

## La geometria 3D nella formazione degli specializzandi SSIS

G. Accascina\*, E. Rogora\*\*

\*Dipartimento Me.Mo.Mat., Università “La Sapienza” di Roma, SSIS del Lazio

\*\* Dipartimento di Matematica, Università “La Sapienza” di Roma, SSIS del Lazio

### **INTRODUZIONE**

La geometria euclidea tridimensionale (che per brevità chiameremo semplicemente *geometria 3D*) dovrebbe rivestire un ruolo non secondario nella scuola. Per poterla insegnare è necessario che i professori ne conoscano gli aspetti fondamentali. Perché ciò avvenga è necessario che sia loro insegnata in qualche momento della loro carriera scolastica e universitaria, il che avviene raramente in maniera organica.

Descriviamo qui alcune esperienze di insegnamento nei corsi di specializzazione SSIS che mettono in luce come al termine dei corsi universitari la conoscenza della geometria 3D continui ad essere scarsa e lacunosa. Il lavoro ha avuto origine analizzando le difficoltà che gli specializzandi hanno manifestato nelle attività svolte nei nostri corsi che vertevano sulle nozioni di base di parallelismo e perpendicolarità. L'analisi delle difficoltà è stata fatta insieme agli specializzandi. Ad essi abbiamo chiesto di riflettere per scritto sulle loro esperienze scolastiche, sulle ragioni per cui la geometria 3D risulta così ostica e sulle difficoltà specifiche che hanno incontrato. Nella stesura di questo lavoro abbiamo ampiamente utilizzato i loro commenti che sono riportati in corsivo nel testo in forma completamente anonima in quanto non siamo qui interessati a correlare le varie risposte. Gli specializzandi coinvolti sono stati una trentina. Di ognuno di essi abbiamo riportato al più tre frasi. Ringraziamo tutti i nostri studenti per la loro partecipazione e il loro entusiasmo, senza le quali questo lavoro non avrebbe mai potuto essere scritto.

Publicato in

Atti del II convegno nazionale La Matematica e la Fisica nella scuola e nella formazione degli insegnanti, Torino, 14-16 settembre 2005. Ghisetti & Corvi, Milano, 257-261

## **GLI SPECIALIZZANDI SSIS E LA GEOMETRIA TRIDIMENSIONALE**

Negli ultimi due anni abbiamo svolto un corso sulla geometria 3D rivolto a specializzandi iscritti al secondo anno dell'indirizzo fisico - matematico della SSIS del Lazio. Gli iscritti avevano già ottenuto una laurea quadriennale, per la maggior parte in Matematica, e da lì a poco avrebbero ottenuto l'abilitazione all'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori. Alcuni di loro avevano già svolto supplenze.

La prima delle attività consisteva nel rispondere per scritto ad una serie di domande sulle principali definizioni e proprietà relative alle nozioni di parallelismo e di perpendicolarità tra enti lineari dello spazio tridimensionale. Abbiamo quindi chiesto agli specializzandi di compilare un questionario sui loro studi di geometria 3D nelle scuole e nell'università e di riflettere per scritto sulle difficoltà incontrate in tali studi e sulle ragioni per cui la geometria tridimensionale è considerata difficile da insegnare e da apprendere.

La seconda attività consisteva in un esame delle risposte date dagli specializzandi nel corso della prima attività. Abbiamo impegnato tre ore per esaminare le risposte più significative. Si sono discussi gli errori fatti dagli specializzandi, offrendo controesempi, sono state proposte definizioni corrette, ne è dimostrata l'equivalenza con alcune delle definizioni date dagli specializzandi, sono state date per esteso le dimostrazioni delle proposizioni fondamentali relative al parallelismo e alla perpendicolarità così come si trovano in ogni libro di testo.

Infine è stata proposta un'attività di problem solving, svolta con l'aiuto di un software di geometria dinamica tridimensionale (Cabri 3D).

Riportiamo una scelta commentata delle riflessioni degli specializzandi.

### **a) La geometria 3D nel corso degli studi**

Quasi tutti gli specializzandi hanno scarsi ricordi dei loro studi alle elementari, dichiarano di aver studiato la geometria 3D nelle scuole medie, di solito limitandosi al calcolo delle aree e dei volumi, e di non averla studiata nelle scuole secondarie superiori. Dichiarano infine che nei corsi di Laurea in Matematica non hanno studiato organicamente la geometria 3D: qualche argomento è stato trattato e molti sono stati presupposti nei corsi di geometria analitica, algebra lineare, analisi.

