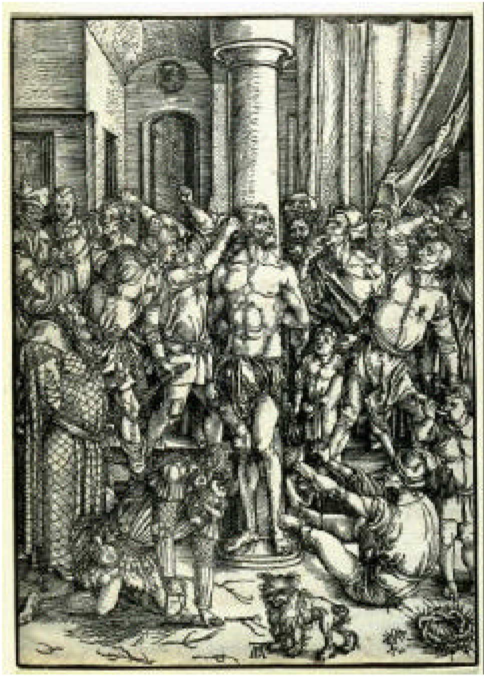

Alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri (Parte terza)

Giuseppe Accascina
Giovanni Margiotta

Riassunto. Proponiamo l'uso di *Cabri* in un'attività di Problem Posing e Problem Solving nella quale gli studenti dovrebbero essere in grado di scoprire, con l'aiuto del loro insegnante, alcune proprietà dei triangoli. In questa terza parte analizziamo il problema di Napoleone e il problema della determinazione di triangoli equilateri circoscritti a un triangolo assegnato.

Abstract. We propose the use of *Cabri* in a Problem Posing and Problem Solving activity which should make the students able to find themselves, with the help from their teacher, some properties of the triangles. In this third part we analyse the Napoleon Theorem and the construction of equilateral triangles which circumscribe a given triangle.

Giuseppe Accascina
Dipartimento Metodi e Modelli Matematici
Università " La Sapienza" di Roma
e-mail: accascina@dmmm.uniroma1.it

Giovanni Margiotta
L. S. "Francesco d'Assisi" di Roma
MIUR Dir. Gen. Formazione aggiorn.
e-mail: giovanni.margiotta@istruzione.it

Completiamo la nostra proposta di un'attività di esplorazione di alcune proprietà dei triangoli organizzata in modo tale che siano gli stessi studenti, con l'aiuto del loro insegnante, a scoprire e a dimostrare le proprietà.

Le prime due parti sono state pubblicate nei numeri 8 e 9 di questa rivista.

Abbiamo suddiviso il lavoro in singole schede, ognuna delle quali inizia con lo sviluppo del problema assegnato nella scheda precedente e termina con l'assegnazione di un nuovo problema.

Abbiamo inserito nelle note i commenti didattici riservati al docente.

Dal sito:

http://www. dmmm.uniroma1.it/persone/accascina

si possono scaricare le schede fornibili direttamente agli studenti e i file di tutte le figure. Queste ultime sono state scritte in *Cabri Géomètre II*; sono quindi leggibili anche con *Cabri Plus*.

Abbiamo sperimentato questo percorso didattico nei corsi di laboratorio nell'ambito della Scuola di Specializzazione all'Insegnamento Secondario (SSIS) del Lazio frequentati da specializzandi laureati in materie scientifiche, futuri docenti di matematica.

Ovviamente la velocità di svolgimento dell'attività è stata molto maggiore della velocità che avremmo utilizzato con studenti di scuole secondarie superiori.

Nella seconda parte abbiamo studiato le proprietà delle circonferenze di Fermat di un triangolo ABC. Sono le circonferenze c1, c2, c3 di centri O1, O2, O3 circoscritte ai triangoli equilateri ABR, BCP, CAQ costruiti esternamente al triangolo ABC. Le tre circonferenze di Fermat, si intersecano in un punto F, detto punto di Fermat.

Esso è interno al triangolo quando tutti gli angoli del triangolo ABC hanno misura minore di 120°.

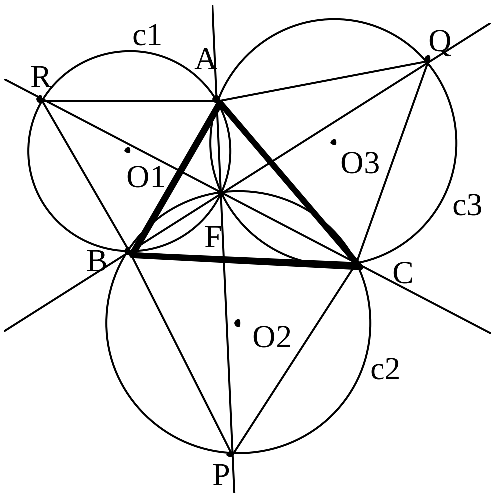

Figura_4_2

Se un angolo del triangolo ABC ha misura uguale a 120°, il punto di Fermat coincide con il vertice di tale angolo.

Se un angolo ha misura maggiore di 120° il punto F è esterno al triangolo ABC.

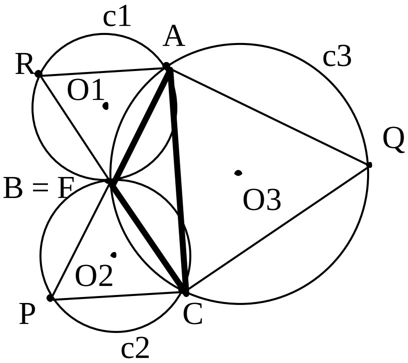

Figura_4_2_II

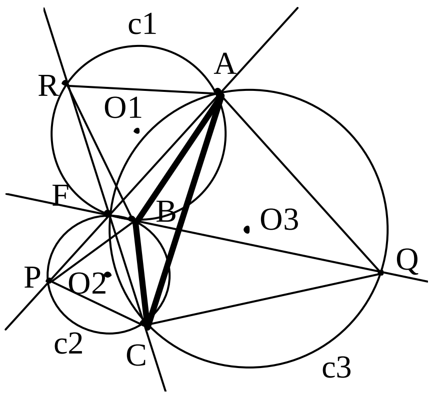

Figura_4_2_III

In ogni caso il punto F è intersezione delle rette AP, BQ e CR.

5. Il teorema di Napoleone

Riprendiamo la **Figura_4_2**.

- Con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti O1O2, O2O3,O3O1.

