

Movimento, Percezione e Dimostrazione

Summary.

Geometry can be treated from a logical point of view, following the precise sequence of its statements, or from an intuitive or perceptive point of view, which is linked to a global understanding of geometrical objects. The balance between these two aspects is the core of geometrical education.

In this paper we will show and discuss examples of proofs linked to diagrams or models, in which the argument is based on intuition. We will then see how the introduction of motion can give a major role to perception, seen as the skill to develop an argument based only on images and diagrams, almost without any linguistic support. But sometimes perception needs an "external control".

Giuseppe Accascina, Mario Barra,
Claudio Bernardi, Marta Menghini

Publicato su:

L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, vol.
29 A-B n.4, 2006, pp. 313 - 346

Movimento, Percezione e Dimostrazione

*Giuseppe Accascina, Mario Barra, Claudio Bernardi,
Marta Menghini, Università di Roma “La Sapienza”*

Premessa

Fin dall'antichità si è discusso del duplice ruolo della geometria: se essa appartenga, in termini filosofici, al modo delle idee o al mondo sensibile. In termini epistemologici e fondazionali Hilbert e Cohn-Vossen rilevano, in tutta la matematica, due diverse tendenze:

«La tendenza all'astrazione - che cerca di ritrovare, all'interno di un vasto materiale, il punto di vista logico e di ordinarlo secondo una concatenazione sistematica – e l'altra tendenza, quella dell'intuizione, che si rivolge soprattutto ad una comprensione viva degli oggetti e del loro contenuto».

Felix Klein attribuisce un ruolo ancor più significativo all'intuizione geometrica:

«Io la considero come cosa che sta da sé. Si tratta di concepire direttamente le figure dello spazio con le forme che queste hanno effettivamente. Un modello non è per la geometria un mezzo per raggiungere lo scopo, ma lo scopo medesimo».

Nell'ambito della didattica della matematica, la duplice natura della geometria è generalmente descritta con riferimento a *due diversi registri semiotici*: uno di tipo discorsivo, con enunciati appartenenti ad un linguaggio più o meno formalizzato, ed uno di tipo figurale, con immagini o diagrammi (Laborde 2003). Le immagini fanno riferimento ad una comprensione di tipo globale, mentre gli enunciati si riferiscono ad un apprendimento di tipo

lineare che si svolge all'interno di una teoria. Non c'è dubbio infatti che, ai fini della dimostrazione, il linguaggio svolga un ruolo essenziale, sia a livello concettuale sia, soprattutto, didattico: proprio esponendo una dimostrazione, uno studente impara a concatenare i vari enunciati in modo consequenziale.

Il movimento degli oggetti geometrici aggiunge nuovi elementi alla natura della geometria: introduce un "tempo", dunque la linearità non è più appannaggio del solo linguaggio.

In questo lavoro ci proponiamo dapprima di indicare e discutere esempi di dimostrazioni legate a figure, o a modelli, che fanno uso di ragionamenti poggiati sull'intuizione; vedremo poi, con altri esempi, come l'introduzione del movimento possa dare un maggior risalto al ruolo della percezione, intesa come capacità di svolgere un ragionamento quasi senza un supporto linguistico, ma appoggiandosi ad immagini, allusioni.

La percezione necessita però anche di un "controllo esterno" di tipo linguistico. In particolare verranno discussi esempi di dimostrazioni, eseguite con l'ausilio del software Cabri, in cui alcuni passaggi dimostrativi rimangono nascosti.

Percezione, intuizione e dimostrazione: un legame etimologico.

La parola "teorema" viene dal verbo greco θεωρεω che significa guardare, osservare. D'altra parte, "percezione" deriva dal verbo latino "*percipio*", composto da "*per*" e "*cipio*": "*cipio*" significa prendere e dà origine anche all'italiano "capire".

"Intuizione" deriva dal verbo latino "*intueor*", e significa "vedere dentro", ovvero cogliere qualcosa nella sua essenza, senza l'aiuto di un processo razionale.

Interessante è l'etimologia di "dimostrazione": anche il verbo latino "*monstro*" (richiamare l'attenzione) allude ad una percezione visiva, ma è ancora più curioso che "*monstro*" derivi a sua volta dal

verbo "*moneo*" (avvisare, ammonire). Insomma, in una dimostrazione facciamo vedere qualcosa e, contemporaneamente, educiamo qualcuno. In inglese dimostrare si dice "*to prove*"; questa parola deriva dall'aggettivo latino "*probus*", e quindi significa riconoscere come buono: a differenza che nel caso precedente, si allude più alla convinzione di sé stessi che di altri. Nelle parole teorema, dimostrazione e in altre con significato simile non si trova traccia del greco λογος, che significa sia linguaggio sia ragionamento (e da cui deriva logica). Invece, si parla di "analogia" per indicare un rapporto colto direttamente, spesso a livello intuitivo.

Stili diversi nelle dimostrazioni di enunciati elementari

Pur riconoscendo il ruolo essenziale del linguaggio nell'articolare una dimostrazione, è innegabile che in certe situazioni si accettano (ed è giusto accettare) dimostrazioni legate ad una figura, ad un modello, o ad un ragionamento che si appoggia all'intuizione e all'analogia. In questo paragrafo ci proponiamo di esaminare vari esempi, cercando di confrontare stili diversi di dimostrazione.

Iniziamo con un paio di dimostrazioni "informali" (nel senso che non sono facili da formalizzare).

Fin da bambini, impariamo la proprietà commutativa della moltiplicazione. Questa proprietà è accettata in modo talmente forte che, di fronte ad un prodotto di due numeri interi positivi $a \cdot b$, non sappiamo nemmeno dire se questo indica «la somma di a addendi uguali a b » ovvero «la somma di b addendi uguali ad a » (¹).

¹ Se si pensa alla lingua inglese, dove $a \cdot b$ si legge «*a times b*», allora si è portati ad attribuire ad $a \cdot b$ il primo significato (a addendi uguali a b). Tuttavia, la definizione induttiva della moltiplicazione che si introduce nell'aritmetica di Peano e in altre teorie ($x \cdot 0 = 0$ ed $x \cdot y' = x \cdot y + x$) fa riferimento alla seconda definizione (b addendi uguali ad a), definizione confermata anche dalla

Ma come si dimostra la proprietà commutativa della moltiplicazione? Una risposta molto formale, e tutt'altro che semplice, si trova nei corsi di Logica matematica, dove si applica il principio di induzione per riottenere, non senza fatica, le proprietà elementari delle operazioni.

Invece, la maggioranza delle persone accetta la proprietà commutativa in base ad un'immagine mentale in cui $a \cdot b$ puntini (o quadratini) sono disposti in modo da formare un rettangolo: e siccome è indifferente pensare che il rettangolo sia formato da a righe di b puntini ciascuna, ovvero da b colonne di a puntini ciascuna, è "evidente" che $a \cdot b = b \cdot a$.

Quest'ultimo ragionamento è senz'altro accettabile, ma in esso il linguaggio ha un ruolo puramente *descrittivo*: manca un qualunque passaggio *deduttivo*.

Un discorso analogo, forse ancora più esplicito, vale se si considerano le proprietà elementari dell'unione e dell'intersezione fra insiemi, che sono in genere dimostrate ricorrendo ad opportuni diagrammi di Venn, con un controllo diretto sulla figura (un'eventuale traduzione linguistica serve, ancora, solo per descrivere il diagramma).

Il discorso è, naturalmente, molto diverso, qualora si proponano attività didattiche rivolte alla scoperta di regolarità e alla formulazione di congetture, per esempio in un contesto aritmetico. In questi casi, si richiede un'*intuizione* matematica per formulare una congettura, ma la dimostrazione è solo rimandata.

terminologia classica che distingue i due fattori rispettivamente come moltiplicando e moltiplicatore (assegnando così al secondo il ruolo di contatore).

In un contesto molto diverso, è noto che Euclide, parlando di uguaglianza di poliedri, commette un errore. Vediamo la situazione, che presenta vari aspetti di un certo interesse.