Riportiamo alcuni commenti esemplificativi.

*La geometria dello spazio l'ho studiata nelle scuole elementari, medie, nei corsi universitari, alcuni cenni in un corso SSIS, ma non alle scuole superiori.*

*Nelle scuole superiori nessun professore di matematica, che ho avuto, ha mai parlato di geometria dello spazio.*

*Dalla mia esperienza personale credo che, arrivati all'università, il tipo di conoscenze richieste nel questionario della lezione scorsa [parallelismo e perpendicolarità tra enti lineari] siano date per scontate. La convinzione è che questi argomenti vengono trattati negli anni di studio precedenti, ma la realtà, almeno per me, è stata tutt'altra.*

*Soprattutto nei corsi universitari sono date per scontate le definizioni di parallelismo e perpendicolarità tra due rette, due piani, un piano e una retta. Tali problemi vengono studiati in modo approfondito utilizzando le equazioni parametriche e cartesiane di rette e piani, impostando sistemi e calcolando determinanti. L'obiettivo finale è quello di individuare, ad esempio, se due rette date sono parallele nello spazio, trascurando la definizione di parallelismo tra due rette nello spazio.*

*Le conoscenze date per scontate [all'università] coprono generalmente buona parte degli argomenti riguardanti la geometria dello spazio ma ciò che maggiormente si ritiene acquisito e consolidato è la capacità di visualizzare e collocare nello spazio le conoscenze di cui sopra.*

#### **b) Perché la geometria 3D è difficile: scarsa attenzione all'educazione visuale**

Quasi tutti gli specializzandi dichiarano che la difficoltà principale dello studio della geometria 3D dipende da difficoltà di visualizzazione e di rappresentazione degli oggetti tridimensionali.

*La geometria dello spazio può sembrare difficile da apprendere perché i ragazzi non hanno un riscontro visivo significativo e si perdono tra le proposizioni e i teoremi che*

*rimangono concetti slegati e astratti. E forse proprio perché, a volte, viene a mancare l'approccio visivo che ciò la rende anche difficile da insegnare.*

*La geometria dello spazio è considerata un argomento difficile da insegnare e da apprendere perché bisogna sfruttare al massimo l'intuizione, la percezione e l'immaginazione per riconoscere forme e figure nello spazio, e per visualizzare situazioni complesse.*

*Nella risoluzione dei problemi è determinante la capacità di visualizzare certe figure prima ancora di procedere con la dimostrazione. Nei ragazzi la visualizzazione spesso prevale rispetto alla definizione, e non riuscire ad associare una immagine ad un problema ne compromette la risoluzione.*

*Credo che la ragione principale per cui la geometria dello spazio è considerata un argomento difficile da insegnare ed apprendere riguarda il fatto che è difficile disegnare bene gli enti geometrici tridimensionali su un piano, ad esempio la lavagna o il foglio. Per la geometria del piano tutto funziona e viene bene e il disegno aiuta, più di ogni altra cosa, sia l'insegnamento che l'apprendimento. Ma nello spazio come si fa? Disegnare in prospettiva o comunque dando profondità agli oggetti è comunque difficile. Saper visualizzare nella mente gli enti geometrici, allo stesso modo, non è facile e richiede un certo addestramento.*

*[La geometria dello spazio] è difficile da insegnare [...] perché le capacità di disegno necessarie sono insufficienti nella maggior parte delle persone insegnanti.*

*La difficoltà nell'insegnare ed apprendere la geometria dello spazio in parte è legata alla rappresentazione "schiacciata" di un oggetto o di una situazione tridimensionale su un piano (la lavagna). Un ragazzo infatti si affida molto all'immagine che affianca alle definizioni dei concetti geometrici, vista come interpretazione diretta del concetto, e se uno stesso oggetto viene rappresentato in modo diverso, inconsueto, il ragazzo ha difficoltà nel riconoscerlo.*

*Un problema è dunque quello della visualizzazione, in quanto poi si ragiona quasi sempre sulla figura: una figura "fatta male" può essere fuorviante.*

### **c) Perché la geometria 3D si insegna poco: scarsa preparazione dei docenti**

Quasi tutti gli specializzandi sostengono che la geometria 3D spesso non viene insegnata perché i docenti non si sentono preparati.