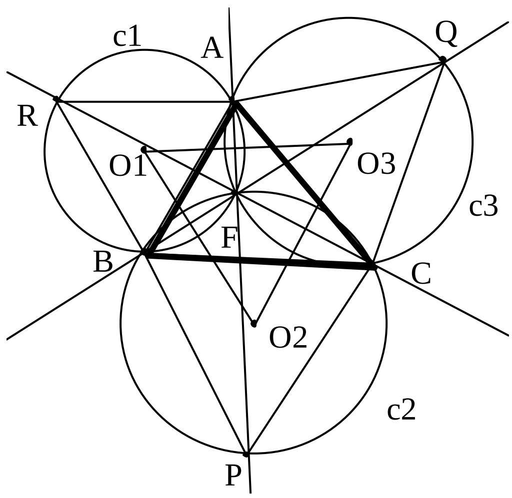

Figura_5_1

Appare che la retta AP è perpendicolare alla retta O1O3, la retta BQ è perpendicolare alla retta O1O2, la retta CR è perpendicolare alla retta O2O3.

Problema 5.1.
Dimostrare o confutare le affermazioni precedenti.

Nascondiamo nel nostro disegno ciò che non ci interessa:

- con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo il triangolo ABC e i tre triangoli equilateri esterni al triangolo ABC.

Ricordiamo che la retta AP coincide con la retta AF. Ora è chiaro che la retta passante per A e P è asse radicale delle circonferenze c1 e c3 e pertanto è perpendicolare alla retta congiungente i loro centri.

In modo analogo si dimostrano le altre due perpendicolarità.

Notiamo che nella nostra dimostrazione non abbiamo fatto alcun uso del fatto che il punto F sia interno al triangolo. Abbiamo infatti sfruttato solamente la proprietà dell'asse radicale di essere perpendicolare alla retta congiungente i centri.

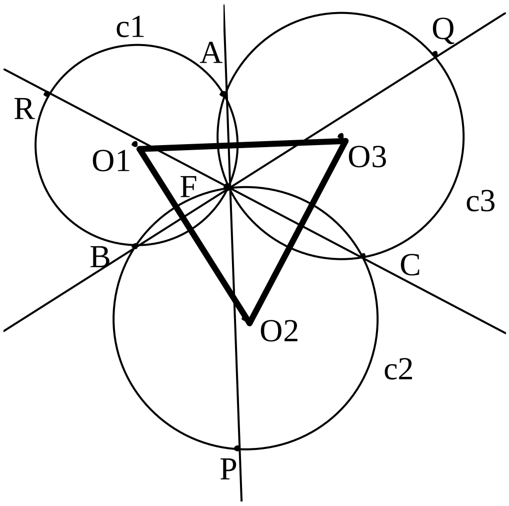

Figura_5_2

Abbiamo pertanto dimostrato il seguente:

Teorema 5.1. *Dato un triangolo ABC, costruiti sui suoi lati i triangoli equilateri ABR, ACQ e BCP esterni ad esso, le tre circonferenze c1, c2, c3 circoscritte ad essi e i loro centri O1, O2 e O3, si ha che la retta AP è perpendicolare alla retta O1O3, la retta BQ è perpendicolare alla retta O1O2, la retta CR è perpendicolare alla retta O2O3.*

Notiamo che nella figura il triangolo O1O2O3 appare equilatero.

Problema 5.2.

Dimostrare o confutare l'affermazione che il triangolo O1O2O3 è equilatero determinando la misura dei suoi angoli.

Diamo un nome ai punti di intersezione degli assi radicali con le rette congiungenti i centri.

- Con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto G di intersezione della retta AP con il segmento O1O3, il punto H di intersezione della retta CR con il segmento O2O3, il punto K di intersezione della retta BQ con il segmento O1O2;
- con lo strumento **Segna un angolo** segniamo gli angoli O3GP, O2HR e O1KQ.

Cabri indica che essi sono retti. Abbiamo già dimostrato ciò.

- Con lo strumento **Mostra/Nascondi** mostriamo i triangoli ABC, ABR, ACQ e BCP.

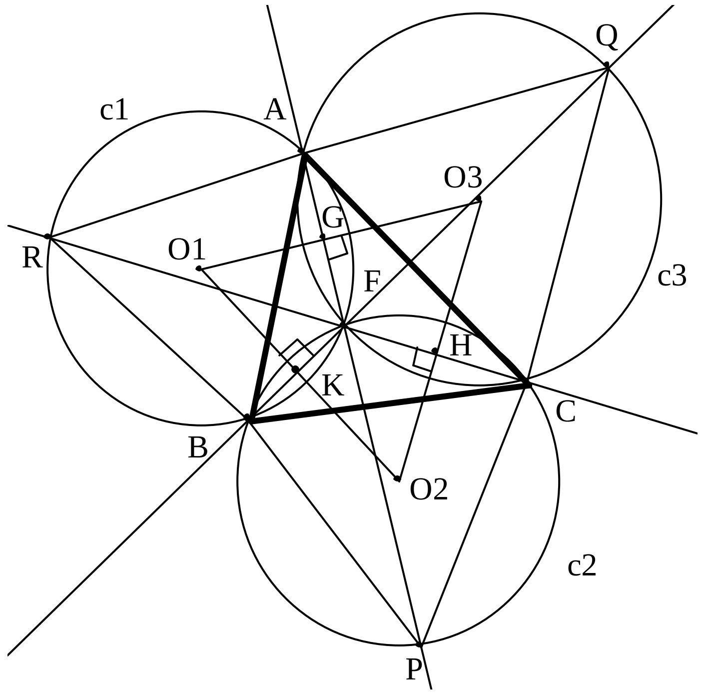

Figura_5_3

Vogliamo dimostrare che l'angolo O3O1O2 misura 60°.

Tale angolo coincide con l'angolo GO1K. Notiamo allora che il quadrilatero GFKO1 è convesso e quindi la somma dei suoi angoli interni è uguale ad un angolo giro. Ma due dei suoi angoli sono retti, l'angolo GFK, poiché coincide con l'angolo AFB, misura 120° e quindi l'angolo GO1K misura 60°.

Possiamo dimostrare in modo analogo che gli altri angoli del triangolo O3O1O2 hanno misura uguale a 60°. Pertanto il triangolo O3O1O2 è equilatero.

Problema 5.3.

`Cosa possiamo dedurre da tutto ciò?`

A prima vista appare che abbiamo dimostrato l'affermazione del problema 5.2: il nostro triangolo è equilatero.

