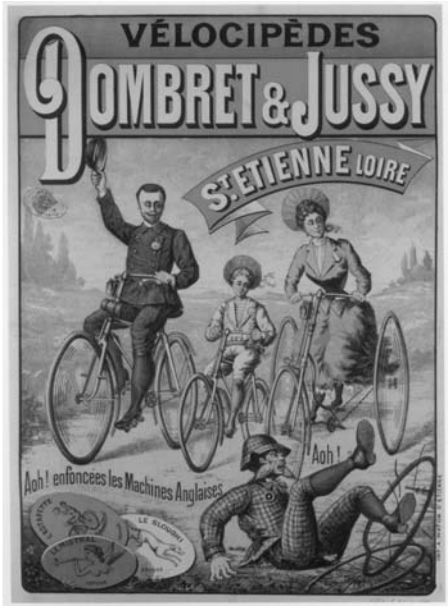

Problem posing e problem solving con Cabri

Giuseppe Accascina
Mariolina Batini
Francesca Del Vecchio
Giovanni Margiotta
Enrico Pietropoli
Daniela Valenti

Riassunto. L'articolo sviluppa i seguenti punti:

- vengono segnalate alcune proprietà che gli studenti ignorano anche osservando figure in movimento disegnate con Cabri;
- vengono presentate delle attività che hanno positivamente sollecitato negli studenti l'osservazione di tali proprietà "invisibili";
- vengono discusse possibili motivazioni della "cecità degli studenti".

Abstract. In the following paper we will show:

- some geometric characteristics the students are "blind to" by using Cabri in a naïve way;
- some successful problem posing activities we designed to be students' guides in discovering such "invisible" properties;
- some educational conjectures about "student's blindness".

G. Accascina, Università "La Sapienza" - Roma - accascina@dmmm.uniroma1.it
M. Batini, già docente Liceo Classico "Orazio" - Roma - m.batini@libero.it
F. Del Vecchio, Liceo Scientifico "Majorana" - Latina - ddelvec@libero.it
G. Margiotta, Liceo Scientifico "Francesco d'Assisi" - Roma, MIUR - g.margiotta@istruzione.it
E. Pietropoli, Liceo Classico "Montale" - Roma - enrico.pietropoli@libero.it
D. Valenti, Liceo Scientifico "Morgagni" - Roma - d.valenti@dis.uniroma1.it

1. Introduzione

I software di geometria dinamica, e in particolare Cabri, sono considerati un efficace strumento per sostenere l'insegnamento della geometria euclidea. In particolare, l'uso della funzione trascinamento può stimolare un importante cambiamento nell'atmosfera della classe: lo studente si sente coinvolto nella creatività della ricerca matematica, ovviamente al suo livello, e supera più agevolmente l'atteggiamento passivo di spettatore delle dimostrazioni lette sul libro o ascoltate dall'insegnante.

Ma Cabri, ovviamente, non è (e non può essere) una "bacchetta magica" che risolve tutte le problematiche didattiche: rimangono dei casi in cui gli studenti ignorano alcune proprietà geometriche fondamentali o eludono i punti essenziali di un problema.

In questo articolo mostriamo tre esempi di ciò. Sono esempi sperimentati in una popolazione molto varia di studenti, non solo a livello di biennio e triennio liceale, ma anche a livello universitario e post universitario.

Per ognuno dei casi, mostreremo come una più attenta progettazione didattica del lavoro proposto conduca gli studenti ad affrontare i punti cruciali sottovalutati o addirittura ignorati.

Come conclusione, analizzeremo le analogie fra i tre esempi mostrati e cercheremo di capire perché e come modificare le schede di lavoro proposte agli studenti per prevenire difficoltà e fraintendimenti.

2. Primo esempio: Gli assi dei cateti di un triangolo rettangolo.

2a. I disegni con carta e matita

Ecco una prima scheda di lavoro proposta ad una popolazione molto varia di studenti[1].

---

[1] Gli studenti interessati a questa sperimentazione erano allievi di un biennio PNI Liceo Classico, inizio del triennio di Liceo Scientifico, inizio del biennio della Facoltà di Ingegneria, laureati in Matematica o Fisica all'inizio dei corsi di Specializzazione per l'Insegnamento Secondario (SSIS).

Assi dei cateti di un triangolo rettangolo

1. *Disegna un triangolo rettangolo*
2. *Disegna gli assi dei i cateti*
3. *Elenca le proprietà geometriche che osservi*

Il lavoro assegnato coinvolge conoscenze e competenze che potremmo ritenere basilari nella scuola secondaria, perciò ci si potrebbe aspettare una larga maggioranza di successi. Così non è stato: gli studenti di liceo, lavorando con carta e matita hanno prodotto, per la maggior parte, disegni come quelli mostrati in figura 1.

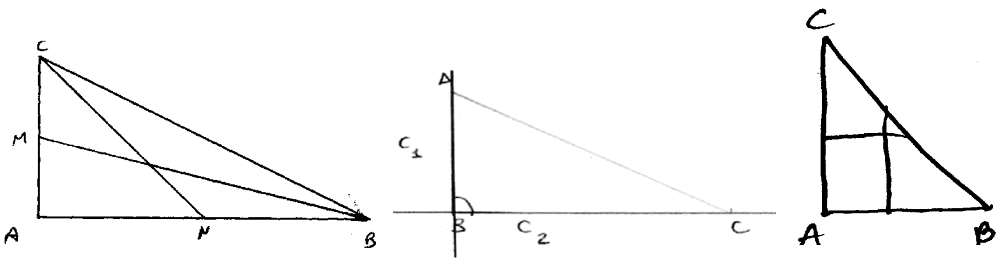

Fig. 1

Dunque molti studenti non recepiscono neppure il significato della frase “assi dei cateti” e disegnano due mediane o prolungano i cateti. Inoltre, nei pochissimi casi in cui eseguono correttamente la costruzione degli assi, spesso disegnano il punto d’intersezione interno del triangolo.

Quanto poi alle proprietà elencate, manca completamente l’osservazione della costruzione e, nella maggior parte dei casi, compaiono solo proprietà generali dei triangoli rettangoli.

Molte matricole universitarie non si comportano in modo molto diverso.

Ecco un esempio interessante di risposta.

Vengono tracciati gli assi dei cateti. Il loro punto di intersezione cade chiaramente ben all’interno del triangolo.

Il commento alla costruzione e alla figura ottenuta è:

L’asse di un segmento è la retta passante per il suo punto medio e i cui punti sono equidistanti dai suoi estremi. Costruendo gli assi dei cateti di un triangolo rettangolo essi si incontrano in un punto chiamato circocentro che *è il centro di una circonferenza circoscritta ad un triangolo. L'asse di segmento si ottiene puntando il compasso con apertura* $\overline{AB}$ *prima in A poi in B e individuando 2 punti sopra e sotto il rettangolo.*

In questa scheda, e in altre analoghe, un particolare attira l'attenzione: lo scollamento fra le modeste competenze grafico – procedurali, che si rilevano dal disegno e le più mature conoscenze dichiarative, che emergono dai commenti. Il circocentro è disegnato troppo vicino a C per poter essere equidistante dai tre vertici; ma questa incongruenza non viene colta dallo studente, come se commenti e disegno fossero eseguiti da due persone diverse!