Per introdurre l'uguaglianza nel piano, Euclide ricorre alla sovrapponibilità, ma limita al massimo questo approccio (che è citato solo tre volte negli *Elementi*: libro I, proposizioni 4 ed 8; libro III, proposizione 24). Nello spazio, per evitare la sovrapponibilità che risulterebbe ancor più problematica, Euclide segue una via diversa e dice (libro XI, definizione 10) che «*Figure solide uguali e simili sono quelle che sono comprese da facce simili, uguali per numero e grandezza*». E' senz'altro plausibile che per solido si debba intendere *poliedro convesso*, se non altro perché sarebbe difficile attribuire un altro significato; in altre parole, Euclide afferma che due poliedri convessi sono uguali, per definizione, se hanno le facce a due a due uguali.

Tuttavia, nella figura 1 sono illustrati gli sviluppi di due parallelepipedo non uguali ma con le facce a due a due uguali. Più precisamente, ciascuno dei due parallelepipedo ha per facce gli stessi 6 rombi uguali (si tratta di rombi soggetti all'unica condizione che gli angoli ottusi siano minori di 120°); ciò nonostante, i due parallelepipedo non sono uguali, né direttamente né inversamente, cioè uno non è l'immagine dell'altro né in un'isometria diretta (che conserva l'orientazione), né in un'isometria inversa o speculare (che, come la simmetria rispetto ad un piano, inverte l'orientazione).

I due parallelepipedo possono essere "visti" in più modi. Si può partire dalle due basi, due rombi uguali e con i lati paralleli; gli altri 4 rombi (uguali alle basi) costituiscono le facce laterali. Il parallelepipedo a sinistra ammette un piano di simmetria perpendicolare alla base (il rombo al "centro" dello sviluppo) che contiene la diagonale maggiore della base. Invece, il

parallelepipedo a destra ammette un piano di simmetria perpendicolare alla base che contiene la diagonale minore della base. La condizione che gli angoli ottusi siano minori di 120° riguarda il parallelepipedo di destra, perché tre angoli ottusi concorrono nel vertice indicato con P (nel caso gli angoli siano di 120° il poliedro degenera in due esagoni regolari sovrapposti). Questa stessa circostanza, si noti, conferma che i due poliedri non sono uguali, perché in nessun vertice del parallelepipedo di sinistra concorrono tre angoli ottusi.

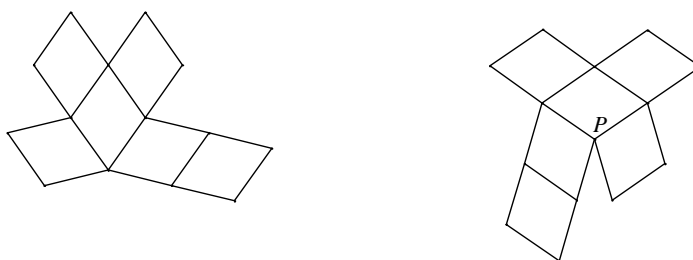


figura 1

Un'idea forse più convincente dei due poliedri si ottiene cercando di costruirsi un'immagine mentale *dinamica*. Pensiamo ad un cubo articolato, cioè costituito dai soli spigoli, snodati nei vertici. Deformiamo le basi, in modo che diventino rombi, mantenendo gli spigoli laterali perpendicolari alle basi. Dopo di che, per ottenere facce tutte uguali, possiamo "inclinare" il parallelepipedo da una parte oppure da un'altra: cioè possiamo spostare la base superiore nella direzione della diagonale maggiore della base (figura a

sinistra), ovvero nella direzione della diagonale minore (figura a destra).²

Abbiamo cercato di descrivere a parole i due poliedri che costituiscono un controesempio all'affermazione di Euclide. Ma, in questo caso come in tante altre analoghe situazioni geometriche, è sostanzialmente impossibile convincersi della correttezza dell'esempio con un ragionamento formale, senza il ricorso a figure o modelli. Come ci si convince, altrimenti, che il poliedro "si chiude"? Si possono controllare sia le lunghezze dei lati che dovranno coincidere una volta costruito il poliedro, sia le somme delle terne di angoli che dovranno avere lo stesso vertice. Ma queste verifiche, pur necessarie a rigore e nel nostro caso molto semplici, non hanno un reale potere di persuasione: sembrano utili soltanto per controllare che siano verificate alcune condizioni necessarie, cioè che non ci siano ostacoli (se due facce hanno due lati di lunghezze diverse, non posso certo incollare le facce lungo quei lati), senza però alcuna garanzia che, se quelle verifiche sono soddisfatte, le cose funzionino.

Nel caso in questione, saremmo portati addirittura a dire che le figure e i modelli non costituiscono un aiuto per il ragionamento, come capita sempre in geometria, ma *sostituiscono il ragionamento* stesso. Sulla scelta in particolare fra modelli concreti e diagrammi dinamici si veda (Accascina, Rogora, in corso di stampa). Diagrammi dinamici in tre dimensioni possono essere prodotti con Cabri 2D e 3D (cfr. Bainville, 2004; Barra, 2004; Catastini e Ghione, 2004; Pellegrino e Tomasi, 2004; Tomasi, 2004).

² In termini di trasformazioni, i due poliedri si ottengono a partire da un cubo tramite opportune affinità che conservano l'uguaglianza degli spigoli: in un caso si tratta di "allungare" il solido allontanando due vertici opposti, nell'altro di "schiacciarlo".

Passiamo, ora, al confronto fra *dimostrazioni diverse di uno stesso enunciato*. Vedremo due teoremi, il primo di geometria, il secondo di aritmetica.

Uno dei primi teoremi che si incontrano nello studio della geometria euclidea afferma che se in un triangolo due lati sono uguali (cioè se un triangolo è isoscele), allora sono uguali anche i due angoli opposti ai lati uguali.

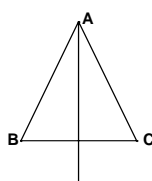
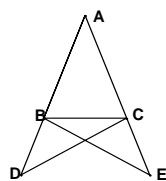
Confrontiamo tre dimostrazioni di questo teorema; per una discussione in proposito si possono leggere (Prodi, 1984) e (Pucci, 1984).

a) Una prima dimostrazione risale ad Euclide (libro I, proposizione 5). A partire da un triangolo isoscele ABC (figura 2), si esegue la classica costruzione prolungando i lati uguali di due segmenti uguali BD e CE (scelti a piacere); dopo di che, applicando i criteri di uguaglianza, si dimostra l'uguaglianza prima dei triangoli ADC ed AEB e, quindi, dei triangoli BCD e CBE , da cui si arriva facilmente alla conclusione.

La dimostrazione è indubbiamente convincente nei suoi singoli passaggi, ma è un po' lunga e non risulta naturale per chi sta iniziando lo studio della geometria euclidea.

figura 2

figura 3



b) Molto più semplicemente, si traccia la bisettrice uscente dal vertice A e, ancora con un criterio di uguaglianza o ricorrendo alla

simmetria rispetto alla bisettrice, si dimostra l'uguaglianza dei due triangoli in cui viene scomposto il triangolo iniziale (figura 3).

Questa dimostrazione è rapida e convincente: si tratta, essenzialmente, di tradurre in termini geometrici il procedimento concreto che consiste semplicemente nel ripiegare il triangolo, supposto realizzato in carta, in modo da sovrapporre i lati uguali per ipotesi.

Tuttavia, la dimostrazione presenta due difetti. In primo luogo, siamo sicuri che *esista la bisettrice* dell'angolo in A ? La cosa è evidente sul piano fisico-sperimentale, ma Euclide costruisce la bisettrice di un angolo in un secondo tempo (libro I, proposizione 9), proprio sfruttando il teorema di cui stiamo parlando. In effetti, con riferimento alla figura 2, la bisettrice si traccia congiungendo A con il punto d'intersezione dei segmenti BE e CD .

Inoltre, da un punto di vista strettamente didattico, non c'è (per quanto a nostra conoscenza) un ragionamento ugualmente semplice per dimostrare il teorema inverso, che invece si ottiene ripercorrendo, con poche varianti, la dimostrazione vista al punto a).

c) Si introduce il primo criterio di uguaglianza dei triangoli in una forma leggermente più forte: «Se in due triangoli ABC e $A'B'C'$ sono uguali i lati AB e $A'B'$, i lati AC e $A'C'$, gli angoli in A e in A' , allora non soltanto i due triangoli sono uguali (come afferma il criterio nella forma usuale), ma sono uguali anche tutte le coppie di elementi contrassegnati con le stesse lettere; in particolare sono uguali gli angoli in B e in B' ».