In effetti notiamo che abbiamo sfruttato in vari punti che il punto F è interno al triangolo ABC. Abbiamo quindi dimostrato l'affermazione 5.2. solo nel caso in cui tutti gli angoli del triangolo ABC abbiano misura minore di 120°. Abbiamo pertanto il seguente teorema che si dice essere stato scoperto da Napoleone:

Teorema 5.2.i ("i" sta per "interno"). Teorema di Napoleone. *Dato un triangolo ABC avente tutti gli angoli di misura minore di 120°, il triangolo di vertici i centri delle sue circonferenze di Fermat è equilatero.*

Ci chiediamo se il teorema di Napoleone sia estendibile a tutti i triangoli[1].

Per verificare ciò dobbiamo analizzare anche il caso in cui F appartenga al bordo del triangolo ABC e il caso in cui F sia esterno al triangolo.

Lo studio del caso in cui il punto F appartenga al bordo è molto semplice. Viene lasciato per esercizio.

Studiamo ora il caso in cui il punto F sia esterno al triangolo.

Per studiare questo caso ci conviene partire dalla Figura_5_3, ruotare in senso orario il punto C intorno a B in modo tale che il punto F esca dal triangolo ABC passando per il punto B.

Notiamo innanzitutto che l'etichetta F è assegnata al punto B invece che all'altro punto di intersezione delle circonferenze c1 e c2. Pertanto:

- cancelliamo l'etichetta F e assegniamo l'etichetta F al punto di intersezione di c1 con c2 diverso da B.
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto L di intersezione del retta RC con il segmento O1O2 e il punto M di intersezione della retta PA con il segmento O1O2.

Vogliamo mostrare che l'angolo O3O1O2 misura 60°.

---

[1] **Commenti didattici.** In quel che segue proveremo a dimostrare la validità del teorema di Napoleone per qualunque triangolo. Ci accorgeremo che la facilità di disegno di *Cabri* ancora una volta ci aiuterà a capire che si devono esaminare molti più casi di quanto appaia in un primo momento.
Così come abbiamo già fatto con il teorema 3.4.i eviteremo di dare una parte della dimostrazione.
Dal momento che ciò che segue non sarà usato nei successivi paragrafi, volendo, si può passare direttamente al successivo paragrafo.
In ogni caso nell'ultimo paragrafo daremo una diversa dimostrazione del teorema di Napoleone per un qualsiasi triangolo.

Esso coincide con l'angolo GO1M.

Consideriamo allora i triangoli MGO1 e FKM.

Essi hanno gli angoli MGO1 e FKM retti e gli angoli O1MG e FMK opposti al vertice. Pertanto anche gli angoli GO1M e KFM (coincidente con l'angolo BFA) sono uguali. Ma quest'ultimo angolo misura 60°.

Abbiamo dimostrato che l'angolo O3O1O2 misura 60°.

La dimostrazione che l'angolo O1O2O3 misura 60° è analoga. In questo caso si considerano i triangoli FKL e O2HL.

Deduciamo da tutto ciò che il triangolo O1O2O3 è equilatero.

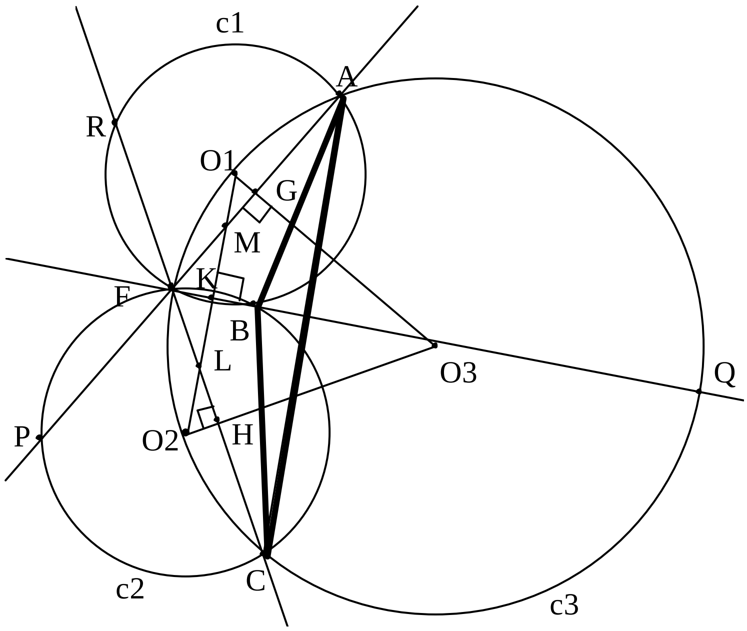

Figura_ 5_4

Problema 5.4.

Cosa possiamo dedurre da tutto ciò?

A prima vista appare che abbiamo finalmente dimostrato l'affermazione del problema 5.2: il nostro triangolo è equilatero.

In effetti la situazione è un po' più complicata. La nostra dimostrazione si basa infatti sui punti di intersezione delle rette RC e PA con il segmento O1O2.

Muovendo il punto C ci accorgiamo che la retta AP non interseca il segmento O1O2 quando la retta AP non interseca il segmento O1O3.

Dobbiamo ancora una volta modificare la nostra dimostrazione.
Intanto modifichiamo la figura.

- Disegniamo la retta O1O2 e con il comando **Ridefinizione di un oggetto** definiamo il punto M come intersezione della retta AP con la retta O1O2 (e non più con il segmento O1O2);
- disegniamo la retta O1O3 e con il comando **Ridefinizione di un oggetto** definiamo il punto G come intersezione della retta AP con la retta O1O3 (e non più con il segmento O1O3).

