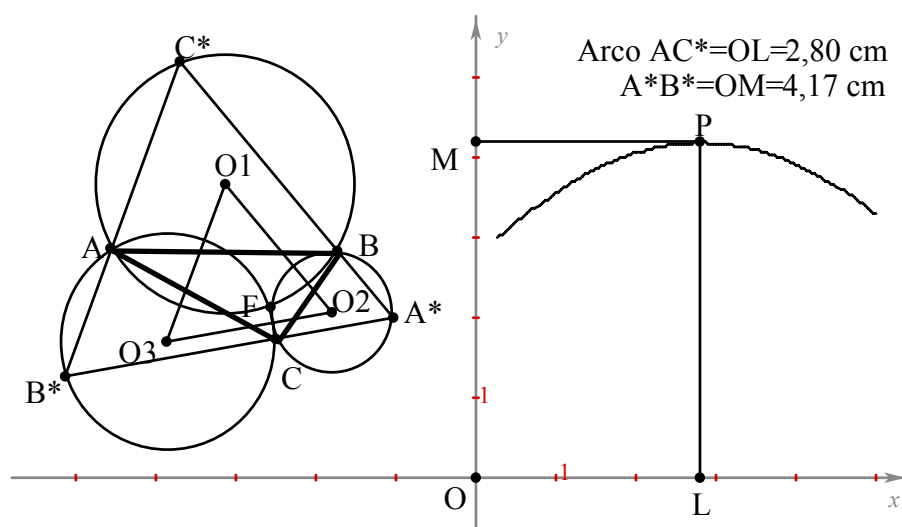
Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 48

SCHEDA 37

Sviluppo del problema 7.2.

Arricchiamo, come suggerito, il disegno aggiungendo le circonferenze di Fermat del triangolo ABC, i loro centri O_1, O_2, O_3 , il punto di Fermat F e il triangolo $O_1O_2O_3$.

- Con la macro **Circ_Circ** disegniamo le circonferenze c_1, c_2, c_3 circoscritte rispettivamente ai triangoli ABC^*, BCA^*, ACB^* e i loro centri O_1, O_2, O_3 ;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto F;
- con lo strumento **Triangolo** disegniamo il triangolo $O_1O_2O_3$;
- muoviamo il punto C^* fino a raggiungere sul grafico il massimo.



Figura_7_2

Dalla figura sembra che i lati del triangolo massimo $A^*B^*C^*$ siano paralleli ai lati del triangolo $O_1O_2O_3$.

Non è immediato capire come utilizzare tale osservazione.

Diamo allora un suggerimento: disegnare le semirette FO_1, FO_2 e FO_3 .

Problema 7.3.

Che relazione intercorre tra il triangolo $O_1O_2O_3$ e il triangolo $A^*B^*C^*$?

Scheda tratta da:

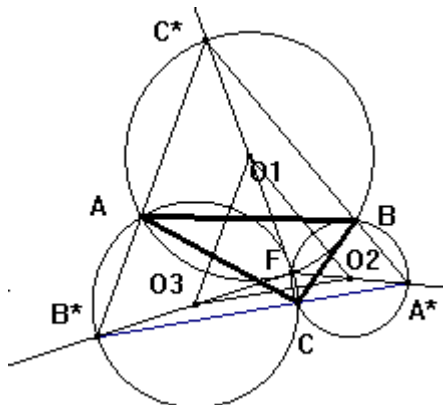
G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 49

SCHEDA 38

Sviluppo del problema 7.3.

- Con lo strumento **Semirette** disegniamo le semirette con origine in F passanti per O1, O2 e O3.



Figura_7_3

A questo punto sembra che i triangoli O1O2O3 e il triangolo A*B*C* si corrispondano nell'omotetia di centro F e rapporto 2.

La dimostrazione di ciò non è facile.

Proviamo allora a capovolgere il problema:

Problema 7.4.