Basta allora considerare i triangoli ABC ed ACB : questi sono ovviamente uguali (sono lo *stesso* triangolo), ma il criterio nella forma precedente permette di concludere, in particolare, l'uguaglianza degli angoli in B e in C (con le notazioni precedenti bisogna indicare C con B' e B con C').

Fra le tre dimostrazioni quest'ultima è la più elegante, ma anche la più difficile per uno studente all'inizio delle Superiori.

Aggiungiamo alcune osservazioni. Se nella dimostrazione a) accettiamo che i segmenti uguali BD e CE degenerino in un punto (dopo tutto, i segmenti sono scelti a piacere), ritroviamo la dimostrazione c). Anzi, la costruzione nella dimostrazione euclidea serve proprio per "distinguere visivamente" il triangolo ABC dal triangolo ACB .

Su un piano più concettuale, l'ultima dimostrazione corrisponde ad un'idea intuitiva di simmetria intesa in un senso algebrico-formale, una sorta di principio di ragion sufficiente: se i lati di un triangolo individuano gli angoli, allora, se due lati sono uguali, *devono* essere uguali anche i due angoli opposti.

La dimostrazione b), invece, sfrutta l'usuale simmetria rispetto ad una retta e, quindi, si inserisce bene in un percorso didattico in cui si dia risalto alle trasformazioni geometriche. Questo approccio, in cui sicuramente immagini concrete e mentali hanno molta importanza, viene talvolta contrapposto all'approccio assiomatico, in modo più o meno appropriato. Per un confronto teorico in proposito, rimandiamo a (Bernardi e Menghini 2003).

Confrontiamo ora vari tipi di dimostrazione della nota formula che fornisce la *somma dei numeri naturali da 0 ad n*:

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$$

a) Procediamo per induzione. La base è ovvia ($0 = 0$) e il passo induttivo è semplice:

$$0 + 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = n(n+1)/2 + (n+1) = (n+1)(n+2)/2.$$

La dimostrazione è immediata, ma solo per chi conosca il principio d'induzione. Inoltre, come in tutte le dimostrazioni per induzione, occorre conoscere a priori il risultato che si vuole dimostrare.

b) Un secondo metodo, attribuito a Gauss da un noto aneddoto, parte dalla somma dei numeri da 0 ad n scritta una volta in ordine crescente ed una seconda volta in ordine decrescente:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & + & 1 & + & 2 & + & \dots & + & n-1 & + & n \\ n & + & n-1 & + & n-2 & + & \dots & + & 1 & + & 0 \end{array}$$

Siccome tutte le coppie dei numeri scritti in una stessa colonna hanno somma n , abbiamo a che fare, complessivamente, con $n+1$ somme uguali ad n . Pertanto la somma di tutti i numeri che compaiono nelle due righe precedenti è $n(n+1)$. Concludiamo così

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$$

Questa seconda dimostrazione è del tutto elementare e convincente.

c) Ancora più convincente è lo schema riportato in figura 4: accostando in modo opportuno due figure che rappresentano la somma dei numeri fino ad n , si trova un rettangolo di dimensioni n ed $n+1$. Pertanto, il doppio della somma cercata è $n \times (n+1)$.

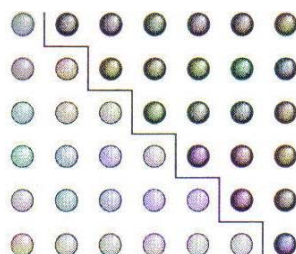


figura 4

Lo schema precedente è un classico, noto fin dall'antichità e riportato in molti testi. Noi l'abbiamo tratto da *Proofs without words* (Nelsen, 1993 e 2000), che raccoglie numerose dimostrazioni senza parole, cioè legate appunto esclusivamente ad una figura. In generale, le *dimostrazioni senza parole* non sono

sempre immediate e nemmeno semplici da capire. Ma, una volta capite, sono convincenti e, rispetto ad un procedimento usuale, più facili da ricordare (proprio perché si appoggiano ad una singola immagine). In un certo senso, le dimostrazioni senza parole non sono di per sé dimostrazioni, ma suggeriscono *come* costruire una dimostrazione.

A nostro parere, tutte e tre le dimostrazioni a), b), c) sono accettabili, ma vale la pena esaminarle meglio. La prima, ineccepibile sul piano del rigore, è nettamente diversa dalle altre, mentre b) e c) sono, nella sostanza, simili fra loro. Probabilmente, non tutti siamo d'accordo nell'accettare c) come una dimostrazione: uno schema lascia forse più perplessi, sia perché una figura è sempre ritenuta meno affidabile di un calcolo, sia perché lo schema sembra riferirsi ad un particolare valore di n .

Quest'ultima critica è molto discutibile: il ragionamento viene capito senza contare, cioè senza conoscere il valore di n . Se ci pensiamo bene, non c'è una differenza sostanziale fra un diagramma particolare, che rappresenta comunque una situazione generale, e i puntini di sospensione "...".

In effetti, anche il ragionamento di Gauss non corrisponde ad una dimostrazione formale, perché i puntini rappresentano una grossa difficoltà. I puntini "..." sono indubbiamente chiari da un punto di vista intuitivo, ma non sono leciti in un linguaggio logico formale, né in un usuale linguaggio di programmazione. Per ottenere una dimostrazione formale, possiamo ricorrere al simbolo di sommatoria (da introdurre per induzione), ma non ai puntini.

Proponiamo la seguente formalizzazione della dimostrazione b), che ha una sua eleganza, ma in cui, rispetto al ragionamento iniziale, si perde l'immediatezza e l'evidenza.

$$\sum_{i=0}^n i = \sum_{i=0}^n (n-i)$$

$$\sum_{i=0}^n i = \frac{\sum_{i=0}^n i + \sum_{i=0}^n (n-i)}{2} = \frac{\sum_{i=0}^n (i+n-i)}{2} = \frac{\sum_{i=0}^n n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

A rigore, tuttavia, si dovrebbe dimostrare (sempre per induzione!) che

$$\sum_{i=0}^n i = \sum_{i=0}^n (n-i), \quad \sum_{i=0}^n a + \sum_{i=0}^n b = \sum_{i=0}^n (a+b), \quad \sum_{i=0}^n k = k(n+1).$$

Negli esempi precedenti, alcuni ragionamenti sono più concreti, altri più astratti. A nostro parere, si dovrebbe cercare di proporre diversi tipi di dimostrazione per incoraggiare e sviluppare negli studenti, anche all'interno della matematica, diverse abilità e diversi modi di ragionare.

Per altri esempi di diversi tipi di dimostrazione, con un confronto fra procedimenti formali e metodi visivi, rimandiamo a Bernardi, 1998; per considerazioni didattiche strettamente collegate si veda anche Miyazaki, 2000.

Figure in movimento prima del Cabri

Già da molto tempo autori di testi di geometria si erano resi conto dell'importanza non solo delle figure, come ausilio didattico, ma anche del loro movimento.

Nel 1741 A. Clairaut forniva la seguente dimostrazione relativa alla somma degli angoli di un triangolo:

«Supponiamo, ad esempio, che BC, ruotando intorno al punto B, si discosti da AB per avvicinarsi a BE, è chiaro che durante la rotazione di BC, l'angolo B si aprirà in modo continuo; mentre, al contrario, l'angolo C si restringerà sempre più. [Possiamo] presumere che la diminuzione dell'angolo C uguaglierà l'aumento dell'angolo B, e che quindi la somma dei tre angoli A, B, C sia sempre la stessa, qualunque sia l'inclinazione delle rette AC, BC, sulla retta AE» (Clairaut, 1741).