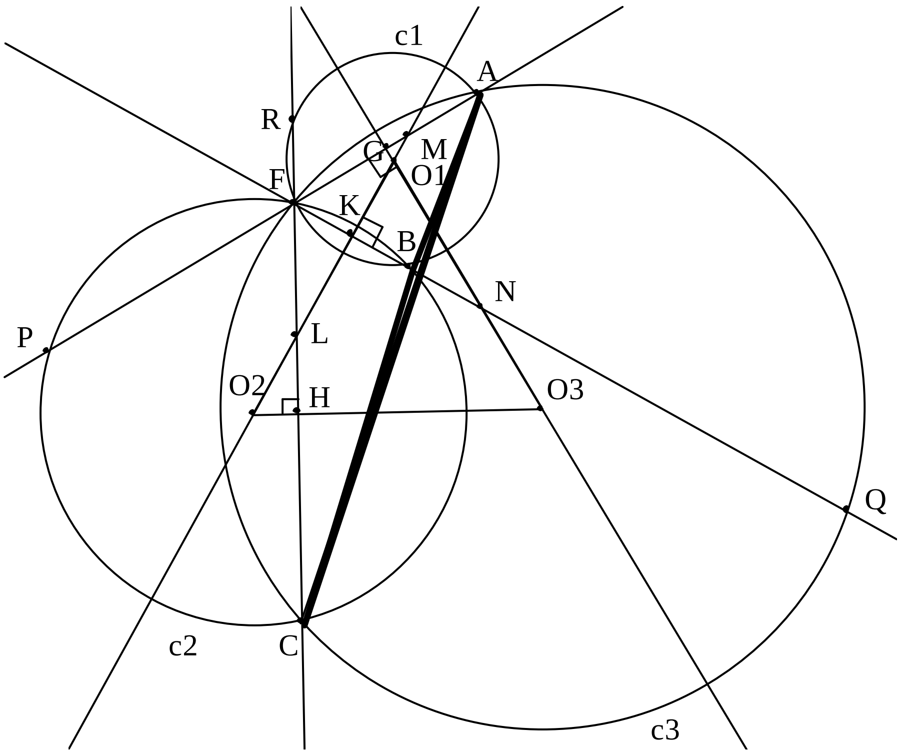

Figura_5_5

A questo punto la dimostrazione precedente cambia di poco. Continuiamo a considerare i triangoli rettangoli MGO1 e KFM; essi hanno un angolo in comune. Quindi gli angoli MO1G e MFK sono uguali. Ma il primo dei due angoli è opposto al vertice dell'angolo O3O1O2 mentre il secondo coincide con l'angolo AFB e quindi misura 60°. Abbiamo dimostrato che l'angolo O3O1O2 misura 60°. La dimostrazione che l'angolo O3O2O1 misura 60° rimane invariata.

Non dimostriamo che non vi siano altri casi possibili.

Abbiamo pertanto dimostrato (quasi completamente) il teorema di Napoleone nel caso di un triangolo qualsiasi.

5.2 Teorema di Napoleone. *Dato un triangolo ABC, il triangolo avente come vertici i centri delle sue circonferenze di Fermat è equilatero.*

6. Triangoli equilateri circoscritti a triangoli.

In tutti i problemi esaminati fino ad ora non abbiamo mai trovato grandi difficoltà nel disegnare con *Cabri* le figure proposte. Le difficoltà sono di solito nate nel momento in cui abbiamo cercato di dimostrare ciò che le figure costruite suggerivano.

Vogliamo ora studiare un problema nel quale la prima difficoltà risiede proprio nella costruzione della figura con *Cabri.*

Consideriamo il seguente problema descritto a pagina 25 del libro di Maria Dedò *Trasformazioni geometriche*, Decibel, Zanichelli, Bologna, 1996:

Problema 6.1.

Dato un triangolo ABC, determinare un triangolo equilatero A*,B*,C* ad esso circoscritto.

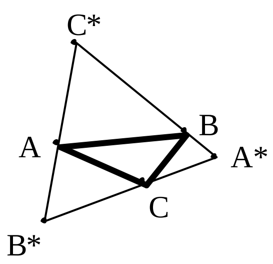

Figura_6_1

Il problema non è di facile soluzione[2]. Diamo pertanto qualche suggerimento.

---

[2] **Commenti didattici.** Molto probabilmente nessuno studente è in grado di far ciò. Conviene allora dar loro dopo poco tempo la scheda successiva.

Mostriamo alcuni particolari che nella Figura_6_1 avevamo nascosto.

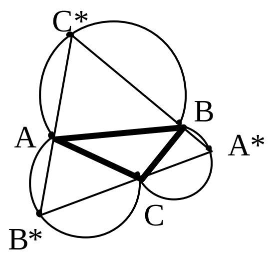

Figura_6_2

Riproponiamo il nostro problema.

Problema 6.2.

Determinare un triangolo equilatero circoscritto al triangolo ABC.

Forse il problema non è ancora di facile soluzione. Mostriamo allora qualche altro particolare e riproponiamo il nostro problema.

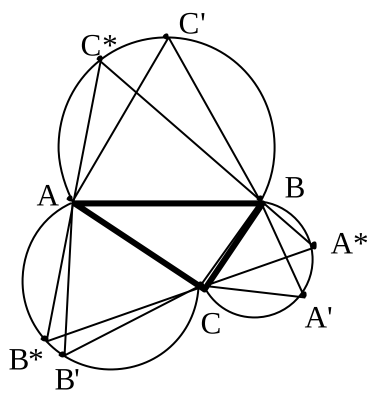

Figura_6_3

Problema 6.3.

Determinare un triangolo equilatero circoscritto al triangolo ABC.

Ora dovrebbe essere tutto chiaro. Gli archi di circonferenza disegnati sono archi delle circonferenze di Fermat del triangolo ABC. Questi archi sono i luoghi dei punti del piano esterni al triangolo che vedono i tre lati con angoli di 60°.

La costruzione di un triangolo A*B*C* circoscritto al triangolo ABC è presto fatta.

Scegliamo un qualsiasi punto C* sull'arco AC'B e da esso conduciamo le semirette passanti per A e B.

Esistono pertanto infiniti triangoli equilateri che circoscrivono il triangolo ABC.

Descriviamo in tutti i suoi particolari l'algoritmo di costruzione di un triangolo equilatero circoscritto al triangolo ABC.

- Con gli strumenti **Punto** e **Segmento** disegniamo tre punti A, B e C e i lati del triangolo ABC;
- con la macro **Equilat** disegniamo i tre triangoli equilateri ABC', ACB', BCA' esterni al triangolo;
- con lo strumento **Arco di circonferenza** disegniamo gli archi di circonferenza AC'B, AB'C e BA'C;
- con lo strumento **Punto su un oggetto** disegniamo un punto C* sull'arco AC'B;
- con lo strumento **Semiretta** disegniamo la semiretta s di origine C* passante per A;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto B* di intersezione della semiretta s con l'arco di circonferenza AB'C;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo il segmento C*B*;
- con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo la semiretta s;
- con lo strumento **Semiretta** disegniamo la semiretta s' di origine C* passante per B;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto A* di intersezione della semiretta s' con l'arco di circonferenza CA'B;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo il segmento C*A*;
- con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo la semiretta s';
- con lo strumento **Segmento** disegniamo il segmento A*B*.

Il triangolo A*B*C* è uno dei triangoli equilateri circoscritti al triangolo ABC. Muovendo il punto C* sull'arco AC'B otteniamo tutti i triangoli equilateri circoscritti al triangolo ABC.

Problema 6.4.

`Abbiamo risolto completamente il nostro problema?`

In effetti dobbiamo ancora mettere in luce alcuni particolari.