*Trovo che la geometria dello spazio sia un argomento, più che difficile da insegnare, scomodo perché alcuni insegnanti non hanno una buona padronanza degli argomenti e quindi tendono ad eliminarla dal loro programma.*

*Non pochi, tra i miei colleghi provenienti da Matematica, sono a digiuno quanto me, di nozioni di geometria dello spazio.*

*Nei corsi universitari non ho affrontato argomenti di geometria dello spazio. La geometria dello spazio dovrebbe essere trattata nei corsi universitari perché è scandaloso che un dottore in matematica non abbia competenze specifiche in tale campo. E poi tale dottore, non avendo affrontato tali argomenti, se si ritrova in una classe liceale sicuramente sarà restio a trattare quegli argomenti visto che non ne ha sufficiente conoscenza.*

### **d) Valore formativo dell'insegnamento della geometria 3D**

Nonostante le difficoltà molti specializzandi evidenziano il valore formativo della geometria 3D e il fatto che sia un argomento stimolante.

*A mio parere la geometria dello spazio dovrebbe essere insegnata sia nella scuola superiore che all'università. A scuola perché costituisce un buon esercizio per sviluppare la capacità di saper "rappresentare" le cose, saperle "vedere con la mente". Inoltre allena al ragionamento.*

*Ricordo che alle scuole medie fui invitato ad esprimermi su superfici e volumi di due coni aventi la stessa base con quello di altezza minore interno al maggiore. Non c'era stata nessuna vera trattazione teorica degli argomenti e la capacità di disegnare alla lavagna e interrogarsi sulle proprietà delle figure si rivelarono interessanti. Mi rimase una impressione positiva del divertimento e della curiosità che la materia suscitava: fu un caso in cui la scuola non era noiosa e per un ragazzo di dodici anni si trattò di una novità. Alle scuole superiori così come all'Università mai mi è capitato di affrontare temi simili.*

#### **e) Difficoltà nelle definizioni di perpendicolarità e parallelismo**

Abbiamo rilevato che anche sulle nozioni basilari di perpendicolarità e parallelismo molti specializzandi non hanno le idee chiare, a conferma che la preparazione universitaria è carente. L'intenzione non è quella di esibire una "galleria degli errori" ma di riflettere sul fatto che alcuni errori tipici che si possono rilevare negli studenti delle scuole superiori si presentano anche al termine degli studi del corso di Laurea in Matematica.

*Due piani sono paralleli se tutte le rette contenute nel primo sono parallele alle rette del secondo.*

*Due rette sono parallele se sono contenute in piani paralleli.*

*Due rette sono perpendicolari se sono contenute in piani perpendicolari.*

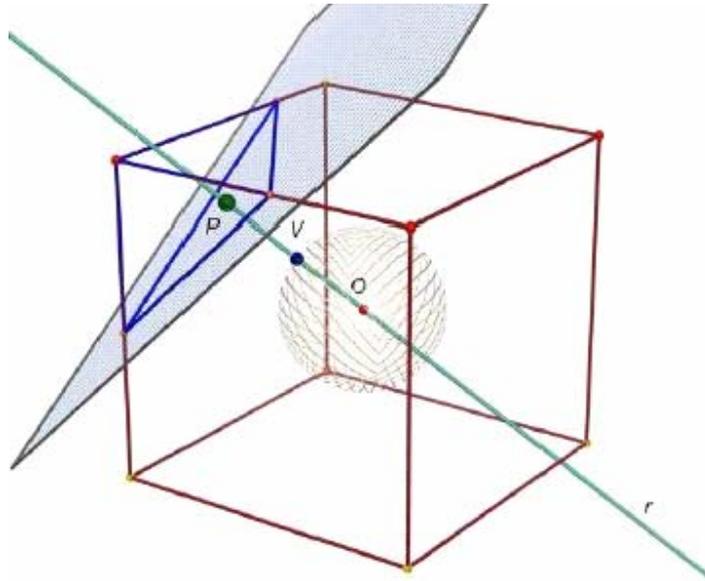
*Una retta è perpendicolare ad un piano se esiste una retta del piano perpendicolare alla retta data.*

*Due piani sono perpendicolari se ogni retta del primo è perpendicolare ad ogni retta del secondo.*

*Due piani sono perpendicolari se per ogni retta  $r$  del primo esiste una retta  $s$  del secondo che è perpendicolare ad  $r$ .*