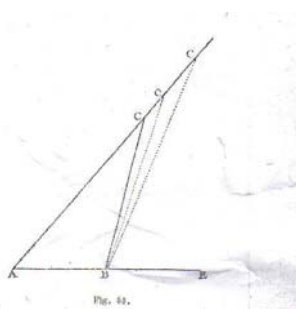
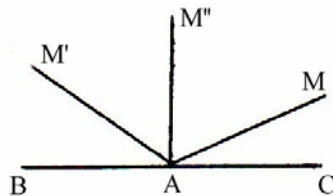


figura 5

Lo scopo di Clairaut non è certo quello di presentare un sistema ipotetico deduttivo. Anzi il suo intento è di risalire a quanto potrebbe aver dato vita alla scienza geometrica, cercando di svilupparne i principi con un metodo naturale, con il metodo “degli inventori”. Clairaut cerca dunque di far scoprire a chi inizia quei principi dai quali potrebbe derivare la misura dei «terreni e delle distanze». Il suo metodo vuole dunque soprattutto convincere. In questo caso, a dire il vero, l’argomentazione esposta con la figura 5 può costituire una premessa, ma difficilmente la si può accettare anche solo come argomentazione del fatto che la somma degli angoli di un triangolo è costante: il fatto che un angolo aumenti e un altro diminuisca non ci dice affatto che la somma è costante.

A. M. Legendre, nei suoi *Elementi* del 1784, utilizza, come Euclide, il movimento rigido (nel senso di sovrapposizione) per dimostrare sia il primo sia il secondo criterio di uguaglianza dei triangoli. Ma in un'edizione del 1935, riveduta da Blanchet, troviamo un uso più deciso del movimento. In quest'edizione ci sono diverse dimostrazioni, basate più sull'intuizione che sul rigore, che non compaiono nelle varie edizioni uscite all'epoca di Legendre; supponiamo dunque che esse siano dovute a Blanchet. Vediamo ad esempio come Blanchet/Legendre dimostra la I proposizione del suo testo:

«Teorema. Da un punto su una retta si può condurre una perpendicolare a questa retta, e non se ne può condurre che una.



In effetti, supponiamo che una retta AM , dapprima appoggiata su AC , ruoti attorno al punto A ; essa formerà due angoli adiacenti, MAC , MAB , dei quali MAC , dapprima più piccolo, andrà sempre aumentando, mentre l'altro, MAB , dapprima più grande di MAC , andrà costantemente decrescendo fino a zero. L'angolo MAC , dapprima più piccolo di MAB , diventerà dunque più grande di questo angolo; di conseguenza ci sarà una posizione AM'' della retta in movimento nella quale questi due angoli saranno uguali, ed è evidente che non ce ne sarà che una sola».

La dimostrazione utilizza l'intuitiva caratteristica di "continuità" che deve avere il movimento stesso: come se il movimento fosse descritto attraverso un parametro numerico appartenente ai reali (il modulo di un vettore o l'ampiezza dell'angolo di rotazione), di cui il lettore intuitivamente "accetta" la continuità. Le preoccupazioni di Blanchet/Legendre, più che al "rigore" e al "metodo", sono rivolte al fatto che venga compreso il contenuto: si tratta di una geometria "conoscitiva" più che "metodologica", che molto affida all'esperienza geometrica dello studente che non va tediato con dimostrazioni di cose banali. La "definizione" di retta come cammino più breve tra due punti, e la dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità della perpendicolare ad una retta per un suo punto già mostrano questo particolare stile, forse apprezzabile da un punto di vista didattico, ma piuttosto ardito in alcuni casi sui quali ben altre cautele aveva avuto Euclide parecchi secoli prima.

Con l'introduzione di Euclide come libro di testo, perlomeno in Italia, il movimento scompare, rimanendo ancorato alla sola dimostrazione del primo e del secondo criterio di uguaglianza dei triangoli (le già citate Proposizioni 4 e 8 del libro I degli Elementi). Dobbiamo aspettare le riforme degli anni '60, con l'inizio di una nuova ricerca didattica, perché il movimento non solo ricompaia, ma assuma un ruolo particolare negli studi sull'apprendimento matematico.

Verso la fine degli anni '50 van Hiele descrive, con la sua teoria dei livelli di pensiero, il modo in cui si articola nell'alunno il percorso che, a partire dalla visualizzazione di figure geometriche, conduce alla loro definizione ed alla deduzione delle loro proprietà (van Hiele 1958; cfr. Cannizzaro & Menghini 2004 e 2006).

Per passare da un livello di pensiero al successivo sono necessarie attività manuali, grafiche; occorre operare sulle figure in modo da riconoscere le possibili modificazioni (Duval 1988). Spiccano i "materiali articolati" che cominciano a nascere proprio negli anni '60³ (cfr. Castelnuovo & Barra, 2000). Scrive Liliana Ragusa, a proposito della realizzazione di una serie di lucidi per lavagna luminosa fatta in collaborazione con Emma Castelnuovo, Ugo Pampallona e Lina Mancini Proia (Ragusa, 2003):

«Era allora di moda la ricerca di mezzi audiovisivi per l'insegnamento, allo scopo di staccarsi dagli schemi tradizionali [...] si sentiva l'esigenza di produrre modelli mobili [...] La sfida fu per noi di realizzare il movimento sulla lavagna luminosa.»

In questo tipo di lavori, così come nell'idea di van Hiele, scopo del movimento è quello di condurre l'alunno a definire, e a dedurre poi

³ Le Macchine Matematiche (Bartolini Bussi e Maschietto, 2005) possono essere considerate antenati più sofisticati dei materiali articolati, anche se non nascono per scopi didattici.

dalla definizione le altre proprietà della figura geometrica considerata. E' il primo passo verso la dimostrazione.

Esperienze e dimostrazioni. Un esempio: la cicloide

Iniziamo con una definizione dinamica della *cicloide*. Quando un cerchio rotola senza strisciare sopra una retta fissa, ogni punto C della circonferenza descrive una linea che si dice cicloide (figura 6).

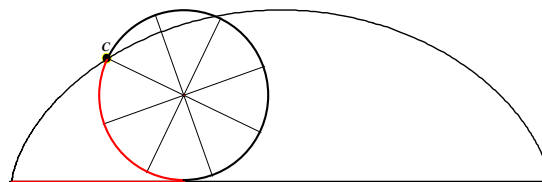


figura 6

Sulla cicloide sono state fatte tante osservazioni, rimaste, per lungo tempo senza approfondimenti.

Ne riportiamo una di Pascal: «La “roulette” [epicicloide o cicloide] è una curva talmente comune, che dopo la retta e la circonferenza essa è quella più frequente; ed è spesso sotto gli occhi di tutti, tanto che c'è da stupirsi che non sia stata studiata dagli antichi, [...] La Roulette, infatti, non è altro che il percorso che fa nell'aria il punto di una ruota, quando essa rotola».

Uno dei primi approfondimenti è dovuto a Galileo Galilei: «Quella linea arcuata sono più di cinquant'anni che mi venne in mente il descriverla, e l'ammirai per una curvità graziosissima per adattarla agli archi di un ponte. Feci sopra di essa, e sopra lo spazio da lei e dalla sua corda compreso, diversi tentativi per dimostrarne qualche passione, e parvemi da principio che tale

*spazio potesse essere triplo del cerchio che la descrive; ma non fu così, benché la differenza non sia molta».*⁴

L'area della regione di piano limitata dalla cicloide, è effettivamente pari a tre volte quella del cerchio che l'ha generata. Ma Galilei, per confermare la sua intuizione, traccia la cicloide su una lamina di rame (o di cartone), ritaglia la superficie che questa individua e fa lo stesso, tre volte, con il cerchio che l'ha generata. Poi chiede conferma dalla bilancia. Accade, per colpa di questa, o della lamina non omogenea, ..., che l'ipotesi giusta non viene corroborata.