Notiamo innanzitutto che, se spostiamo il punto C* in vicinanza del punto B, non appare più il punto B*.

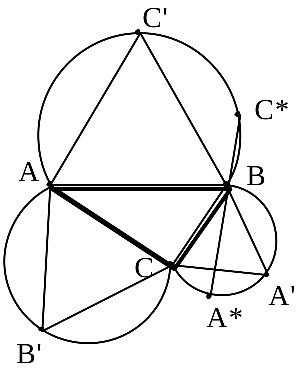

Figura_6_4

Analogamente, se spostiamo il punto C* in vicinanza del punto A, non appare il punto A*.

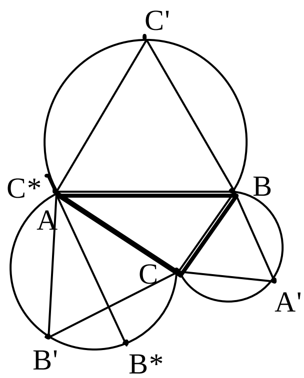

Figura_6_5

Ci siamo resi conto che non possiamo scegliere il punto C* in un punto qualsiasi dell'arco AC'B. Ci poniamo allora il seguente:

Problema 6.5.

In quale parte dell’arco AC’B dobbiamo scegliere il punto C*?

Osserviamo di nuovo la Figura_6_4. Notiamo che il punto B* non appare perché la semiretta con origine C* passante per A interseca la circonferenza di Fermat AB’C, oltre che in A, in un punto non appartenente all’arco AB’C.

Nel caso della Figura_6_5 la situazione è analoga.

È facile ora capire che dobbiamo considerare, se esistono:

- l’intersezione A’’ con l’arco AC’B della tangente nel punto B alla circonferenza di Fermat c2;
- l’intersezione B’’ con l’arco AC’B della tangente nel punto A alla circonferenza di Fermat c3.

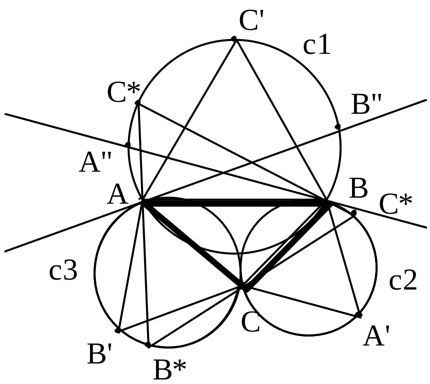

Figura_6_6

Possiamo ora rispondere al problema 6.5:

Dobbiamo scegliere il punto C* sull’arco A’’C’B’’.

Ovviamente, se il punto A’’ (o il punto B’’) non esiste, scegliamo il punto C* sull’arco AC’B’’ (o sull’arco A’’C’B).

Risolto il problema 6.5., ci chiediamo se vi siano altri problemi.

Problema 6.6.

Abbiamo effettivamente determinato un triangolo equilatero circoscritto al triangolo ABC?

In effetti dobbiamo ancora porci la seguente domanda: il triangolo A*B*C* passa per i punti A, B e C?

Le figure ottenute con *Cabri* ci danno risposta affermativa. Ma sappiamo bene che ciò non costituisce una dimostrazione.

Esaminando con attenzione la nostra costruzione notiamo che, dopo aver fissato C*, abbiamo scelto i punti B* e A* in modo tale che i segmenti B*C* e A*C* contenessero rispettivamente i punti A e B. Abbiamo poi disegnato il segmento A*B*. Non ci siamo mai posti il problema di dimostrare che il punto C appartenga al segmento B*A*. Poniamo quindi il seguente problema[3]:

Problema 6.7.
`Il punto C appartiene al segmento A*B*?`

Proprio il fatto che in tutte le figure ottenute con Cabri il punto C sembra appartenere al segmento A*B* ci fa capire che, se vogliamo farci aiutare da una figura, è conveniente abbandonare le figure fatte con Cabri e fare un disegno "sbagliato" in cui i punti A*, C e B* non appaiono allineati. Potremmo fare un disegno a mano libera.

Nella seguente figura noi abbiamo preferito usare Cabri; abbiamo però disegnato tre archi che solo apparentemente appartengono alle tre circonferenze di Fermat.

Ovviamente nella dimostrazione che ora faremo supporremo che questi tre archi appartengano alle circonferenze di Fermat e che quindi i suoi punti vedano i tre lati del triangolo ABC sotto angoli di 60°.

---

[3] **Commenti didattici.** In effetti gli studenti di solito non si pongono questo problema. Abbiamo qui la stessa situazione evidenziata nella prima parte del nostro articolo quando abbiamo notato che gli studenti, una volta disegnate le circonferenze di Fermat, incominciano a studiare le proprietà del loro punto di intersezione, il punto di Fermat, senza preoccuparsi di dimostrarne l'esistenza. L'evidenza della figura è per loro garanzia di dimostrazione.
Anche i nostri studenti della SSIS, per la maggior parte laureati in matematica, che già non si erano posti il problema di dimostrare che il punto Fermat esiste, non si pongono il problema di dimostrare che il triangolo A*B*C* è circoscritto al triangolo ABC.

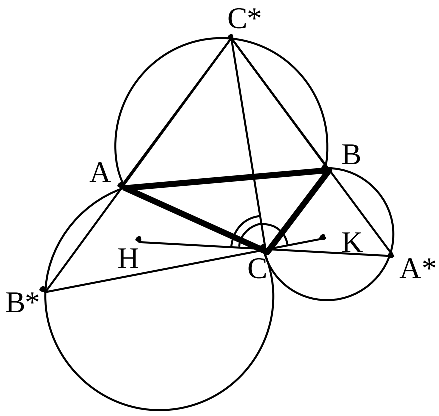

Figura_6_7

Vogliamo dimostrare che l'angolo HCK misura 180°.

Abbiamo:

HCK = HCC* + C*CK

D'altronde, per il teorema sull'angolo esterno ad un triangolo, abbiamo:

HCC* = CC*A* + CA*C*   C*CK= CC*B* + C*B*C

Sommando membro a membro otteniamo:

HCK = CC*A* + CA*C* + CC*B* + C*B*C.

Abbiamo poi:

CA*C* = C*B*C = 60° e CC*B* + CC*A* = B*C*A* = 60°.

L'angolo HCK misura pertanto 180° e quindi il punto C appartiene al segmento A*B*.

