

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE



FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Geometria euclidea dello spazio: nozioni di base e percorsi didattici.

Relatore
prof. Giuseppe Accascina

Candidato
Luca Piselli

ANNO ACCADEMICO 2005-2006

INTRODUZIONE

La geometria euclidea tridimensionale (che per brevità chiameremo anche semplicemente *geometria 3D*) riveste nelle scuole di qualsiasi livello (dalle elementari all'università) un ruolo men che secondario.

Parlando di geometria 3D non si intendono solamente le formule riguardanti per esempio superfici e volumi dei solidi più noti, ma l'analisi delle proprietà di base di rette e piani nello spazio con le relative definizioni quali, per esempio, il parallelismo e la perpendicolarità tra due rette, tra una retta ed un piano e tra due piani. Senza una buona conoscenza delle nozioni di base si rende più complessa non solo la comprensione ma anche la visualizzazione dei solidi. Spesso i ragazzi, se non dotati di intuito o di naturale predisposizione, faticano non poco a tracciare l'altezza di una piramide o anche a disegnare un semplice cubo.

Anche al termine dei corsi universitari, la conoscenza della geometria 3D, continua ad essere scarsa e lacunosa. Ne sono una prova le risposte rilasciate dagli studenti (laureandi o in fase di specializzazione) del corso di *MC3 - Matematiche complementari 3* dell'università Roma3 svolto nell'A.A. 2005-2006 e dagli studenti (specializzandi) iscritti a due corsi svolti nell'ambito dell'indirizzo fisico-matematico della Scuola di Specializzazione all'Insegnamento Secondario del Lazio negli A.A. 2004-2005 e 2005-2006.

Analizzando le risposte degli studenti si può approssimativamente tracciare il profilo di uno studente che consegua o abbia già ottenuto una laurea in ambito matematico-fisico.

L'analisi di questi corsi mostra che la maggior parte degli studenti non è stata, per esempio, in grado di dare una definizione di perpendicolarità di due piani e ha commesso vari e gravi errori nella descrizione delle relative proprietà. E' poi importante osservare che gli stessi studenti, ai quali era poi stata data dai docenti una definizione di perpendicolarità tra piani, sono successivamente ricaduti negli stessi errori fatti in precedenza.

Ciò mostra quanto il dare solamente le definizioni e il mostrare alcuni teoremi con le relative dimostrazioni possa non essere sempre efficace dal punto di vista didattico.

Agli studenti dei corsi descritti sopra è stata poi proposta un'attività di problem solving centrata sul problema delle intersezioni piane di un cubo. In questa attività gli studenti potevano usare modelli reali di cubo, alcuni dei quali trasparenti, e modelli virtuali creati con il software di geometria dinamica tridimensionale Cabri3D.

L'analisi dei comportamenti degli studenti mostra quanto il primo problema che si incontra nella comprensione della geometria 3D sia quello della visualizzazione. In particolare vi è il grosso problema della rappresentazione dello spazio su un piano, sia esso la lavagna o lo schermo di un computer.

D'altro canto anche l'uso dei modelli reali ha le sue controindicazioni. Non è, per esempio, assolutamente agevole, dato un modello reale di cubo, esaminare effettivamente le sue possibili intersezioni con un piano.

E' quindi necessario un accorto uso sia dei modelli reali che dei modelli virtuali.

Per tutte queste ragioni è nata l'esigenza di creare dei percorsi didattici che consentano ad ogni studente di imparare la geometria 3D attivamente approdando alle definizioni e alle proprietà della geometria euclidea dello spazio con le proprie forze e magari anche stimolando la sua curiosità.

Ho creato due percorsi centrati sul problema della perpendicolarità tra piani.

Per mezzo del primo percorso lo studente è portato gradualmente dall'idea intuitiva di perpendicolarità tra due piani, a due differenti definizioni e a dimostrarne l'equivalenza.

Per mezzo del secondo percorso lo studente studia le possibili intersezioni tra un diedro e un piano. In particolare viene analizzato il problema della determinazione di quei piani che intersecano un diedro in angoli retti.

Dato che la lavagna, o un foglio di carta, può essere un difficile veicolo di informazioni, ho cercato di rapire l'attenzione e stimolare la visualizzazione mentale dello studente mediante l'utilizzo di modelli reali 3D e di modelli virtuali, sfruttando i vantaggi che offre ognuno di essi.

Questo è un esempio di apprendimento attivo della geometria tridimensionale. Gli studenti vengono avvicinati alla materia agendo sulla loro curiosità.

In questo modo gli studenti imparano a visualizzare gli oggetti solidi nello spazio e a visualizzare mentalmente configurazioni della geometria tridimensionale.