Le proprietà della cicloide destano stupore anche fra gli scrittori. Ascoltiamo Melville che cita la cicloide, forse a sproposito, quasi per vantarsi di conoscerne le proprietà:

*«Sollevando il quartiere si scoprono le grandi marmitte, due in tutto, e ciascuna della capacità di parecchie botti. Quando si è dietro a strofinarle [...] il luogo si presta per le profonde meditazioni matematiche. Fu nella marmitta sinistra del Pequod, che per la prima volta mi colpì il fatto notevole che, in geometria tutti i corpi che scivolano giù per il cicloide, ad esempio, la mia steatite [serve per lucidare], da qualunque punto discendano, impiegano sempre lo stesso tempo».*⁵ (H. Melville, *Moby Dick*, cap. 96, traduzione di C. Pavese)

Infine, come ultima citazione, ci sembra simpatico ascoltare Margherita Perier, nipote di Pascal:

«avvenne che egli fosse colto da un terribile mal di denti [...] pensò di applicarsi a qualcosa che potesse farglielo dimenticare.

⁴ Lettera di Galileo a B. Cavalieri del 24 febbraio 1640 (*Opere di G. Galilei*, T. XVIII, 1906, p.153-4). Si può vedere anche Fabbroni, *Vitae Italorum doctrinae excellentium*, T. II (Pisis, 1788), p.12.

⁵ Questa proprietà è la stessa espressa dalla isocronia delle oscillazioni nel pendolo di Huygens (vedi oltre).

Perciò decise di dedicarsi al problema della “roulette già proposto da Mersenne, che nessuno aveva potuto risolvere [...] Vi si dedicò così bene che ne trovò la soluzione e tutte le dimostrazioni. Questa seria applicazione fece allontanare il suo mal di denti e quando ebbe finito di riflettere si sentì guarito dal suo male».

La cicloide è studiata da Bouvelle nel 1501, da Mersenne e Galilei nel 1599, da Roberval, che dimostra l'esattezza dell'intuizione di Galilei nel 1634. Tale proprietà viene confermata da Descartes e Fermat nel 1638.

Torricelli è molto fiero di dare tre dimostrazioni della stessa proprietà nel 1644. Ne fa un'appendice ad un suo lavoro sulla quadratura della parabola, che viene determinata in venti modi differenti, senza integrali⁶! Molti altri matematici, fra cui Wren, Huygens, Wallis, Newton, Jean Bernoulli, Leibniz, Eulero e Lagrange, si sono interessati della cicloide.

Possiamo pensare ad un susseguirsi di osservazioni, ipotesi, deduzioni e dimostrazioni. Vediamone alcune.

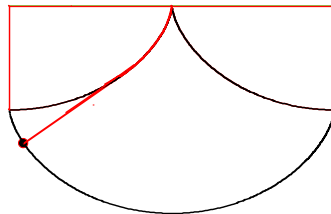


figura 7

Prendendo due mezze cicloidi e un pendolo di lunghezza pari a quattro volte quella del raggio del cerchio che ha generato la

⁶ Peraltro il termine integrale, usato per la prima volta da J. Bernoulli nel 1690, viene accettato poi da Leibniz e da tutti i matematici, successivamente ai lavori di Torricelli.

cicloide, e facendo oscillare il pendolo in modo che la fune si adagi sulle mezze cicloidi (evolvente), si “scopre” che (figura 7):

1) tutte le oscillazioni hanno lo stesso periodo e non soltanto quelle “piccole”, come già osservato da Galilei;

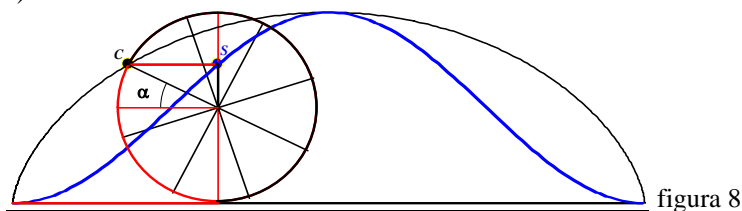
2) il peso del pendolo descrive un arco di cicloide (evolvente) uguale alla due metà considerate.

Se la seconda affermazione è esatta, se ne deduce che la lunghezza di un arco di cicloide è espressa da un numero razionale ed è pari a otto volte quella del raggio del cerchio che l’ha generata.

Huygens (1673) e Newton (1687) dimostrano l’esattezza della proprietà 1) e, poco prima, Wren, l’esattezza della 2).

Torniamo all’area della regione di piano limitata dalla cicloide.

La dimostrazione che presentiamo, già pubblicata in (Barra, 1975), è stata giudicata da molti, fra cui Hans Freudenthal, più facile delle tante dimostrazioni precedenti cui si è fatto cenno. Adesso c’è un’evoluzione, perché con l’uso di un software di geometria dinamica la dimostrazione assume un carattere del tutto nuovo, in cui l’osservazione ha un ruolo fondamentale. E’ una dimostrazione senza parole, che si avvale del colore e del movimento (figura 8 e 9).



Deve essere guardata, meditando a lungo, mentre il cerchio rotola avanti e indietro.

Il diagramma al computer permette di osservare dinamicamente il cerchio che rotola, il punto C che traccia una cicloide e il punto S

che traccia per definizione una senoide, perché è la proiezione di un punto, che si muove su una circonferenza, su un suo diametro⁷. Per l'area delimitata dalla cicloide interessa la curva che, nella figura che segue, è chiamata "il monte" ($y = r + r \sin\alpha$). L'area del monte è banalmente uguale a $2\pi r^2$, perché è quella del rettangolo di dimensioni r e πr , e quindi è pari a due volte quella del cerchio considerato.

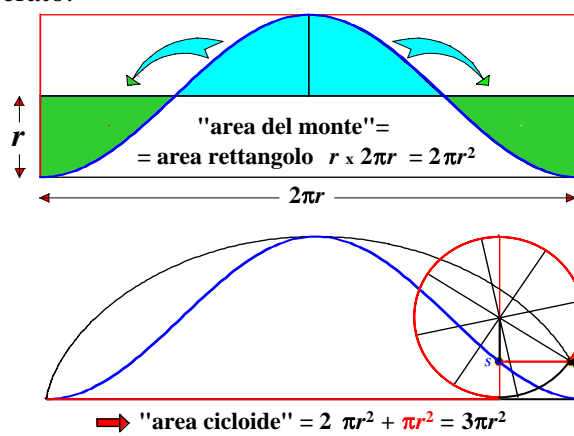


figura 9

Poiché, infine, mentre il cerchio rotola, il segmento CS , alzandosi ed abbassandosi, descrive contemporaneamente sia la superficie del cerchio, sia quella compresa fra la cicloide e la senoide, "si vede" che le due superfici hanno la stessa area⁸. Si può concludere che l'area della superficie delimitata dalla cicloide è pari a quella

⁷ In verità, per il successivo calcolo dell'area, non ha interesse conoscere che si tratta di una senoide. Serve soltanto sapere che si tratta di una curva che ha un andamento simmetrico, ed è ovvio che sia simmetrico, rispetto al centro, l'andamento della proiezione su un diametro di un punto che si muove su una circonferenza.

⁸ A rigore, è necessario il Principio di Cavalieri (nel piano), ma la situazione è chiara e intuitiva anche per chi non conosce tale principio, perché si tratta unicamente dello stesso segmento CS , che è presente sia nel cerchio sia nello spazio compreso fra "il monte" e la cicloide.

del monte più quella del cerchio; è dunque tre volte l'area del cerchio considerato.

«Disegnare, seguire dei profili, riempire delle superfici, individuare dei volumi, vuol dire prima di tutto guardare, vuol dire forse saper osservare, vuol dire forse saper scoprire...»

A questo punto può darsi che sopravvenga il fenomeno inventivo. Si inventa e persino si crea; tutto l'essere è trascinato dall'azione; questa azione è il punto essenziale. Gli altri sono rimasti indifferenti; voi avete visto» (le Corbusier).

Dimostrazioni dinamiche senza parole e proprietà nascoste.

Come visto nelle prime sezioni di questo lavoro, in molti ragionamenti c'è una parte non esplicitata; con l'uso di programmi di geometria dinamica la parte "non detta" diventa sempre più grande. Prendiamo in esame alcuni esempi di dimostrazioni senza parole in cui si fa uso di diagrammi dinamici per discutere i pro e i contro dell'uso di programmi di geometria dinamica bidimensionale in questo campo.

Primo esempio: *il trapezio si toglie il cappello*

Diamo una dimostrazione sul calcolo dell'area di un trapezio sfruttando le capacità dinamiche di Cabri. Consideriamo il trapezio $ABCD$.