Notiamo che avremmo avuto la stessa dimostrazione se avessimo fatto la seguente figura:

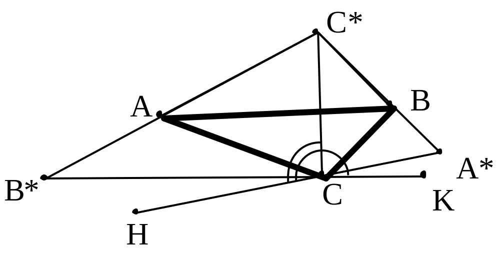

Figura_6_8

Abbiamo finalmente dimostrato che il triangolo A*B*C* è circoscritto al triangolo ABC.

7. Triangolo equilatero massimo circoscritto ad un triangolo.

Il problema esaminato nel paragrafo precedente ci ha permesso di costruire triangoli equilateri circoscritti a un triangolo. Vogliamo ora determinare tra questi uno che abbia il perimetro massimo.

Anche questo problema è stato posto da Maria Dedò nel libro citato.

Problema 7.1.

Dato un triangolo ABC, determinare un triangolo equilatero circoscritto ad esso di perimetro massimo.

Ci troviamo nuovamente a studiare un problema nel quale la prima difficoltà risiede proprio nella costruzione della figura con *Cabri*.

Utilizziamo *Cabri* per costruire il luogo individuato dalla lunghezza del segmento A*B* in funzione della lunghezza dell'arco AC*.

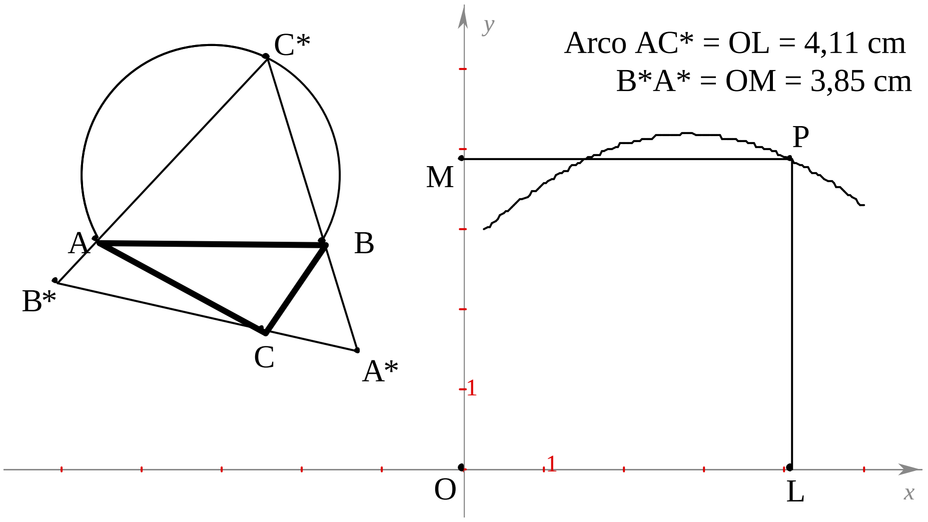

Figura_7_1

Descriviamo la costruzione del luogo.

Prendiamo la **Figura_6_2** e nascondiamo gli archi AB*C e CA*B.

- Con lo strumento **Asse** disegniamo l'asse del segmento AC*;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto D intersezione tra l'asse e l'arco AC*;
- con lo strumento **Arco di circonferenza** disegniamo l'arco ADC*;
- con lo strumento **Distanza Lunghezza** misuriamo la lunghezza dell'arco ADC* e la lunghezza del segmento A*B*;
- con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo l'asse del segmento AC* e il punto D;
- con lo strumento **Mostra gli assi** disegniamo gli assi cartesiani e assegniamo il nome O all'origine degli assi;
- con lo strumento **Trasporto di misura** disegniamo il punto L sull'asse delle ascisse avente per ascissa la lunghezza dell'arco ADC* e il punto M sull'asse delle ordinate avente come ordinata la lunghezza del segmento A*B*;
- con lo strumento **Retta parallela** disegniamo la retta r passante per il punto L parallela all'asse delle y e la retta s passante per M parallela all'asse delle x;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto P di intersezione delle rette r e s;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti MP e PL;
- con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo le rette r e s;
- con lo strumento **Luogo** disegniamo il luogo descritto dal punto P al variare di C* sull'arco AB.

L'andamento del luogo ci fa ipotizzare l'esistenza di un solo triangolo avente il segmento A*B* (e quindi il perimetro) di lunghezza massima, ma non ci da indicazioni sulle condizioni da imporre al triangolo A*B*C*.

Problema 7.2.

Quando otteniamo un triangolo avente il lato A*B* massimo?

Suggerimento: arricchire il disegno aggiungendo le circonferenze di Fermat del triangolo ABC, i loro centri O1, O2, O3, il punto di Fermat F e il triangolo O1O2O3.

Aggiungiamo, come suggerito, il disegno le circonferenze di Fermat del triangolo ABC, i loro centri O1, O2, O3, il punto di Fermat F e il triangolo

O1O2O3.

– Con la macro **Circ_Circ** disegniamo le circonferenze c1, c2, c3 circoscritte rispettivamente ai triangoli ABC*, BCA*, ACB* e i loro centri O1, O2, O3;
– con lo strumento **Intersezione di due oggetti** disegniamo il punto F;
– con lo strumento **Triangolo** disegniamo il triangolo O1O2O3;
– muoviamo il punto C* fino a raggiungere sul grafico il massimo.

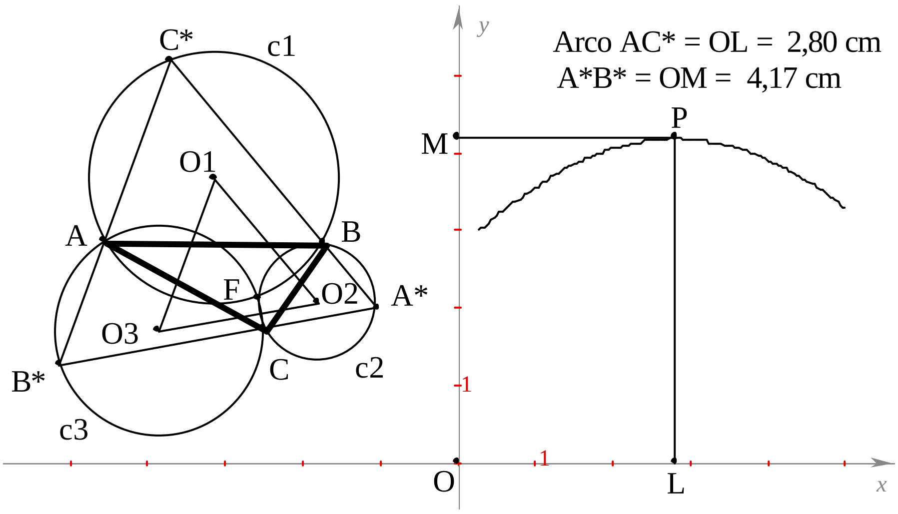

Figura_7_2

Dalla figura sembra che i lati del triangolo massimo A*B*C* siano paralleli ai lati del triangolo O1O2O3.