Dato un triangolo ABC, costruire le sue circonferenze di Fermat di centri O1, O2 e O3. Costruire il triangolo A*B*C* omotetico al triangolo O1O2O3 rispetto all'omotetia di centro il punto F e rapporto 2.

Dimostrare che il triangolo A*B*C* è circoscritto al triangolo ABC.

Suggerimento: considerare l'intersezione tra il segmento O1O3 e il segmento FA.

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 50

SCHEDA 39

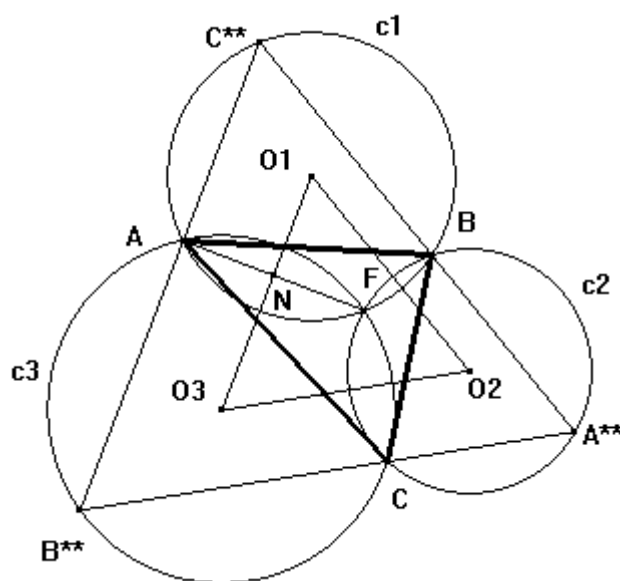
Sviluppo del problema 7.4.

- Con la macro **Circonferenze_Fermat** disegniamo tre punti A, B e C; la macro disegna il triangolo da essi determinato, le sue circonferenze di Fermat c_1 , c_2 e c_3 , e i loro centri O_1 , O_2 e O_3 ;
- con lo strumento **Punto** disegniamo il punto F, distinto da B, di intersezione delle circonferenze c_1 e c_2 ;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo i tre lati del triangolo $O_1O_2O_3$;
- con lo strumento **Simmetria centrale** disegniamo i simmetrici A^{**} , B^{**} , C^{**} dei punti O_2 , O_3 , O_1 rispetto al punto F;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo i tre lati del triangolo $A^{**}B^{**}C^{**}$.

Dobbiamo dimostrare che il triangolo $A^{**}B^{**}C^{**}$ è circoscritto al triangolo ABC. In altre parole dobbiamo dimostrare che i punti A, B e C appartengono ai lati del triangolo $A^{**}B^{**}C^{**}$.

La dimostrazione non appare facile. Seguiamo allora il suggerimento che ci è stato dato.

- Con lo strumento **Segmento** costruiamo il segmento FA;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** costruiamo il punto N intersezione tra il segmento O_1O_3 e il segmento FA.



Figura_7_4

La dimostrazione a questo punto è facile. Il segmento FA (essendo asse radicale) ha come punto medio il punto N. Il punto A è quindi l'omotetico di N nell'omotetia di centro F e rapporto 2. Appartiene quindi all'immagine attraverso l'omotetia del segmento O_1O_3 ; quest'ultima non è altro che il segmento $C^{**}B^{**}$.

Abbiamo dimostrato che il punto A appartiene al segmento $B^{**}C^{**}$.