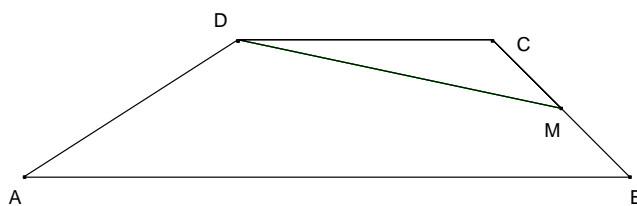


figura 10

Consideriamo poi il punto medio M del segmento BC e ruotiamo il triangolo MCD intorno ad M fino a far coincidere il lato MC con MB . Otteniamo un triangolo che ha ovviamente area uguale all'area del trapezio iniziale. Da ciò si deduce che l'area del trapezio è uguale alla somma delle sue basi per l'altezza diviso 2.

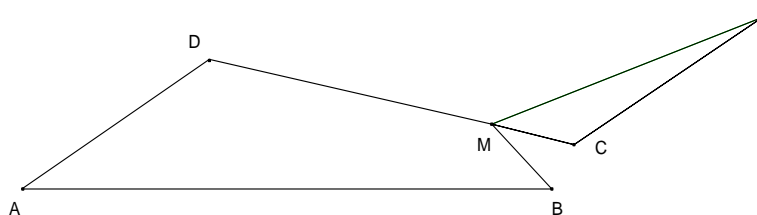


figura 11

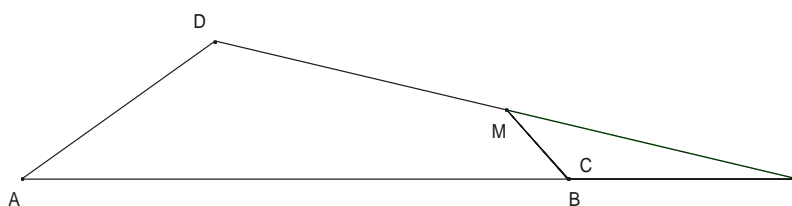


figura 12

Abbiamo tratto questo esempio da Chelo, 2005. In questo libro sono presentate 20 schede operative da usare in laboratorio informatico con Cabri con studenti della scuola secondaria di primo grado (scuola media). La scheda 15 è intitolata appunto “trapezio che si toglie il cappello”.

Secondo esempio: *il monte si toglie due cappelli*.

L'esempio visto nella figura 9 (area del "monte") può essere risolto anche in modo analogo all'esempio precedente. In questo caso abbiamo bisogno di far ruotare due cappelli.

Quarto esempio: *il tappeto* di Dubnov

Consideriamo un quadrato di lato uguale a 21 unità e suddividiamolo come nella figura 13.

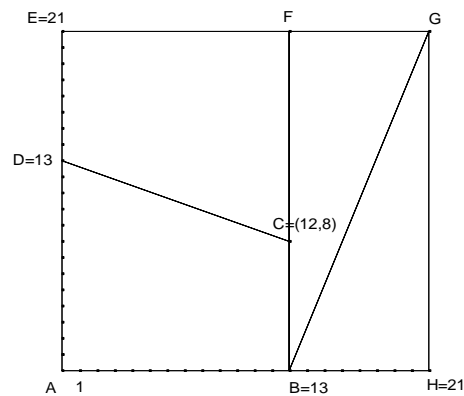


figura 13

Con Cabri muoviamo i vari poligoni che compongono il quadrato. Ruotando il triangolo BHG intorno a H di 90° in senso orario e trasladolo quindi del vettore HB , otteniamo il triangolo CBG' (figura 14).

Traslando il quadrilatero $CDEF$ del vettore CG' , otteniamo il quadrilatero $E'HG'$. Ruotando il triangolo FGB intorno ad F di 90° in senso orario e trasladolo del vettore FE' , otteniamo il triangolo $E'DG''$. Abbiamo in definitiva ottenuto il rettangolo $ADF'G'$.

Abbiamo tratto spunto per questo esempio da Dubnov, 1961, libro purtroppo fuori commercio da tempo. Il libro si intitola *Errori nelle dimostrazioni di geometria*. In effetti di errore si tratta. Il quadrato ha area uguale a $21 \times 21 = 441$ mentre il rettangolo ha area uguale a $34 \times 13 = 442$.

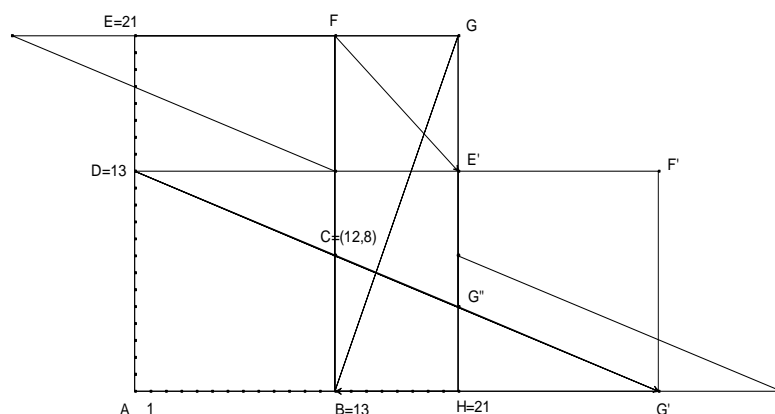


figura 14

Riguardiamo i nostri esempi. Sono tutti esempi di dimostrazioni dinamiche senza parole. In ognuno di essi si sono sottoposte figure piane a isometrie. L'uso di Cabri rende evidenti le isometrie.

Prendiamo in esame il *trapezio che si toglie il cappello*. C'è da dimostrare qualcosa. Si deve infatti dimostrare che nella figura 13 abbiamo effettivamente un triangolo. Si deve cioè dimostrare che i punti A, B, C e i punti D, M, C sono allineati. Non è difficile, ma va dimostrato.

Anche nel caso del *monte che si toglie due cappelli* c'è qualcosa da dimostrare. Dobbiamo dimostrare che i due cappelli, una volta ruotati, vanno nella giusta posizione. Questa dimostrazione non è difficile nell'ambito della trigonometria elementare con le usuali proprietà dei seni.

Nel caso del *tappeto* di Dubnov dobbiamo capire dove sta l'errore nella nostra "dimostrazione".

Cabri ci può venire in aiuto se abbiamo avuto l'accortezza di costruire il diagramma iniziale a partire da due soli punti base: il

punto A, vertice in basso a destra del quadrato e il punto ad esso vicino che abbiamo indicato con 1, che giace sul lato orizzontale in basso del quadrato (figure 13 e 14)

Se infatti allontaniamo da A il punto 1 osserviamo che nel rettangolo si forma un buco, la cui area è proprio uguale alla differenza tra l'area del quadrato e l'area del rettangolo.

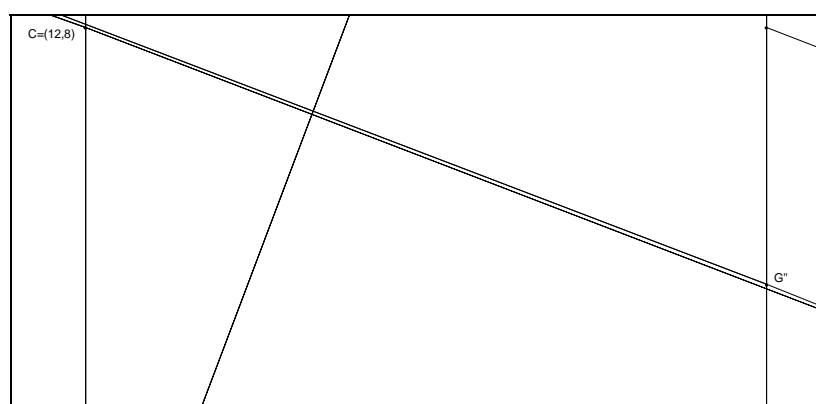


figura 15

In altre parole i punti D , C , G'' e G' non sono affatto allineati. Ci si può rendere conto di ciò per via analitica osservando che le loro coordinate sono $D=(0; 13)$, $C=(12; 8)$, $G''=(5; 13)$ e $G'=(34; 0)$.