Non è immediato capire come utilizzare tale osservazione.

Diamo allora un suggerimento: disegnare le semirette FO1, FO2 e FO3.

Problema 7.3.

Che relazione intercorre tra il triangolo O1O2O3 e il triangolo A*B*C*?

– Con lo strumento **Semirette** disegniamo le semirette con origine in F passanti per O1, O2 e O3.

A questo punto sembra che il triangolo O1O2O3 e il triangolo A*B*C* si corrispondano nell'omotetia di centro F e rapporto 2.

La dimostrazione di ciò non è facile.

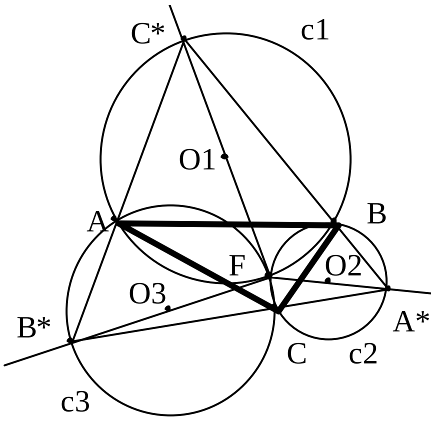

Figura_7_3

Proviamo allora a capovolgere il problema:

Problema 7.4.

Dato un triangolo ABC, costruire le sue circonferenze di Fermat di centri O1, O2 e O3. Costruire il triangolo A**B**C** omotetico al triangolo O1O2O3 rispetto all'omotetia di centro il punto F e rapporto 2.

Dimostrare che il triangolo A**B**C** è circoscritto al triangolo ABC.

Suggerimento: considerare l'intersezione tra il segmento O1O3 e il segmento FA.

Ci conviene rifare il disegno dall'inizio.

- la macro **Circonferenze_Fermat** disegniamo tre punti A, B e C; la macro disegna il triangolo da essi determinato, le sue circonferenze di Fermat c1, c2 e c3, e i loro centri O1, O2 e O3;
- con strumento **Punto** disegniamo il punto di intersezione F delle circonferenze c1 e c2;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo i tre lati del triangolo O1O2O3;
- con lo strumento **Simmetria centrale** disegniamo i simmetrici A**, B**, C** dei punti O2, O3, O1 rispetto al punto F;
- con lo strumento **Segmento** disegniamo i tre lati del triangolo A**B**C**.

Dobbiamo dimostrare che il triangolo A**B**C** è circoscritto al triangolo ABC. In altre parole dobbiamo dimostrare che i punti A, B e C appartengono ai lati del triangolo A**B**C**.

La dimostrazione non appare facile.

Seguiamo allora il suggerimento che ci è stato dato.

- Con lo strumento **Segmento** costruiamo il segmento FA;
- con lo strumento **Intersezione di due oggetti** costruiamo il punto N intersezione tra il segmento O1O3 e il segmento FA.

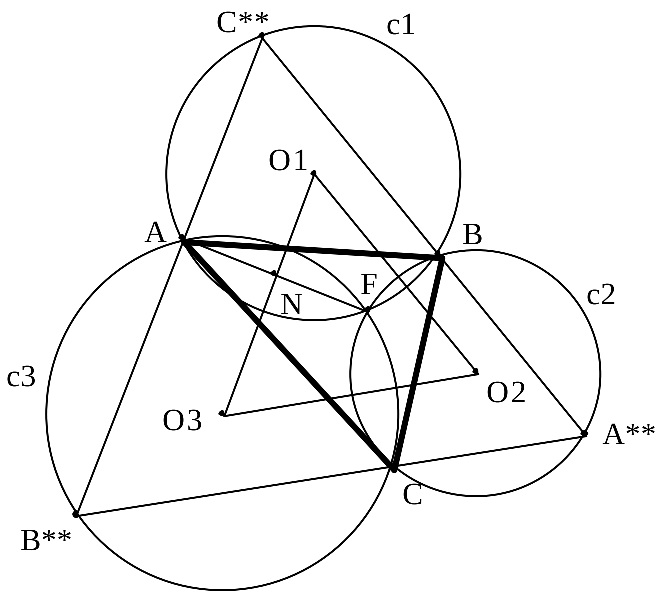

Figura_7_4

La dimostrazione a questo punto è facile. Il segmento FA (essendo asse radicale) ha come punto medio il punto N. Il punto A è quindi l'omotetico di N nell'omotetia di centro F e rapporto 2. Appartiene quindi all'immagine attraverso l'omotetia del segmento O1O3; quest'ultima non è altro che il segmento C**B**.

Abbiamo dimostrato che il punto A appartiene al segmento B**C**.

La stessa dimostrazione vale per i punti B e C. Il triangolo A**B**C** è quindi circoscritto al triangolo ABC.

La stessa dimostrazione può essere ripetuta sia quando F coincide con un vertice del triangolo ABC (**Figura_7_5**) sia quando F è esterno al triangolo ABC (**Figura_7_6**).