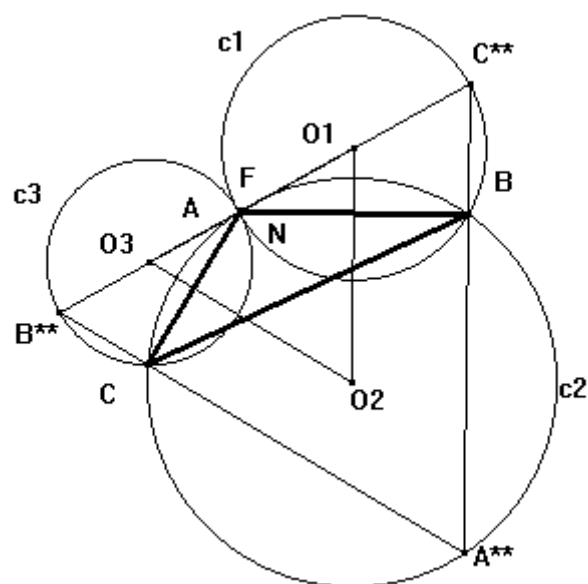
La stessa dimostrazione vale per i punti B e C. Il triangolo $A^{**}B^{**}C^{**}$ è quindi circoscritto al triangolo ABC.

La stessa dimostrazione può essere ripetuta sia quando F coincide con un vertice del triangolo ABC (**Figura_7_5**) sia quando F è esterno al triangolo ABC (**Figura_7_6**).

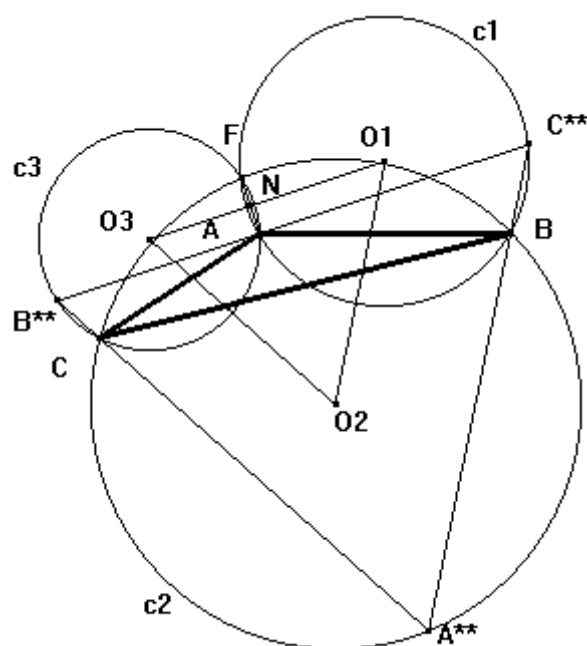
Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 51



Figura_7_5



Figura_7_6

Abbiamo dimostrato che il triangolo $A^*B^*C^*$ è circoscritto al triangolo ABC . Ora vogliamo dimostrare che è equilatero.

Problema 7.5.

Dimostrare che il triangolo $A^*B^*C^*$ è equilatero.

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotto *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 52

SCHEDA 40

Sviluppo del problema 7.5.

Per dimostrare che $A^*B^*C^*$ è equilatero è sufficiente dimostrare che i suoi tre vertici appartengono alle circonferenze di Fermat.

Dalle figure ciò appare scontato. In effetti la dimostrazione deriva dal fatto che essi sono simmetrici del punto F, appartenente alle circonferenze di Fermat, rispetto ai centri delle circonferenze di Fermat.

Rimane da dimostrare che il triangolo $A^*B^*C^*$, che abbiamo dimostrato essere circoscritto al triangolo ABC, è proprio il triangolo di perimetro massimo.

Abbiamo quindi il seguente problema.

Problema 7.6.

Dimostrare che il triangolo $A^*B^*C^*$ è il triangolo di perimetro massimo.

Suggerimento: Nella **Figura_7_2**. nascondere i lati del triangolo $O_1O_2O_3$, disegnare i segmenti FA^* , FB^* e FC^* , muovere il punto C^* e considerare, al variare di C^* , i triangoli FB^*A^* .