Capitolo 1

Profilo del laureato medio

1.1 Esperienze: i corsi MC3 e SSIS

Descrivo le esperienze avute in alcuni corsi dedicati alla geometria dello spazio frequentati da laureandi e laureati in materie scientifiche.

Nell'A.A. 2004-2005 e 2005-2006 il Prof. Rogora, in collaborazione con il Prof. Accascina, ha svolto due corsi nell'ambito della Laurea Specialistica all'Insegnamento Secondario (SSIS) del Lazio, indirizzo fisico - matematico - informatico. I corsi avevano la durata di 16 ore accademiche. Erano frequentati dagli specializzandi del secondo anno. Essi avevano già ottenuto una laurea quadriennale, per la maggior parte in matematica, ed erano in procinto di ottenere l'abilitazione all'insegnamento della matematica nelle scuole secondarie superiori. Alcuni di loro avevano già svolto alcune ore di supplenza. I due corsi erano dedicati alla geometria dello spazio e analizzavano in particolar modo l'uso del software di geometria dinamica Cabri 3D nell'insegnamento - apprendimento della geometria 3D.

Nell'A.A. 2005-2006 il Prof. Accascina ha svolto presso l'Università di Roma 3 il corso di Matematiche complementari 3 (MC3), frequentato per la maggior parte da studenti iscritti alla laurea specialistica e da alcuni da studenti che dovevano ancora conseguire la laurea triennale, tra i quali io stesso.

Il corso aveva la durata di 50 ore accademiche. Era dedicato all'analisi dell'uso di software didattico nell'insegnamento della matematica nelle Scuole Secondarie Superiori. Il corso era suddiviso in tre parti.

Nella prima parte è stato analizzato l'uso di software di calcolo simbolico. E' stato usato Derive. Nella seconda parte è stato analizzato l'uso di software di geometria dinamica bidimensionale (Cabri Plus). Nella terza parte è stato analizzato l'uso di software di geometria dinamica tridimensionale. E' stato usato l'unico software di questo tipo attualmente esistente: Cabri 3D.

Questa terza parte è stata sostanzialmente analoga ai due corsi svolti dal Prof. Rogora descritti sopra.

Descrivo alcuni punti salienti del comportamento degli studenti in questi tre corsi basandomi sull'articolo [Accascina, Rogora, 2006] (in cui sono analizzati alcuni aspetti del corso del Prof. Rogora alla SSIS dell' A.A. 2004-05), sulla tesi di Laurea [Miele, 2006] (in cui vengono analizzati alcuni aspetti di tutti e tre i corsi

in questione) e su documenti contenenti le risposte degli studenti del corso MC3 che mi sono stati forniti dal Prof. Accascina.

I corsi si sono svolti in un laboratorio informatico. Ogni studente aveva a disposizione un computer.

Agli studenti è stato chiesto di inviare al docente, dopo ogni lezione, una mail contenente una breve descrizione degli argomenti trattati a lezione che, a giudizio dello studente, erano cruciali. In alcuni casi, oltre a ciò, è stato anche chiesto agli studenti di rispondere ad alcune domande specifiche.

Durante la prima lezione dei corsi (nel caso del corso MC3, durante la prima lezione riguardante la geometria dello spazio) è stato chiesto agli studenti di rispondere al seguente questionario.

QUESTIONARIO

Durante la lezione abbiamo analizzato la relazione di parallelismo nello spazio tra rette, tra piani e tra una retta e un piano.

Vogliamo ora analizzare la relazione di perpendicolarità (o ortogonalità).

Rispondi alle seguenti domande.

D1

- a) Disegna due rette perpendicolari (o ortogonali) nello spazio.*
- b) Assumendo le nozioni di parallelismo e perpendicolarità nel piano, dai la definizione di perpendicolarità (o ortogonalità) tra due rette nello spazio, aiutandoti eventualmente con ulteriori disegni.*
- c) Elenca qualche proprietà della relazione di perpendicolarità (o ortogonalità) tra rette, aiutandoti eventualmente con ulteriori disegni.*

D2

- a) Disegna un piano e una retta dello spazio che siano perpendicolari (o ortogonali).*
- b) Assumendo le definizioni di parallelismo e perpendicolarità nel piano, dai la definizione di perpendicolarità (o ortogonalità) tra retta e piano nello spazio, aiutandoti eventualmente con ulteriori disegni.*
- c) Elenca qualche proprietà della relazione di perpendicolarità (o ortogonalità) tra retta e piano, aiutandoti eventualmente con ulteriori disegni.*