Per ragioni tipografiche, nelle tre figure precedenti non abbiamo colorato con colori differenti le varie porzioni di piano delimitate dai triangoli o quadrilateri che compongono il tappeto di Dubnov. Se l'avessimo fatto, il "buco" nel tappeto rettangolare sarebbe più visibile perché apparirebbe bianco.

Esempi di questo genere si trovano su molti testi. Sono tutti legati ai numeri di Fibonacci. F_n e al fatto che, per ogni n , tre numeri di Fibonacci consecutivi sono legati dall'identità

$$F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$$

I numeri relativi al caso esaminato sono 13, 21, 34. Di solito vengono usati i numeri 5, 8, 13. Si veda per esempio Wells, 1986. Il disegno è più facile ma l'inganno è meno nascosto. Più alti sono i numeri di Fibonacci e più nascosto è l'inganno. Con Cabri si riesce a costruire senza troppa difficoltà diagrammi con numeri grandi. Ma anche con Cabri l'inganno nascosto dai numeri 21, 34, 55 non sarebbe stato apprezzabile.

Questi quattro esempi mostrano quanto vadano prese con cura le "dimostrazioni" in cui si fa un uso di diagrammi, siano essi fissi o dinamici.

In questi ultimi anni, proprio per l'avvento dei programmi di geometria dinamica, vi è stata una proliferazione di dimostrazioni in cui si fa un gran uso dei diagrammi. In alcuni casi però si è dato particolare risalto agli aspetti più coreografici e si sono lasciati in ombra gli aspetti matematici.

Un docente esperto non ha nessuna difficoltà a distinguere le dimostrazioni "giuste" da quelle "sbagliate". Ma uno studente che è appena uscito dalla scuola secondaria di primo grado?

In quest'ultima la geometria viene insegnata solo a livello intuitivo e quindi, giustamente vista l'età degli allievi, non vengono svolte dimostrazioni. Ne segue che lo studente non è di solito in grado di saper distinguere tra dimostrazioni giuste e sbagliate.

All'inizio della scuola secondaria di secondo grado il docente deve essere quindi molto accorto nell'uso dei diagrammi. Per ogni diagramma, egli deve mettere in evidenza quali sono le proprietà che vanno dimostrate. In alcuni casi le dimostrazioni saranno molto semplici, in altre saranno svolte dal docente, in altre ancora il docente si limiterà a dire che la dimostrazione esiste ma è troppo complicata o lunga per mostrarla agli studenti. Ripetiamo che è

essenziale però enunciare con chiarezza le proprietà che devono essere dimostrate.

Pensiamo che sia in ogni caso utile mostrare qualche esempio di dimostrazione sbagliata, come il nostro quarto esempio, proprio per far capire agli studenti che il mettere in luce ogni volta le proprietà che vanno dimostrate non è una pignoleria del docente.

Da questo punto di vista un buon uso di Cabri, come nel caso del tappeto di Dubnov, può essere utile per far capire gli errori insiti nelle dimostrazioni sbagliate.

Il docente deve poi analizzare con molta cura quale possano essere i pro e i contro dell'uso di diagrammi dinamici.

Esaminiamo ancora una volta i nostri quattro esempi da questo punto di vista.

Analizziamo il trapezio che si toglie il cappello.

In questo caso si usano le capacità dinamiche di Cabri in due modi completamente differenti uno dall'altro.

Disegnando in modo opportuno con Cabri i quattro vertici del trapezio si può fare in modo che essi si possano trascinare in modo tale che essi determinino sempre un trapezio.

Ciò rende evidente che la costruzione è valida per ogni trapezio.

Si usa poi la dinamicità di Cabri per togliere il cappello. Non c'è dubbio che la rotazione del cappello faccia capire agli studenti che il cappello iniziale e quello finale sono uguali. Ma in tal caso va dimostrato che la figura finale è effettivamente un triangolo. Di solito in casi analoghi a questo gli studenti non si rendono conto che ciò va dimostrato. Vedremo tra poco alcuni esempi di ciò.

Osserviamo poi che la dimostrazione di questa proprietà è più complicata della dimostrazione che si sarebbe fatta senza usare la rotazione del "cappello" (si consideri il punto medio M di BC , si consideri l'intersezione delle semirette AB e DM , ecc. ecc.).

La costruzione con Cabri del cappello che si muove offre però il vantaggio di chiedersi come ottenere ciò con Cabri. Questo è un problema molto interessante al quale gli studenti si appassionano. Ma non è così facile trovare la soluzione. C'è il rischio che il docente, o il libro, dia semplicemente l'algoritmo senza dare altre spiegazioni. In tal caso sarebbe completamente vanificato il vantaggio dell'uso di Cabri.

Nell'esempio dei due cappelli del monte si potrebbe usare Cabri per mostrare il movimento dei due cappelli così come si è fatto nell'esempio precedente. Ma ciò non aiuta la comprensione. Possiamo però usare Cabri per suggerire la dimostrazione che i cappelli vanno a finire nel posto giusto. Si può infatti disegnare sia un punto S mobile sulla sinusoide che il suo simmetrico S' (simmetria centrale) e, se si vuole essere ancora più espliciti, le opportune proiezioni di S e S' .

Per quel che riguarda il tappeto di Dubnov abbiamo già detto che Cabri può essere utile sia per disegnare velocemente il tappeto e la sua decomposizione, sia per evidenziare l'inganno.

Non è invece utile per evidenziare quali siano le isometrie che ci permettono di modificare il quadrato nel rettangolo: queste sono già evidenti dalle decomposizioni del quadrato e del rettangolo.

Un discorso a parte merita il fatto che la costruzione dei vertici del quadrato iniziale e di tutti i punti interessati alla sua decomposizione a partire da due soli punti base non è affatto semplice.

Si potrebbe obiettare che ciò rende l'uso di Cabri troppo faticoso e quindi non utile. Pensiamo invece che proprio questa difficoltà renda l'uso di Cabri molto interessante. Infatti, l'uso didattico di Cabri porta a riconoscere ed esplicitare con chiarezza i vari passi di una costruzione geometrica. In questo senso, si trova un

significativo parallelo fra costruzione e dimostrazione: in quest'ottica una macro, composizione di passi elementari che si usa nel seguito, può essere assimilata ad un lemma o a un teorema. Per un'analisi delle costruzioni elementari, nel contesto dei gruppi di trasformazioni, si veda (Bernardi, 2003). Più in generale sul ruolo del disegno e dei diagrammi dinamici nell'insegnamento della geometria si veda (Mariotti, 2005).

Abbiamo visto come Cabri possa aiutare più o meno nella comprensione di una dimostrazione.

Vi sono poi casi in cui un buon uso di Cabri permette di rendere comprensibili proprietà che, senza il suo uso, sarebbero state comprensibili solo a menti, ed occhi, molto esperti. Pensiamo alla dimostrazione dell'area limitata dalla cicloide illustrata dal diagramma dinamico della figura 9.

Vi sono però casi in cui Cabri in qualche modo “nasconde” alcune proprietà.

In Accascina *et alii*, 2004 si è osservato che la maggior parte degli studenti del biennio di scuola secondaria di secondo grado ai quali era stato chiesto di costruire con Cabri gli assi dei cateti di un triangolo rettangolo hanno descritto varie proprietà fuorché quella più importante: gli assi si intersecano sulla ipotenusa.

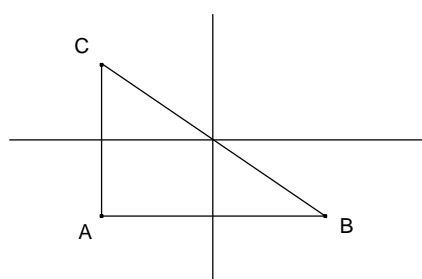


figura 16

In Accascina, Margiotta, Rogora, 2005 si è mostrato che anche studenti molto più esperti, come gli specializzandi SSIS, quasi tutti laureati in matematica, hanno problemi dello stesso tipo. Ad essi è stato chiesto costruire la seguente figura e di descriverne le proprietà.