Molti degli studenti alla Scuola di Specializzazione all'Insegnamento secondario (SSIS), pur essendo laureati in Matematica, non danno risposte significativamente diverse.

Ecco alcuni esempi.

Alessandro, diplomato al Liceo Scientifico e laureato in Matematica, alla consegna

Disegna un triangolo rettangolo. Traccia gli assi dei cateti

risponde disegnando un triangolo rettangolo in A e un sistema di riferimento cartesiano avente gli assi coincidenti con i cateti del triangolo. Alla consegna

Commenta la costruzione e la figura ottenuta

risponde scrivendo

Un cammino C1 a tratti nel piano Axy il cui "bordo" è dato dall'asse delle x (percorso dal punto A verso B), dalla semiretta uscente dal punto B e passante per C e dall'asse y nel tratto da C ad A scegliendo l'orientamento antiorario.

Rosa, diplomata al Liceo Classico e laureata in matematica, e Maddalena, diplomata al Liceo Scientifico e laureata in Matematica, disegnano ambedue un triangolo rettangolo e gli assi dei cateti. Questi ultimi si intersecano in un punto interno al triangolo.

Scrive Rosa:

Ho costruito un triangolo rettangolo ABC (rettangolo in B). Dopodiché ho costruito il punto medio di ciascuno di essi, rispettivamente in M1 e M2.

Il punto d'intersezione P dei due assi è interno al triangolo. Ho utilizzato un righello.

Scrive Maddalena:

L'asse passa per il punto medio del cateto ed è ortogonale al cateto.
All'interno del triangolo i due assi individuano 1 rettangolo, 2 trapezi rettangoli e un triangolo rettangolo.

2b. Disegni con Cabri

Poco dopo[2], senza che l'insegnante avesse commentato in alcun modo il lavoro svolto con carta e penna, agli studenti è stata proposta, in laboratorio di informatica, la scheda mostrata qui sotto.

Assi dei cateti di un triangolo rettangolo

Utilizza Cabri per disegnare:

1. *un punto A;*
2. *una retta r passante per A;*
3. *una retta s passante per A e perpendicolare alla retta r;*
4. *sulla retta r un punto B distinto da A;*
5. *sulla retta s un punto C distinto da A;*
6. *il segmento BC.*

Costruisci ora gli assi dei segmenti AB e AC.

Prova a deformare la costruzione mediante il "trascinamento" dei punti A, B, C; noti qualche proprietà che permane? Cosa osservi?

Prova a dimostrare la (o le) proprietà che hai appena descritto.

[2] Agli studenti universitari e post universitari il lavoro con Cabri è stato proposto subito dopo quello con carta e matita; per gli studenti liceali si è aspettato l'incontro successivo.

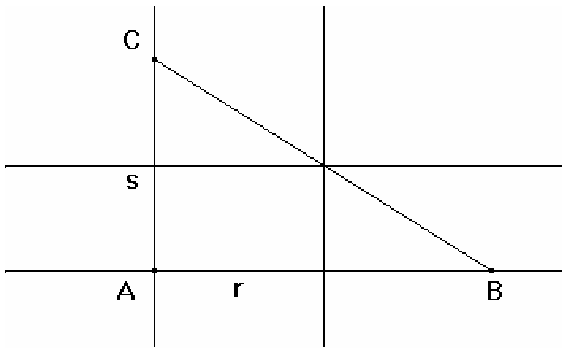

Fig.2

È facile capire che cosa volevamo indagare con quest'attività: un contesto di lavoro più stimolante avrebbe risvegliato conoscenze e competenze sopite?

Per esaminare meglio la situazione, gli studenti liceali sono stati divisi in due gruppi: un gruppo ha lavorato con la scheda mostrata qui sopra, mentre l'altro gruppo lavorava con una scheda priva del punto 6.

La differenza era stata introdotta con uno scopo ben preciso: verificare se e come la presenza dell'ipotenusa BC aiutasse gli studenti a osservare la particolare posizione del circocentro. In realtà, non è stata rilevata alcuna significativa influenza dell'ipotenusa sul lavoro degli studenti.

In tutti i gruppi, la presenza del pulsante "Asse di un segmento" ha portato a realizzare la costruzione corretta e, in parecchi casi (ma non in tutti) a confrontarla con quella eseguita con carta e matita: l'ambiente sembra avere una notevole influenza sugli studenti e quello che si realizza in laboratorio di informatica sembra talvolta non interagire adeguatamente con quello che si studia in classe.

Gli studenti che hanno confrontato la figura di Cabri con quella "a mano" hanno commentato il loro lavoro in modo molto simile: "*Mi confondo sempre da quando ho studiato tutto insieme alle medie! Quali sono gli assi? Quelli dell'area? Quelli degli angoli? Quelli che vanno a metà del lato?...*"

Inoltre la maggior attenzione di tutti è stata attratta dalla dinamicità della figura e, gradualmente, gli studenti sono passati dal muovere la figura senza un particolare scopo, all'osservare la presenza di "un rettangolo interno" al modificare la figura per controllare se "il rettangolo interno rimaneva sempre un rettangolo"[3].

---

[3] Per le modalità di utilizzare la funzione di trascinamento in Cabri, vedi nella bibliografia

Alcuni studenti si sono anche chiesti “perché si formava sempre un rettangolo”, avviando una dimostrazione interessante, anche se non sempre formalmente corretta.

Tutti questi ci sono sembrati risultati senza dubbio interessanti, ma nessuna osservazione è stata fatta sul punto di intersezione degli assi.

Il comportamento degli studenti ripropone alcuni noti problemi didattici:

- quello che è costruito dall’allievo non è necessariamente quello che prevedeva l’insegnante[4].
- proprietà evidenti non stimolano gli alunni verso ulteriori ricerche o dimostrazioni.

2c. Gli assi di due lati di un triangolo con Cabri

A questo punto abbiamo deciso di mettere in pratica un classico suggerimento di Aristotele: “impariamo quando siamo sorpresi”[5]. Perciò abbiamo proposto agli studenti di liceo la seguente scheda.

Assi di due lati di un triangolo

Utilizza Cabri per disegnare:

1. *un triangolo ABC;*
2. *gli assi di due lati del triangolo.*

Prova a deformare la costruzione mediante il “trascinamento” dei punti A, B, C; cosa osservi?