D3

- a) Disegna due piani dello spazio che siano perpendicolari (o ortogonali).*
- b) Assumendo le definizioni di parallelismo e perpendicolarità nel piano, dai la definizione di perpendicolarità (o ortogonalità) tra piani dello spazio, aiutandoti eventualmente con ulteriori disegni.*
- c) Elenca qualche proprietà della relazione di perpendicolarità (o ortogonalità) tra piani dello spazio, aiutandoti eventualmente con ulteriori disegni.*

Le risposte date dagli studenti nei tre corsi sono state analoghe. La maggior parte di loro è stata in grado di dare definizioni essenzialmente corrette nel caso della perpendicolarità tra rette e tra una retta e un piano. Invece quasi nessuno studente è stato in grado di dare una definizione accettabile di perpendicolarità tra

piani.

Alla fine della lezione è stato distribuito agli studenti il seguente questionario.

QUESTIONARIO

Oggi a lezione ti è stato chiesto di rispondere ad alcune domande. Vuoi aggiungere, commentare o rettificare qualcosa rispetto alle risposte che hai dato? Ripensa alle domande dopo la lezione. Inserisci le risposte a questo questionario alla fine dell'usuale commento della lezione che spedisce prima della prossima lezione.

La maggior parte degli studenti non è stata in grado di correggere i propri errori.

E' da notare che una buona parte degli studenti era convinta che l'angolo formato da due rette appartenenti a piani perpendicolari sia sempre di 90° .

Il questionario continuava:

Rispondi anche alle seguenti domande.

Q1. *Hai affrontato lo studio della geometria dello spazio nelle scuole elementari; quali argomenti? Nelle scuole medie; quali argomenti? Nelle scuole superiori; quali argomenti? Nei corsi universitari? Quali argomenti?*

Q2. *Hai studiato per conto tuo alcuni argomenti di geometria dello spazio? Quali? Quando? Perché? Come?*

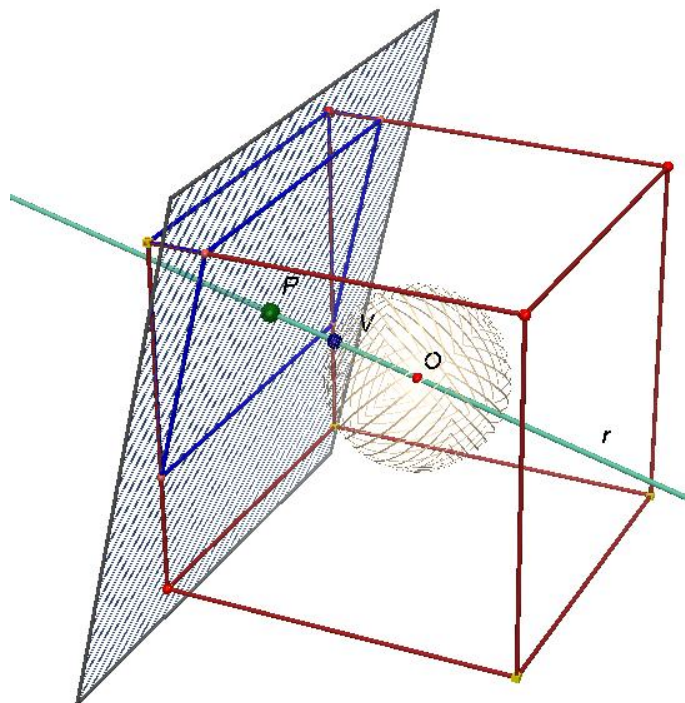
Q3. *Nei corsi universitari quali conoscenze della geometria dello spazio sono state date per scontate?*

Quasi tutti gli studenti hanno risposto che le loro conoscenze di geometria 3D erano limitate alle formule per il calcolo di volumi e superfici dei solidi più comuni. Quasi tutti avevano scarsi ricordi dei loro studi alle scuole elementari. Dichiaravano di aver studiato la geometria 3D nelle scuole medie, acquisendo i pochi concetti sopra menzionati riguardanti i solidi, e di non averla studiata nelle scuole secondarie superiori. Quasi tutti hanno dichiarato che nei corsi universitari non hanno studiato la geometria 3D in maniera organica.

Nella lezione successiva è stata data dal docente la seguente definizione:
due piani che si intersecano in una retta r si dicono perpendicolari se le rette di intersezione dei due piani con un piano perpendicolare alla retta r sono tra loro perpendicolari.