Scheda tratta da:

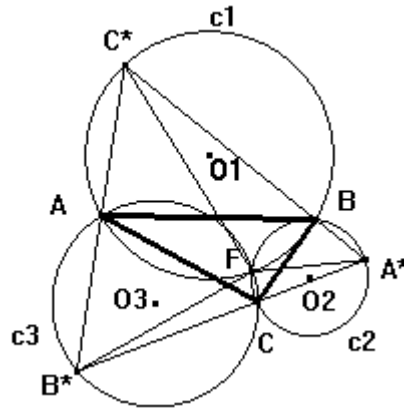
G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 53

SCHEDA 41

Sviluppo del problema 7.6.

- Consideriamo la **Figura_7_2**;
- Con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo i lati del triangolo $O_1O_2O_3$;
- Con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti FA^* e FB^* .

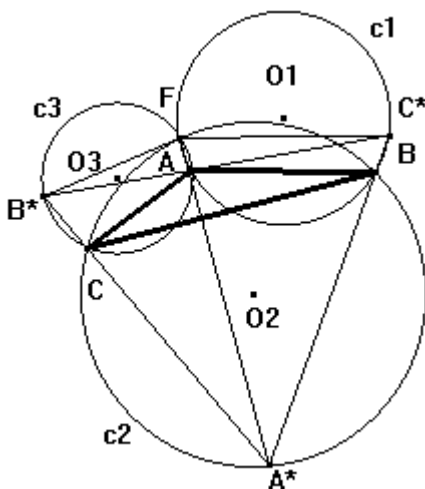


Figura_7_7

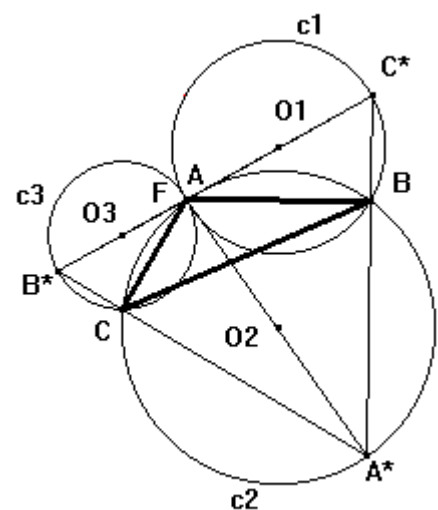
Notiamo che gli angoli FB^*A^* , al variare di C^* , hanno sempre la stessa misura; infatti essi insistono tutti sullo stesso arco. Gli angoli FA^*B^* hanno la stessa proprietà. I triangoli FB^*A sono pertanto tutti simili.

Tra tutti questi triangoli stiamo cercando quelli aventi il lato A^*B^* (e quindi il lato FB^*) di lunghezza massima. Ma il lato FB^* è una corda della circonferenza di Fermat di centro O_3 . Tale corda ha lunghezza massima quando è un diametro, cioè quando O_3 è punto medio del segmento FB^* . Pertanto il punto B^* di massimo coincide con il punto B^{**} . Di conseguenza il punto A^* di massimo coincide con A^{**} e C^* con C^{**} .

La stessa dimostrazione può essere ripetuta sia quando F coincide con un vertice del triangolo ABC (**Figura_7_8**) sia quando F è esterno al triangolo ABC (**Figura_7_9**).



Figura_7_8



Figura_7_9

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 54

Abbiamo dimostrato il seguente teorema:

Teorema 7.4 *Dato un triangolo ABC , il triangolo equilatero circoscritto ad esso avente perimetro massimo è il trasformato del triangolo $O_1O_2O_3$ di vertici i centri delle sue circonferenze di Fermat rispetto all'omotetia di centro il punto di Fermat e rapporto 2.*

Da questo teorema segue, come corollario, il

Teorema di Napoleone *Dato un triangolo ABC , il triangolo $O_1O_2O_3$ avente come vertici i centri delle circonferenze di Fermat è equilatero.*

Giuseppe Accascina
Giovanni Margiotta

Scheda tratta da:

G. Accascina, G. Margiotta *alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*

Progetto Alice, n.8 (2002) pp. 175 – 199, n.9 (2002) pp. 383 – 408, n.10 (2003) pp. 1 – 25 pagina 55