Gli studenti hanno realizzato i disegni come quelli mostrati in figura 6, passando dal disegno di sinistra, tracciato per primo, al secondo, infine al terzo. Così hanno osservato che la situazione cambiava cambiando la forma del triangolo: il punto di incontro O dei due assi era in alcuni casi interno al triangolo, in altri O era esterno. Uno studente, più vivace e intuitivo, ha osservato: “*passando da dentro a fuori, il punto dovrà fermarsi su un lato*”.

F. Arzarello ed altri [4].

[4] Vedi, per esempio, la nozione di angolo in J. Hillel & C. Kieran in [8].

[5] Della funzione pedagogica della sorpresa parla anche C.Laborde in [9].

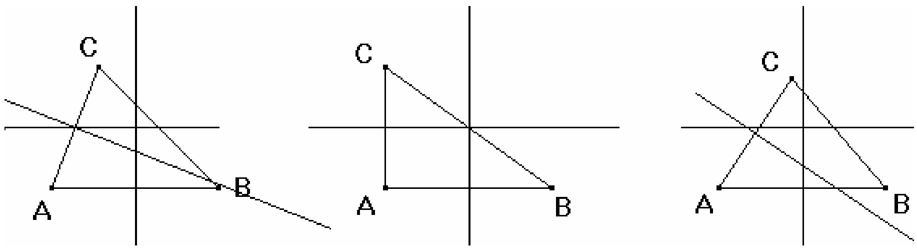

Fig 3

Questa osservazione informale, ha stimolato in tutti la ricerca del caso in cui il punto O si trova proprio su un lato. Così un alunno particolarmente attento ha osservato: "*Nel caso del triangolo rettangolo, il punto O è il punto medio dell'ipotenusa (questi cambiamenti nelle figure probabilmente derivano dal cambiamento degli angoli).*"

Questa non si può ritenere una dimostrazione, ma certamente una positiva attenzione alla continuità del processo.

Gli studenti, dunque, non hanno elaborato vere e proprie dimostrazioni, formalmente corrette; piuttosto si intravede un avvio alla dimostrazione: la dinamicità delle situazioni e delle figure ha sicuramente indotto gli studenti a porsi delle domande, alle quali hanno cercato di dare una risposta.

Alla luce di questo primo esempio, suggeriamo di organizzare un percorso didattico di problem posing sugli assi dei lati di un triangolo, che si sviluppi secondo i seguenti punti:

a. disegnare con Cabri un triangolo e gli assi di due suoi lati;
b. modificare dinamicamente il triangolo e osservare la posizione del punto di intersezione O dei due assi rispetto al triangolo;
c. determinare le condizioni affinché il punto O appartenga al terzo lato.

3. Secondo esempio. Gli assi dei tre lati di un triangolo

Le difficoltà incontrate da parecchi studenti hanno suggerito di continuare ad indagare su "quello che gli studenti non vedono". Il passo più breve poteva essere quello di passare da due a tre assi di un triangolo qualunque.

Abbiamo perciò proposto ad un gruppo di studenti liceali[6] la seguente scheda.

---

[6] Sono stati coinvolti studenti del biennio di liceo classico PNI e di triennio di liceo scientifico.

Assi dei tre lati di un triangolo

Utilizza Cabri per disegnare:

1. *un triangolo ABC;*
2. *gli assi dei tre lati del triangolo.*

Prova a deformare la costruzione mediante il "trascinamento" dei punti A, B, C; cosa osservi?

In questo caso le osservazioni sono state meno vivaci: le più numerose riguardavano il fatto che, muovendo un vertice del triangolo, si muovevano solo due assi; alcuni hanno cominciato ad osservare i triangoli che si venivano a formare, ma nessuno si è chiesto perché i tre assi si intersecano in un unico punto.

Inoltre, qualche discreta domanda dell'insegnante generalmente non è stata recepita o, in alcuni casi ha avuto una rapida risposta: "c'era la figura nel libro della media".

Sembra dunque esserci un effetto "imprinting": alle scuole medie gli studenti imparano che i tre assi di un triangolo si incontrano in un punto, quindi, non si pongono più il problema del perché ciò sia vero.

Ancora una volta c'era bisogno di un "effetto sorpresa". Abbiano per questo pensato di passare dai triangoli ai quadrilateri.

4. Dagli assi dei lati di un triangolo agli assi dei lati di un quadrilatero

Ecco la prima scheda riguardante gli assi dei lati di un quadrilatero.

Assi dei lati di un quadrilatero

Utilizza Cabri per disegnare:

1. *un quadrilatero ABCD;*
2. *gli assi di tutti lati del quadrilatero.*

Prova a deformare la costruzione mediante il "trascinamento" dei punti A, B, C,D; cosa osservi?

Gli studenti hanno osservato sorpresi: “Ora gli assi non si incontrano più in un solo punto!”

L’effetto è stato più dirompente per i ragazzi che poco prima, con aria di sufficienza, avevano giudicato banali le domande sul punto d’intersezione degli assi in triangolo. Alcuni di questi hanno voluto memorizzare un disegno come quello riportato in figura 4 per ricordare questa “scoperta”[7].

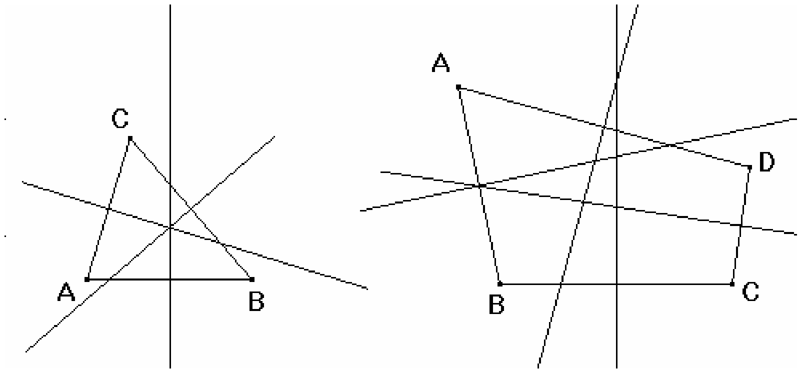

Fig. 4

5. Quadrilateri con gli assi che si intersecano in un punto

L’osservazione dinamica di un quadrilatero, come quello della figura 4 a destra, ha portato gradualmente alcuni studenti dal muovere la figura senza un particolare scopo, all’osservare che, in qualche caso, si trovava un solo punto di intersezione; verso la fine dell’attività alcuni studenti hanno cominciato modificare la figura per cercare “quadrilateri con gli assi che si incontrano in un punto”[8].

In un incontro successivo abbiamo perciò proposto a questi studenti[9] la scheda seguente:

Quali quadrilateri hanno gli assi che si intersecano in un solo punto?

---

[7] In un’esperienza didattica, relativa non agli assi ma alle bisettrici di un triangolo e di un quadrilatero e descritta in [2], gli studenti hanno dato il nome di “umiliazione” ad una figura analoga alla Fig. 4.