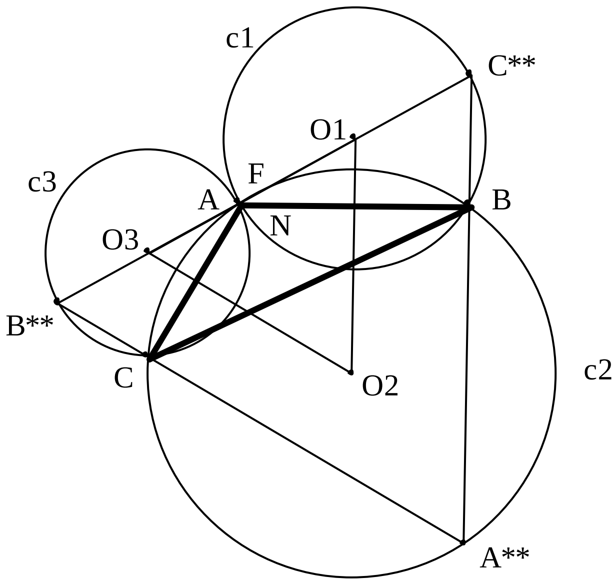

Figura_7_5

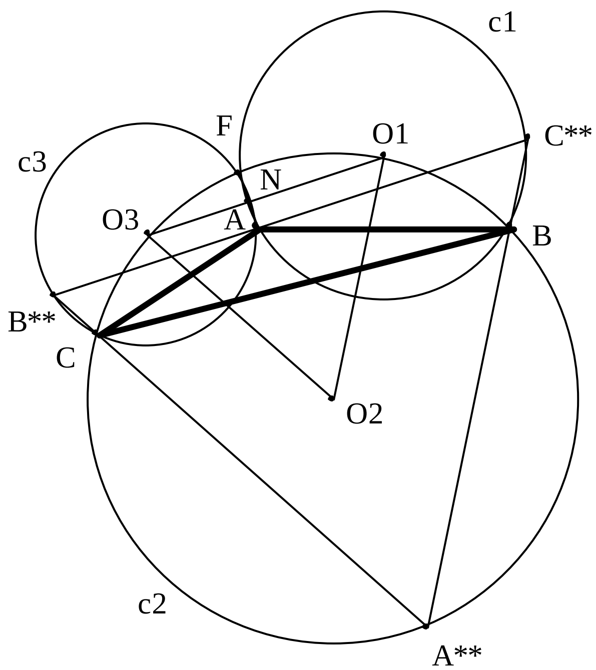

Figura_7_6

Abbiamo dimostrato che il triangolo A**B**C** è circoscritto al triangolo ABC.

Ora vogliamo dimostrare che è equilatero.

Problema 7.5.

Dimostrare che il triangolo A**B**C** è equilatero.

Per dimostrare che A**B**C** è equilatero è sufficiente dimostrare che i suoi tre vertici appartengono alle circonferenze di Fermat.

Dalle figure ciò appare scontato. In effetti la dimostrazione deriva dal fatto che essi sono simmetrici del punto F, appartenente alle circonferenze di Fermat, rispetto ai centri delle circonferenze di Fermat.

Rimane da dimostrare che il triangolo A**B**C**, che abbiamo dimostrato essere circoscritto al triangolo ABC, è proprio il triangolo di perimetro massimo.

Abbiamo quindi il seguente problema.

Problema 7.6.

Dimostrare che il triangolo A**B**C** è il triangolo di perimetro massimo.

Suggerimento: Nella **Figura_7_2.** nascondere i lati del triangolo O1O2O3, disegnare i lati FA*, FB* e FC*, muovere il punto C* e considerare, al variare di C*, i triangoli FB*A*.

- Consideriamo la **Figura_7_2;**
- Con lo strumento **Mostra/Nascondi** nascondiamo i lati del triangolo O1O2O3;
- Con lo strumento **Segmento** disegniamo i segmenti FA*, FB* e FC*.

Notiamo che gli angoli FB*A*, al variare di C*; hanno sempre la stessa misura; infatti essi insistono tutti sullo stesso arco. Gli angoli FA*B* hanno la stessa proprietà. I triangoli FB*A* sono pertanto tutti simili.

Tra tutti questi triangoli stiamo cercando quelli aventi il lato A*B* (e quindi il lato FB*) di lunghezza massima. Ma il lato FB* è una corda della circonferenza di Fermat di centro O3. Tale corda ha lunghezza massima quando è un diametro, cioè quando O3 è punto medio del segmento FB*.

Pertanto il punto B* di massimo coincide con il punto B**. Di conseguenza il punto A* di massimo coincide con A** e C* con C**.

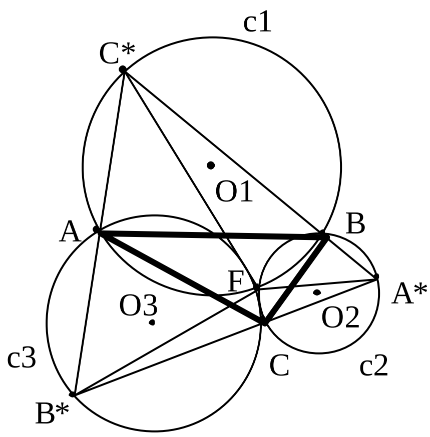

Figura_7_7

La stessa dimostrazione può essere ripetuta sia quando F coincide con un vertice del triangolo ABC (**Figura_7_8**) sia quando F è esterno al triangolo ABC (**Figura_7_9**).

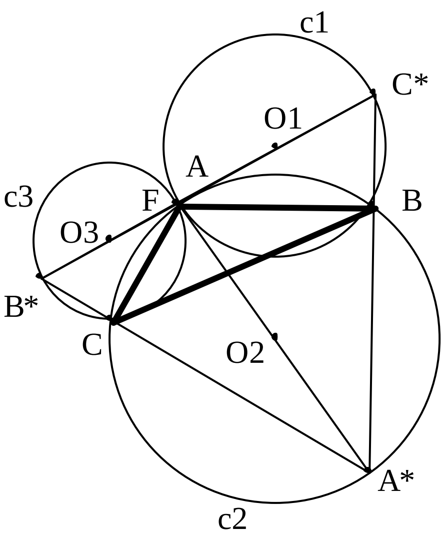

Figura_7_8

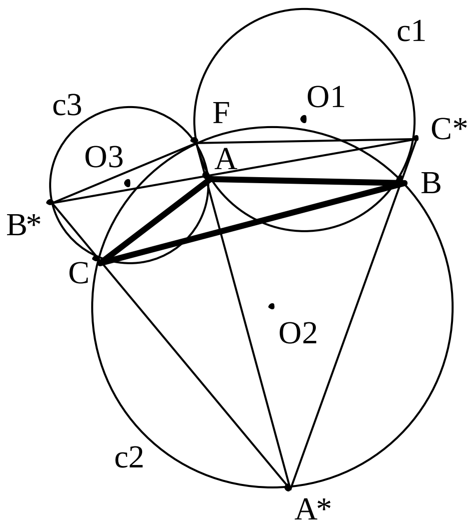

Figura_7_9

Abbiamo dimostrato il seguente teorema:

Teorema 7.4. *Dato un triangolo ABC, il triangolo equilatero circoscritto ad esso avente perimetro massimo è il trasformato del triangolo O1O2O3 di vertici i centri delle sue circonferenze di Fermat rispetto all'omotetia di centro il punto di Fermat e rapporto 2.*

Da questo teorema segue, come corollario, il teorema:

Teorema di Napoleone. *Dato un triangolo ABC, il triangolo O1O2O3 avente come vertici i centri delle circonferenze di Fermat è equilatero.*

Giuseppe Accascina
Giovanni Margiotta