### ATTIVITÀ DI PROBLEM SOLVING: LE SEZIONI PIANE DI UN CUBO

Dopo aver discusso ampiamente le definizioni proposte dagli specializzandi e gli errori commessi, abbiamo svolto in laboratorio informatico un'attività di problem solving con Cabri 3D incentrata sulle sezioni piane del cubo. Abbiamo scelto questa attività perché in essa sono coinvolte le nozioni di parallelismo e perpendicolarità discusse in precedenza. L'uso di Cabri 3D è intuitivo. Dopo una mezz'ora scarsa gli specializzandi, già abituati ad usare Cabri 2D, sono stati in grado di usare il software con sufficiente padronanza. Abbiamo quindi potuto svolgere un'attività di cinque ore di problem solving. Gli specializzandi avevano a loro disposizione alcuni modelli concreti di cubi e un modello virtuale, da noi costruito in precedenza con Cabri 3D (cfr. Figura).



Nel modello virtuale sono rappresentati gli spigoli di un cubo, un piano e la sua sezione con il cubo.

Il piano con cui si seziona il cubo viene determinato assegnando:

- a) la sua direzione ortogonale  $OV$ , dove  $V$  varia su una sfera centrata nel centro  $O$  del cubo;
- b) un suo punto  $P$ , che varia sulla retta  $r$  passante per  $O$  e per  $V$ .

Il modello può essere manipolato cambiando il punto di vista (cioè girando intorno agli oggetti) e trascinando i punti  $P$  e  $V$ . Muovendo tali punti si possono rappresentare tutte le sezioni piane del cubo.

Qui ci limitiamo a considerare le risposte alla seguente domanda cruciale:

Si possono ottenere triangoli rettangoli come sezioni piane di un cubo?

Per rispondere a questa domanda non basta lavorare sul modello virtuale. Le distorsioni prodotte dalla necessità di rappresentare il cubo sullo schermo bidimensionale del computer rendono incerto il riconoscimento del triangolo rettangolo. L'attività di manipolazione del modello virtuale e del modello concreto ha fatto emergere tutte le difficoltà legate ai concetti di parallelismo e di perpendicolarità.

Nell'attività svolta in entrambi gli anni circa metà degli specializzandi ha affermato che il triangolo rettangolo può presentarsi tra le sezioni piane del cubo e il resto ha affermato il contrario. In entrambi i casi gli argomenti a sostegno delle affermazioni fatte erano quasi sempre deboli o viziati da fraintendimenti sulle nozioni di perpendicolarità.

L'errore che si ripeté più spesso tra coloro che vedono i triangoli rettangoli è esemplificato dalla seguente risposta:

*Si, esistono triangoli rettangoli. Dalla intersezione del piano con tre facce. Ho sempre un angolo retto tra la base e una faccia laterale: l'angolo formato da due segmenti che appartengono a facce tra loro perpendicolari è di  $90^\circ$ .*

Più riposto è l'errore che viene fatto da alcuni specializzandi che hanno dichiarato che non si può trovare un tale triangolo rettangolo.

*No. Le uniche sezioni che mostrano angoli di  $90$  gradi sono quelle in cui il piano seziona il cubo parallelamente ad una sua faccia.*

Costoro non hanno osservato che anche tutti i piani paralleli ad uno spigolo del cubo determinano angoli retti, cioè che ci sono infiniti piani perpendicolari a un piano dato passanti per un punto assegnato.

## **CONCLUSIONI**

Molti specializzandi, anche coloro che sono laureati in Matematica, manifestano gravi carenze nella conoscenza delle nozioni basilari di geometria 3D. Per colmare queste lacune non ci sembra sufficiente discutere approfonditamente le definizioni e dimostrare i teoremi fondamentali. Abbiamo infatti riscontrato che molti specializzandi, anche dopo aver riflettuto lungamente sulla teoria, hanno ripetuto sistematicamente alcuni degli errori che avevano già manifestato nel rispondere alle domande sul parallelismo e la perpendicolarità.

A nostro avviso è necessario quindi fornire ai futuri insegnanti, oltre alle conoscenze fondamentali, anche gli strumenti per affinare l'intuizione e la percezione spaziale (disegni ben fatti, modelli concreti e modelli virtuali) e fornire esempi di uso di questi strumenti in attività mirate.