[8] Analogo comportamento è stato osservato da Arzarello in [3].

[9] Si è trattato di studenti di ginnasio di un Liceo classico PNI.

Si tratta chiaramente di un problema aperto[10], che ha portato gli studenti ad adottare varie strategie e dare diverse risposte. Ecco alcune risposte, che gli studenti hanno scritto a fianco delle figure che osservavano.

Letizia si è soffermata sullo studio di casi particolari. Nel caso del quadrato ha scritto:

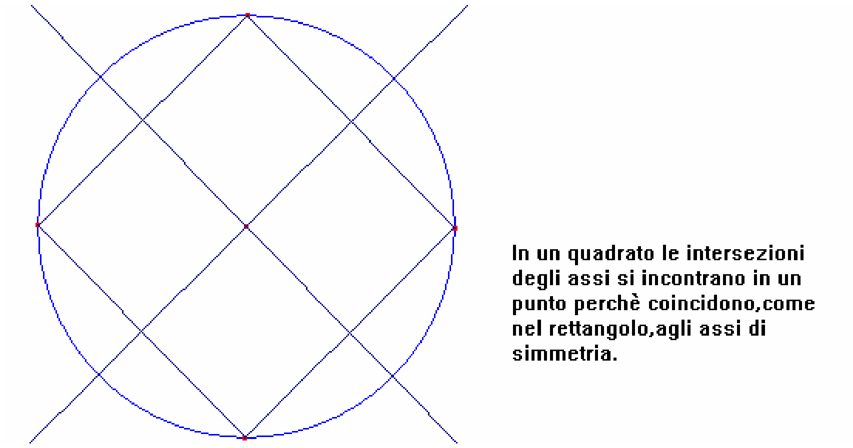

Fig. 5

Per il trapezio ancora Letizia ha scritto:

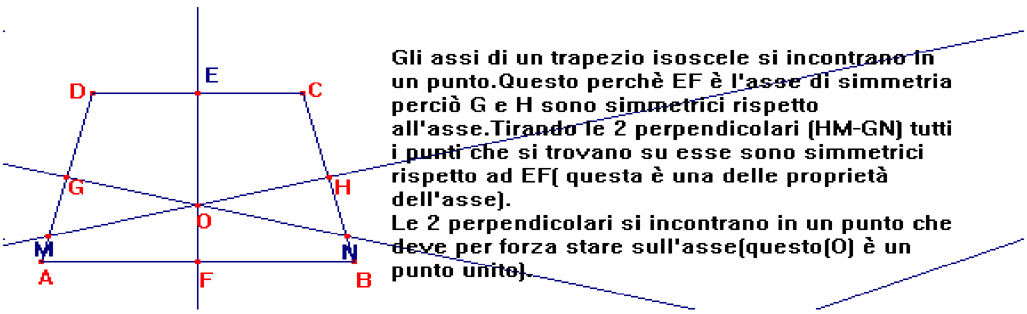

Fig. 6

10 Questo problema è stato studiato anche da Bartolini Bussi in [5].

Questo è il lavoro di Emanuele:

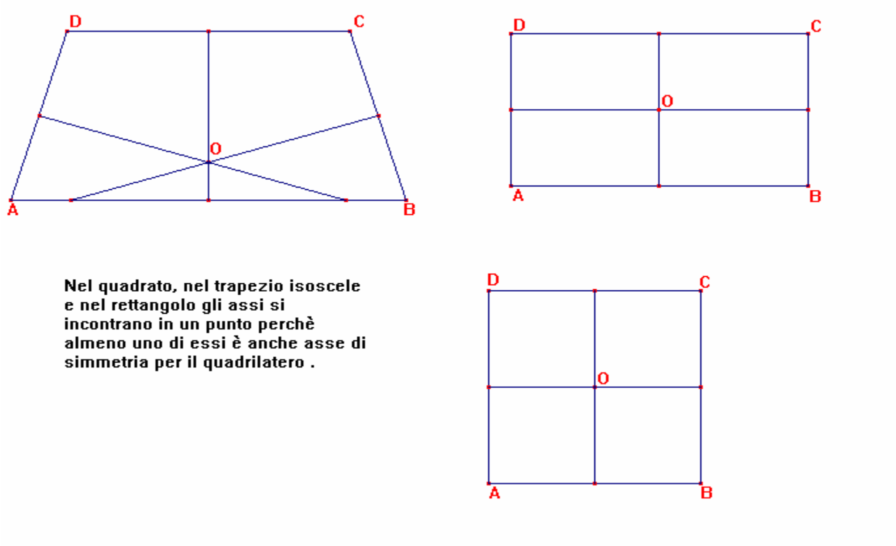

Fig. 7

Alcuni allievi poi, hanno scoperto dei quadrilateri con gli assi che si incontravano in un solo punto, senza alcuna altra proprietà particolare; perciò hanno cominciato ad esplorare questa situazione.

Ecco il lavoro di Giulia:

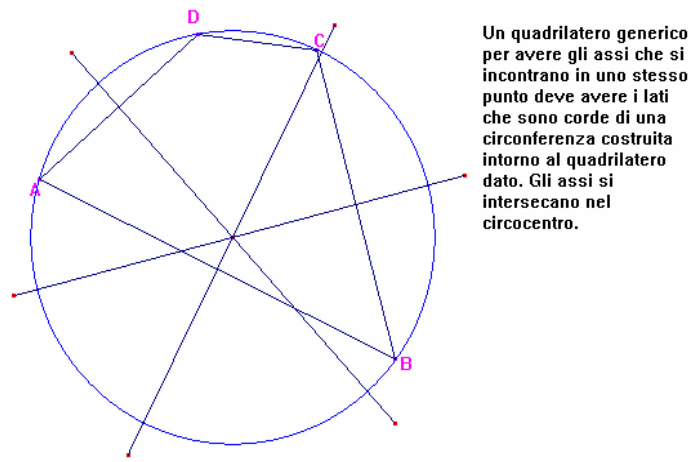

Fig. 8

Nel disegno di Giulia è in qualche modo implicita (non siamo in grado di dire quanto consciamente per Giulia) la dimostrazione, che potrebbe essere formalizzata nel modo seguente.

Consideriamo un qualsiasi quadrilatero ABCD e il punto P di intersezione degli assi dei lati AB e BC: P è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo ABC.

Consideriamo poi il punto P’ di intersezione degli assi CD e DA: P’ è il centro della circonferenza circoscritta al triangolo CDA.

P e P’ coincidono se e solo se le circonferenze circoscritte ai due triangoli coincidono, cioè se e solo se il quadrilatero ABCD è inscrivibile in una circonferenza.

Questa dimostrazione può essere facilmente generalizzata al caso di un poligono qualsiasi.

Il confronto fra quanto scritto da Giulia e questa dimostrazione fa nascere molte domande.