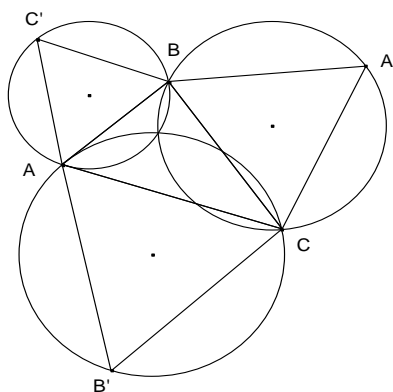


figura 17

Si tratta di costruire i triangoli equilateri esterni ad un triangolo assegnato, le circonferenze ad essi circoscritte e i loro centri.

Questo esperimento è stato ripetuto per vari anni. Ogni volta gli specializzandi, pur non conoscendo in precedenza il teorema di Napoleone, lo hanno congetturato osservando che i centri delle tre circonferenze individuano un triangolo equilatero. Però, ogni volta, meno della metà ha osservato che le tre circonferenze circoscritte si intersecano in un punto.

Esemplificativo a questo proposito il commento scritto da una specializzanda:

«Partendo dalla famosa frase “La geometria è l’arte di ragionare su una figura mal fatta”, io continuerei dicendo che Cabri mi ha dato la possibilità di non ragionare su un disegno ben fatto. Perché dico questo? Mi rendo conto che la frase è forte ma questo

è proprio quel che mi è accaduto oggi in laboratorio. Guardando alle circonferenze di Fermat, a malapena ho capito che il triangolo con i centri di queste circonferenze è equilatero e non sono stata in grado di vedere nient'altro. Ma con una brutta figura forse non avrei visto neanche questo.»

Ci sembra che la specializzanda abbia centrato i punti essenziali sull'uso di Cabri. La facilità della costruzione di diagrammi, la loro precisione e la loro dinamicità da una parte fanno vedere proprietà altrimenti non osservabili, dall'altra ne nascondono in qualche modo altre.

Il compito del docente è proprio quello di esporre gli studenti a vari esempi di diagrammi, analoghi a quelli mostrati, inducendoli a non dare niente per scontato. In tal modo gli studenti saranno in grado di distinguere tra proprietà giuste e proprietà sbagliate, tra dimostrazioni giuste e dimostrazioni che tali non sono perché si è ommesso di dimostrare esplicitamente alcune proprietà che dal diagramma appaiono evidenti.

Bibliografia

- Accascina G., Batini M., Del Vecchio F., Margiotta G., Pietropoli E., Valenti D.: 2004. Problem posing e problem solving con Cabri, Progetto Alice, 14, 217-242
- Accascina G., Margiotta G, Rogora E.: 2005. Making Bad Conjectures And Incomplete Proofs With Good Drawings Within A Dynamic Geometry Environment, Proc. of the 7th International Conference on Technology in Mathematics Teaching, Vol. 1, University of Bristol, 61-68
- Accascina G., Rogora E.: in corso di pubblicazione. Using Cabri 3D Diagrams For Teaching Geometry, International Journal for Technology in Mathematics Education
- Bainville E.: 2004. Alcune costruzioni con Cabri 3D, in Percorsi di geometria dinamica, Cabriworld, Roma, 199-208

- Barra M.: 1975. The cycloid - A didactic Experience - A new proof, *Educational Studies in Mathematics*, 6, 93-98.
- Barra M.: 2004. La regina della matematica: la Cicloide. Tre nuove dimostrazioni “senza parole” che la riguardano, “difficili” da capire senza Cabri. Baricentro della Cicloide. Come possono nascere le idee con Cabri, *Progetto Alice*, N. 14, 5, 331 - 344.
- Barra M.: 2004. Aspetti tecnici connessi con la visualizzazione di argomenti matematici, *Cabriworld*, Roma, 177-186
- Bartolini Bussi Maria G., Maschietto Michela: 2005. *Macchine matematiche. Dalla storia alla scuola. Convergenze*, Springer Verlag
- Bernardi C.: 1998. How formal should a proof be in teaching mathematics?, in *La Logique dans l'Enseignement des Mathématiques*, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, suppl. vol. 5, n. 5, 7-18
- Bernardi C.: 2003. Un approccio teorico ai software geometrici: gruppi di trasformazioni e operazioni geometriche elementari, in *Atti del Convegno Nazionale "Apprendere la matematica con le tecnologie"* (Gela), Ghisetti e Corvi Editori, 50-55
- Bernardi C., Menghini M.: 2003. Mettiamo ordine fra le geometrie: il programma di Erlangen e altri approcci, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, vol. 26 A-B, n. 3, 271-292
- Cannizzaro, L., & Menghini, M.: 2004. *Geometric Figures from Middle to Secondary School: Mediating Theory and Practice*. *Proceedings of CERME 3 (2003)*, TG11, CD, Pisa: Ed. Plus.
- Cannizzaro L. & Menghini M.: 2006. Il pensiero geometrico dalla conoscenza percettiva alla conoscenza razionale: concezioni di insegnanti immersi in situazioni diverse; in via di pubblicazione su *l'Insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*.
- Castelnuovo, E., & Barra, M.: 2000 (1976). *Matematica nella realtà*, Torino: Boringhieri.
- Catastini L., Ghione F.: 2004. Le trasformazioni di Piero della Francesca con Cabri Géomètre: la rappresentazione della profondità, *Cabriworld*, Roma, 165-176

- Chelo C.: 2005. Cabri. La geometria che si muove, Petrini, Torino.
- Clairaut A.: 1741. *Eléments de géométrie*, Lambert & Durand, Paris
- Dubnov, Ya. S.: 1963. *Mistakes in Geometric Proofs*, D.C. Heath and Company, Boston (ed.orig. in russo) (trad. it. *Errori nelle dimostrazioni di geometria*, Progresso Tecnico Editoriale, Milano, 1965)
- Duval R.: 1988. Approche cognitive des problemes de geometrie en terms de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, 57-74: Basic Books.
- Laborde C.: 2003. in “One Hundred Years Of L'enseignement Mathematique: Moments Of Mathematics Education In The Twentieth Century”, Proceedings of the EM-ICMI Symposium (Geneva, 20-22 October 2000), Edited by D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B.R. Hodgson, G. Schubring; *L'Enseignement Mathématique*, Monograph no. 39, 2003, 133 – 154.
- Legendre A.M.: 1784. *Eléments de géométrie*, 45^a ed. «avec additions et modifications par M.A.Blanchet»,1935, Librairie de Paris, Paris.
- Miyazaki M.: 2000. Levels of proof in lower secondary school mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 41, 47-68
- Mariotti A.M.: 2005. *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*, Il Battente, Pitagora, Bologna.
- Nelsen R.B.: 1993. *Proofs without words: exercises in visual thinking* Mathematical Association of America, Washington;
- Nelsen R.B.: 2000. *Proofs without words II: more exercises in visual thinking*, Mathematical Association of America, Washington
- Pellegrino C., Tomasi L.: 2004. Rivisitazioni geometriche. La prospettiva senza “veli”, ovvero Cabri, Monge e la prospettiva, *Cabriworld*, Roma, 155-164
- Prodi G.: 1984. *Storiella estiva, con morale*, Archimede, vol. **XXXVI**, 168-169
- Pucci C.: 1984. *Abbasso o viva Euclide?*, Archimede, vol. **XXXVI**, 170-173
- Ragusa L.: 2003. Come eravamo, in M. Menghini, M. R. Trabalza (a cura di), *Geometrie in cielo e in terra, in ricordo di L. Mancini Proia*, Ed. Arquata, Foligno.
- Tomasi L.: 2004. *Geometria dello spazio, da Cabri II a Cabri 3d: rappresentazione e visualizzazione dinamica*, *Cabriworld*, Roma, 187-198

van Hiele, P. M., & van Hiele-Geldof, D.: 1958. A method of initiation into geometry at secondary schools. In H. Freudenthal (ed.) Report on methods of initiation into geometry, Groningen: J. B. Wolters, 67-80.

Wells D.: 1986. The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers, Penguin, London (trad. it. Numeri memorabili, Zanichelli, Bologna, 1991)