Ad esempio: “Perché, a quale età, in quali occasioni e con quali strategie didattiche è opportuno spingere il lavoro degli studenti fino a dimostrazioni più formalizzate?”

6. Terzo esempio. Le circonferenze di Fermat

Passiamo al terzo esempio. Abbiamo proposto una scheda[11] su un problema che di solito non fa parte dei curricoli liceali o universitari e perciò non dovrebbe risentire d’alcun effetto di “imprinting”.

Disegna un triangolo ABC.
Disegna un triangolo equilatero su ogni lato del triangolo, esternamente ad esso.
Disegna le circonferenze circoscritte ai tre triangoli equilateri.
Queste tre circonferenze si chiamano circonferenze di Fermat.
Descrivi le proprietà che osservi.

[11] Questo problema è stato assegnato per vari anni agli specializzandi della SSIS (Scuola di Specializzazione all’Insegnamento Secondario) del Lazio nel corso di laboratorio Cabri. Le loro reazioni sono descritte anche da G. Accascina e G. Margiotta in [1].

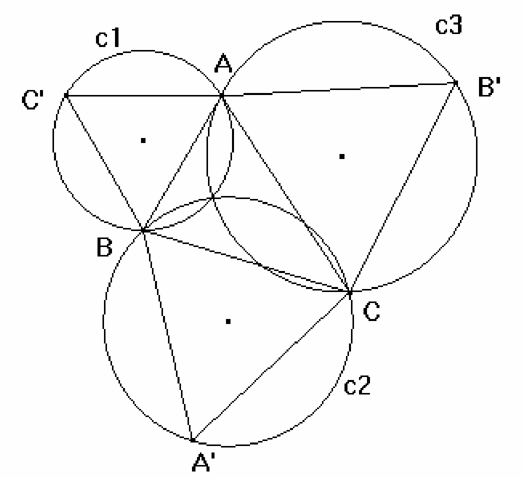

Fig. 9

Questa figura presenta molte proprietà, ma le reazioni degli studenti si sono ripetute molto simili nel corso degli anni. In particolare, si è ripetuto quanto descritto in [1]: "L'evidenza della figura di solito fa sì che molti studenti diano per scontato che le tre circonferenze si intersechino in un punto."

Per esempio, nell'A.A. 2003-2004 la scheda è stata assegnata a 20 specializzandi. Ad ognuno di loro è stato chiesto di scrivere (non di dimostrare) le proprietà osservate nell'ordine con il quale le avevano osservate.

Di 20 specializzandi, ben 8 hanno trovato alcune proprietà, ma non hanno osservato esplicitamente che le circonferenze si intersecano in un punto.

Tutti hanno notato che il triangolo formato dai centri delle tre circonferenze è un triangolo equilatero (teorema di Napoleone).

Uno ha notato che i segmenti AA', BB' e CC' hanno la stessa lunghezza e che la circonferenza passante per A'B'C' è tangente in questi tre punti alle tre circonferenze.

Vi sono poi quattro specializzandi che osservano alcune proprietà del punto di intersezione delle tre circonferenze ma non osservano esplicitamente che tale punto esiste. Uno di essi scrive infatti:

l'intersezione delle tre circonferenze è il baricentro di A'B'C';

un altro:

il punto di intersezione delle 3 circonferenze è il baricentro, incentro, ortocentro del triangolo A'B'C';

un altro:

il segmento AA' interseca le tre circonferenze nel punto centrale del trifoglio;

un altro:

c1, c2, c3 si incontrano in un punto interno al triangolo ABC.

Quattro specializzandi notano esplicitamente che le tre circonferenze si intersecano in un punto.

Infine quattro specializzandi notano come prima cosa l'intersezione comune delle circonferenze.

Ritroviamo ancora una volta la stessa situazione: una proprietà risulta per gli studenti talmente ovvia da sfuggire all'attenzione. Sarebbe dunque, a nostro avviso, didatticamente improduttivo continuare a far lavorare gli studenti, ad esempio proponendo una dimostrazione di tale proprietà, senza averne prima fatto apprezzare il ruolo o l'importanza.

7. Un percorso alternativo sul punto di Fermat

Per attirare l'attenzione degli studenti sul problema dell'intersezione delle tre circonferenze di Fermat si può assegnare la seguente scheda:

Disegna un triangolo ABC.

Disegna un triangolo equilatero sul lato AB del triangolo, esternamente ad esso.

Disegna un triangolo equilatero sul lato BC del triangolo, esternamente ad esso.

Disegna un triangolo qualsiasi sul lato CA del triangolo, esternamente ad esso.

Disegna le circonferenze circoscritte a questi ultimi tre triangoli.

Che cosa osservi?

In questo caso si ottiene un disegno analogo a quello di figura 10: le tre circonferenze, circoscritte ai triangoli esterni non si incontrano più in un solo punto.

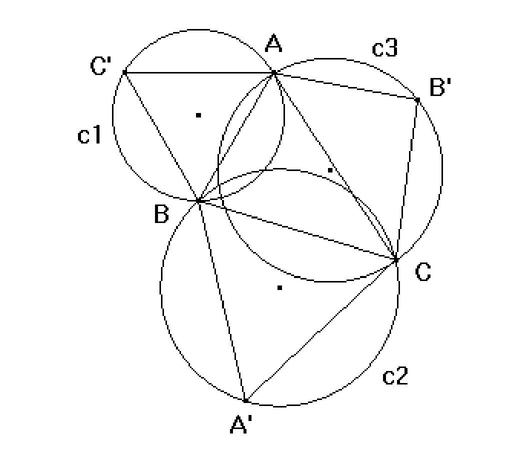

Fig. 10

Si può ora convogliare l'attenzione degli studenti sul problema dell'intersezione delle tre circonferenze.

Ecco un possibile percorso didattico.

Si può suggerire agli studenti di disegnare dapprima solo i due triangoli equilateri e le circonferenze c1 e c2 ad esso circoscritte. Queste circonferenze si incontrano, oltre che in B, anche in un altro punto, che abbiamo chiamato F in figura 11.

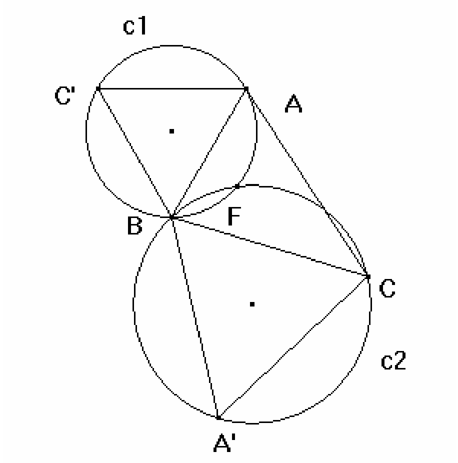

Fig. 11

Si cercheranno quindi le condizioni che devono essere soddisfatte dal terzo vertice B'del triangolo di lato AC, affinché la circonferenza ad esso circoscritta e le altre due circonferenze si intersechino in uno stesso punto.

Così diventa più facile scoprire la condizione: la terza circonferenza deve necessariamente passare per i punti A, B e per il punto F di intersezione delle prime due circonferenze, come mostra la figura 12.

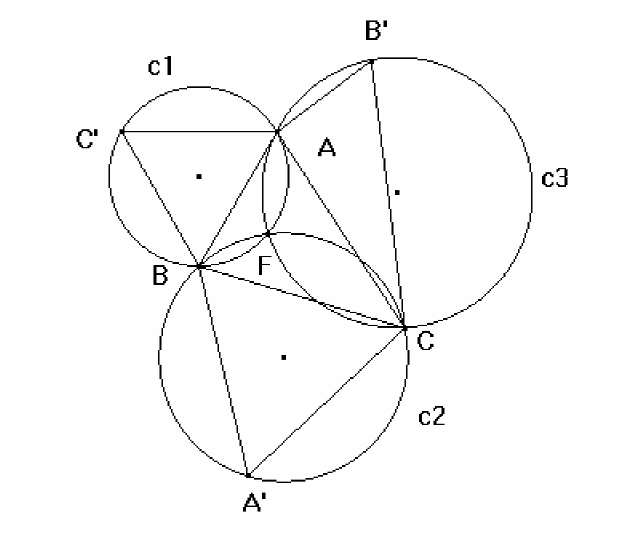

Fig. 12

Abbiamo quindi scoperto che il vertice B'del terzo triangolo deve appartenere alla circonferenza passante per A, B e F; perciò possiamo trovare infiniti triangoli AB'C , che soddisfano la condizione richiesta.

In ogni caso, qualsiasi sia il punto B', l'angolo $A\hat{B}'C$ ha misura costante poiché insiste sulla corda AC.

Possiamo chiedere allora agli studenti di determinare tale misura.

Gli studenti, molto probabilmente, chiederanno a Cabri di calcolare tale misura: al variare del punto B' sulla circonferenza c3, la misura è sempre uguale a 60°.

Naturalmente possiamo chiedere di trovare una spiegazione di questa proprietà e indirizzare gli studenti verso una dimostrazione.

Possiamo aiutare gli studenti suggerendo di congiungere il punto F con i tre vertici ABC del triangolo originario, come mostrato in Fig. 13.

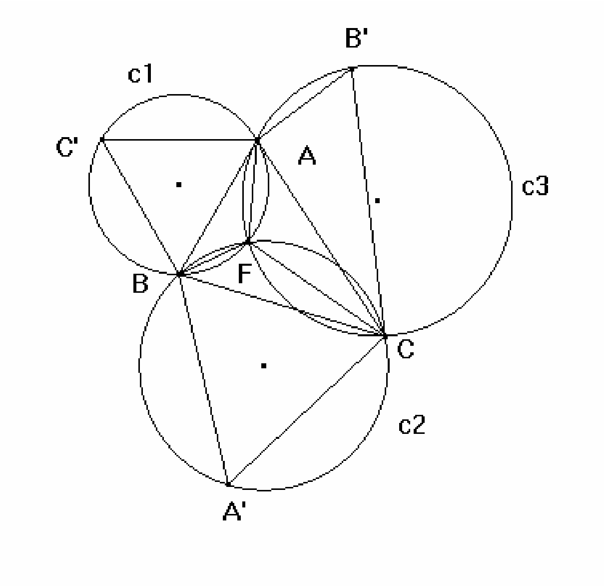

Fig. 13

Ora la dimostrazione è facile.

Si considerano i quadrilateri AC'BF, BA'CF e AB'CF. Sono tutti iscritti in circonferenze. Si ha quindi:

$$A\hat{C}'B + A\hat{F}B = 180°$$
$$B\hat{A}'C + B\hat{F}C = 180° \ .$$
$$C\hat{B}'A + C\hat{F}A = 180°$$

Inoltre gli angoli $A\hat{C}'B$ e $B\hat{A}'C$, che appartengono a triangoli equilateri, sono uguali a 60° e quindi gli angoli $A\hat{F}B$ e $B\hat{F}C$ sono entrambi uguali a 120°.

Segue che l'angolo $A\hat{F}C$, che insieme agli angoli $A\hat{F}B$ e $B\hat{F}C$ forma un angolo giro, misura anch'esso 120°. L'angolo $A\hat{B}'C$ misura perciò 60°.

La dimostrazione sembrerebbe così completata.

Muovendo invece i vertici del triangolo ABC originario, Cabri ci permette di osservare facilmente che il punto F può anche essere esterno al triangolo originario ABC, come mostra la figura 14.

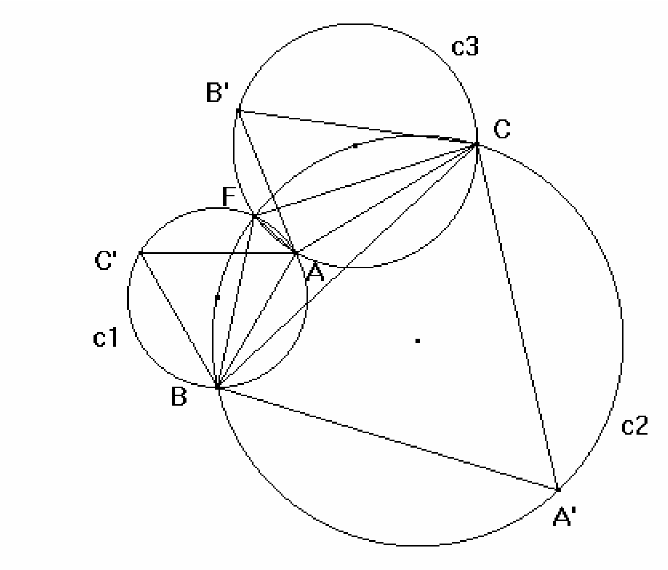

Fig. 14

In tal caso, tutto diventa più complicato e sta al docente decidere se limitarsi al caso in cui il punto F è interno al triangolo ABC o analizzare anche tutti gli altri casi così com'è stato fatto in [1].

Qui ci limitiamo a dire che si può dimostrare che il punto F è interno al triangolo originario ABC se e solo se tutti angoli del triangolo ABC sono minori di 120°.

Nell'appendice tratteremo un caso più generale in cui tutti e tre i triangoli, non sono necessariamente equilateri.

8. Conclusioni

Analizziamo infine i percorsi didattici presentati.

Tutti erano orientati a fissare l'attenzione su proprietà che gli studenti "non vedono":

- nel disegno degli assi dei due cateti di un triangolo rettangolo, "non vedono" che il loro punto di intersezione cade sull'ipotenusa;
- nel disegno dei tre assi di un triangolo trovano ovvio che i tre assi si incontrino sempre in un punto;

- nelle circonferenze di Fermat trovano ovvio che le tre circonferenze si incontrino in uno stesso punto.

Perché gli studenti “non vedono” queste proprietà?

Un primo suggerimento è venuto da quanto ha scritto Emma Castelnuovo, a proposito dei criteri di uguaglianza dei triangoli insegnati alla scuola media[6]:

L’insegnante dice, ad esempio: «disegnate due triangoli aventi due lati e l’angolo compreso rispettivamente uguali e dimostrate, cioè verificate, che sono uguali».

L’insegnante fa il disegno alla lavagna e ha ben cura di tracciare due triangoli visibilmente uguali. Il bambino misura, facendo uso degli strumenti, gli altri elementi dei triangoli e verifica che sono tutti uguali; ma il bambino non comprende – ed è evidente che non può comprendere – il senso di questa verifica, perché egli è certo – a priori – che quei due triangoli sono uguali, dato che li “vede” uguali. Tutto ciò dipende dal fatto che queste proprietà, precedentemente enunciate, sono talmente evidenti agli occhi di un bambino che egli non solo non sente la necessità di una dimostrazione, ma gli sembra inutile anche una verifica sperimentale.

I criteri di uguaglianza, trattati in questo modo, ci sembra non abbiano altro scopo che quello di condurre l’allievo ad un vuoto verbalismo.

Le nostre recenti esperienze, riviste alla luce di queste classiche riflessioni didattiche, hanno suggerito un’ipotesi sulla natura delle proprietà evidenti: *sono ovvie per gli studenti le proprietà invarianti rispetto ai vincoli della costruzione*.

Questo ha suggerito quindi un’ipotesi di lavoro: *gli studenti notano le proprietà che variano quando la figura è in movimento.*

Possiamo applicare questa indicazione, in particolare, al lavoro con Cabri: se vogliamo far notare agli studenti una proprietà, è necessario progettare un itinerario didattico in cui la proprietà non sia un invariante della figura, ma vari quando sulla figura si operi con la funzione di *trascinamento*.

E infine, se vogliamo che il lavoro scolastico produca negli studenti delle competenze consolidate, invece di un “vuoto verbalismo”, particolare attenzione va data alla progettazione del materiale didattico (schede di lavoro, ...) e alla scelta dei problemi proposti, raccogliendo anche le sollecitazioni scritte da M. Dedò in [7]:

"... problemi intelligenti, ..., problemi che generano altri problemi, e che stimolino la fantasia (di chi impara e anche di chi insegna); che forzino la persona a pensare, a discutere, a fare dei collegamenti. Problemi e situazioni ricchi di spunti che diano la possibilità di fare matematica in modo attivo: fare degli esperimenti, intravedere un filo comune nei risultati di questi esperimenti, formulare delle congetture, cercare di giustificare queste congetture, provare l'entusiasmo della 'scoperta' ..."

9. Appendice. Una generalizzazione delle circonferenze di Fermat

Torniamo al problema analizzato nel paragrafo 8.

Abbiamo costruito due triangoli equilateri e un triangolo qualsiasi su tre lati del triangolo originario ABC e ci siamo chiesti in quali casi le tre circonferenze ad essi circoscritte si intersecano in un punto.

Un'attenta analisi della dimostrazione che abbiamo fatto ci ha portato a generalizzare il problema, come mostra la scheda seguente.

Disegna un triangolo ABC.
Costruisci su tre lati del triangolo tre triangoli, esternamente al triangolo dato.
Disegna le circonferenze circoscritte a questi tre triangoli.
In quali casi le tre circonferenze si intersecano in un punto?

In generale si ottiene un disegno come quello di figura 14. Le tre circonferenze non si incontrano tutte in uno stesso punto.

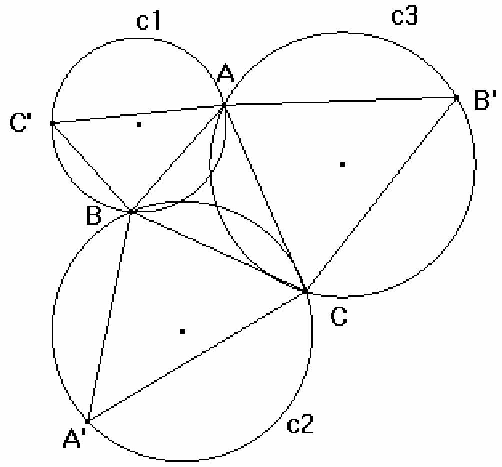

Fig. 15

Procedendo proprio come nel caso particolare visto nel paragrafo 8, consideriamo dapprima solo i triangoli AC’B e BA’C e le circonferenze c1 e c2 ad essi circoscritte (disegnate in figura 16) e ci chiediamo quali condizioni debba verificare il punto B’ affinché le tre circonferenze si incontrino in un punto.

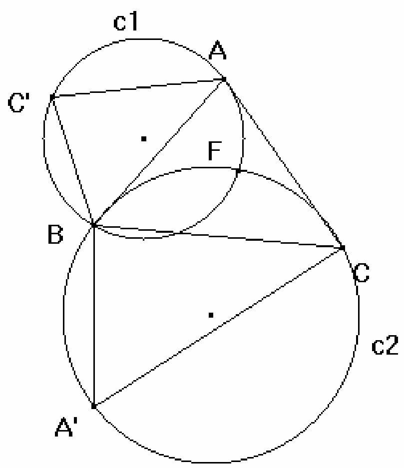

Fig. 16

Analogamente al caso particolare, troviamo che il punto B’ deve appartenere alla circonferenza c3 passante per A, F e C, come mostrato in figura 17.

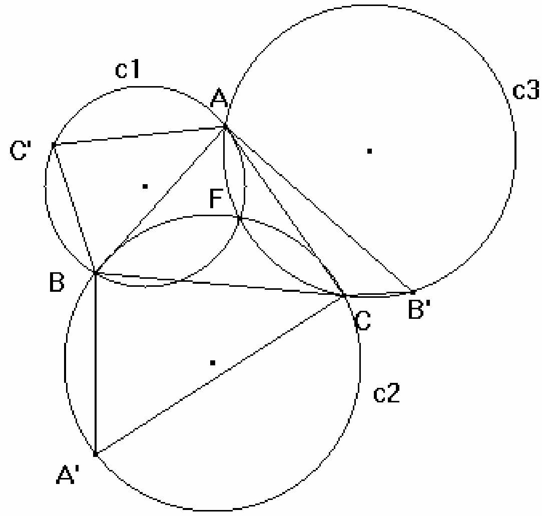

Fig. 17

Anche in questo caso l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}'C$ è invariante al variare di B' su c3. Cerchiamo la sua ampiezza.

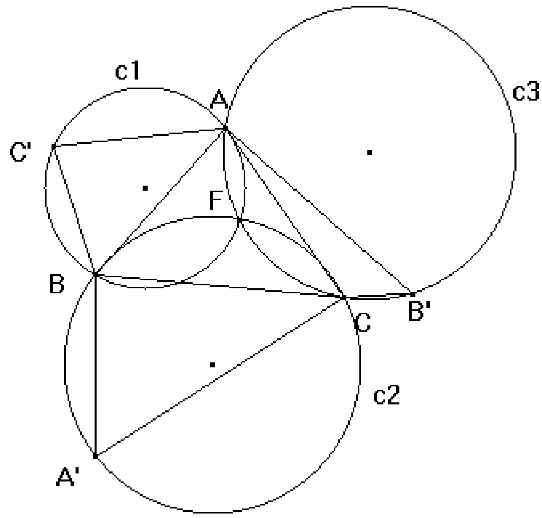

Fig. 18

Il ragionamento è molto simile al caso precedente.

Si considerano i quadrilateri AC'BF, BA'CF e AB'CF, tutti iscritti in circonferenze . Si ha quindi:

$$A\hat{C}'B + A\hat{F}B = 180°$$

$$B\hat{A}'C + B\hat{F}C = 180°$$

$$C\hat{B}'A + C\hat{F}A = 180°$$

D'altronde abbiamo anche

$$A\hat{F}B + B\hat{F}C + C\hat{F}A = 2 \cdot 180°,$$

e quindi:

$$A\hat{C}'B + B\hat{A}'C + C\hat{B}'A = 180°.$$

Abbiamo così dimostrato che le tre circonferenze si intersecano in un punto se la somma delle misure gli angoli di vertici A', B' e C' è uguale a 180°.

In effetti, nella nostra dimostrazione abbiamo usato il fatto che il punto F, punto di intersezione delle circonferenze C1 e C2 diverso da B, è interno al triangolo originario ABC.

Usando Cabri è facile rendersi conto che non sempre accade ciò, come mostra la figura 19.

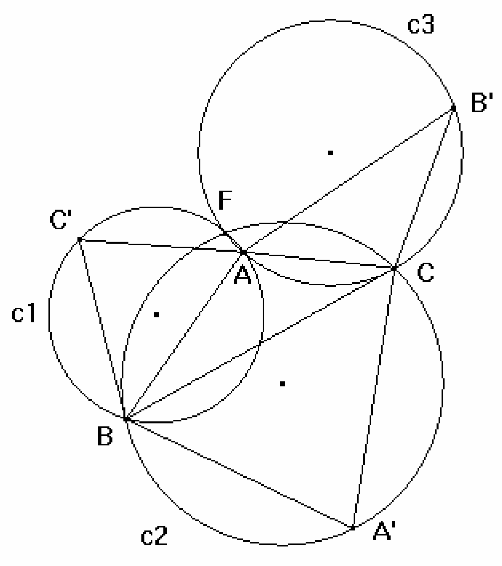

Fig 19

Viene spontaneo chiedersi se il teorema appena dimostrato rimane valido anche in questo caso.

Facciamo eseguire qualche calcolo a Cabri.

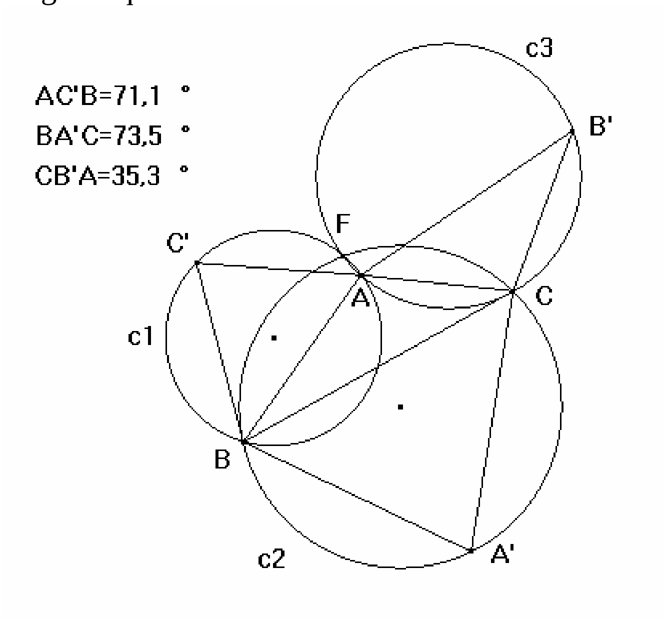

Fig. 20

In effetti, la relazione trovata sopra sembra sussistere ancora.

Sta al docente decidere se chiedere agli studenti di dimostrare anche questo caso o limitarsi al caso in cui il punto F è interno al triangolo originario ABC.

Bibliografia

[1] G. Accascina, G. Margotta, "*Alla ricerca di triangoli equilateri con Cabri*".

"*Prima parte*", Progetto Alice, n. 8, 2002, pp. 175 – 200.

"*Seconda parte*", Progetto Alice n. 9, 2002, pp. 383 – 408.

"*Terza parte*", Progetto Alice, n. 10, 2003, pp. 1 – 23.

[2] G. Accascina, M. Batini, F. Del Vecchio, G. Margiotta, E. Pietropoli, D. Valenti, "*Problem Posing e calcolatori*", Quaderno Carfid, 2002, p. 2 – 29.

[3] F. Arzarello, "*Inside and outside: Spaces, times and language in proof produc-*

tion”, Proc. 24th PME Int. Conf., Vol 1, 2000, pp. 23 – 38.

[4] F. Arzarello, C. Micheletti, F. Olivero, O. Robutti, D. Paola, G. Gallino, “*Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry*”, in A. Olivier & K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2, 1998, South Africa: University of Stellenbosch, pp. 32 – 39.

[5] Bartolini, Bussi, “*Ricerche in didattica della matematica: alcuni studi italiani*”, Bollettino UMI – La matematica nella Società e nella Cultura - serie VIII, volV-A, 2001, pp. 117 – 150.

[6] E. Castelnuovo, “*L’oggetto e l’azione nell’insegnamento della geometria intuitiva*”, in AA.VV., Il materiale per l’insegnamento della matematica, La Nuova Italia, 1965, pp. 42 - 43.

[7] M. Dedò, “*Più matematica per chi insegna matematica*”, Bollettino UMI sez. A, agosto 2001, pp. 247 – 275.

[8] J. Hillel, C. Kieran, “*Schemas used by 12 year-Olds in solving selected Turtle Geometry tasks*”, Recherches en Didactique des Mathématiques, 8 (1-2), 1987, 61 -102.

[9] C. Laborde, “*The design of curriculum with technology: lessons from projects based on dynamic geometry environments*”, CAME Symposium, Reims, June 23 and 24, 2003.

Giuseppe Accascina, Mariolina Batini
Francesca Del Vecchio, Giovanni Margiotta
Enrico Pietropoli, Daniela Valenti