Si è poi passati a studiare le intersezioni di un piano con un cubo. Agli studenti sono state presentate delle schede contenenti domande su questo argomento. Il docente ha portato in laboratorio degli oggetti di forma cubica, alcuni dei quali trasparenti, che ogni studente ha potuto osservare e ruotare direttamente tra le proprie dita immaginando che le sue mani fossero dei piani secanti. Gli studenti avevano anche a disposizione un modello virtuale di un cubo intersecato da un piano preparato in precedenza dal docente utilizzando Cabri3D.

Mostro il funzionamento di Cabri3D per mezzo del modello virtuale usato a lezione.



La precedente figura è stata creata con Cabri3D. In esso è rappresentato un cubo e una sfera interna ad esso avente il centro O nel centro del cubo. E' poi disegnato un punto V appartenente alla sfera. Sulla retta r passante per O e V è disegnato un punto P . E' infine disegnato il piano passante per P perpendicolare alla retta OV . Chiaramente al variare dei punti V e P si ottengono tutti i piani dello spazio. Cabri 3D permette di afferrare con il mouse uno dei due punti e, muovendo il mouse, di trascinarlo. Se si afferra il punto P e si muove il mouse, il punto P si muove sulla retta r e, contemporaneamente il piano si sposta di conseguenza descrivendo un fascio di piani paralleli. Afferrando invece il punto V e trascinandolo, il punto V si muove sulla sfera e il piano si muove di conseguenza mantenendo le proprietà che hanno permesso la sua costruzione. Continua cioè ad essere perpendicolare alla retta r e continua a passare per il punto P della retta r .

Cabri 3D permette anche, sempre muovendo il mouse, di cambiare con continuità il punto di vista e quindi di esaminare con cura le varie configurazioni geometriche che si sono costruite.

Le schede sottoposte agli studenti proponevano domande di difficoltà crescente.

Nelle prime schede si è chiesto di determinare quali tipi di poligoni si possono ottenere intersecando un cubo con un piano.

La maggior parte degli studenti ha usato il modello virtuale. Non ha avuto difficoltà a vedere, e poi a dimostrare con degli esempi, che si possono ottenere poligoni con un numero di lati minore o uguale a 6.

Una delle domande cruciali è stata la seguente:

SCHEDA 16 Sezioni di un cubo con un piano. Decima parte.

Avete visto che sezionando un cubo con un piano si possono ottenere dei rettangoli.

Domande:

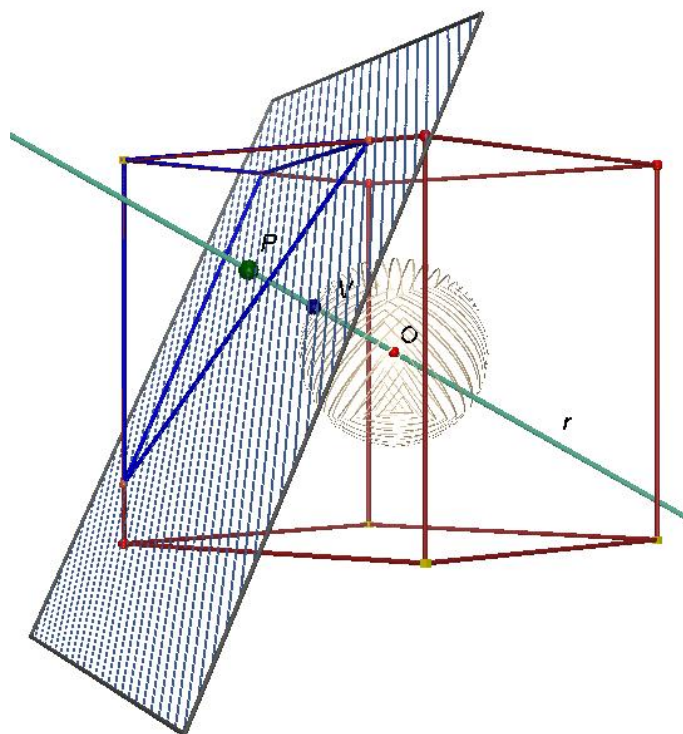
- 1) Si può ottenere un parallelogramma che non sia un rettangolo?*
- 2) Se sì, come? Se no, perché?*

Questa domanda ha creato grosse difficoltà agli studenti. La difficoltà ovviamente nasce dal fatto che gli studenti non avevano ben chiaro che non tutti i piani intersecano un diedro retto in angoli di 90° .

D'altronde il modello virtuale non dava loro alcuna informazione dal momento che la rappresentazione del cubo e del piano sullo schermo non conserva l'ampiezza degli angoli.

Anche il modello reale del cubo era di molto aiuto. Non era infatti possibile agli studenti intersecare effettivamente il loro modello con un piano.

Riporto a questo proposito ciò che è avvenuto nel corso svolto nel 2004-05 alla SSIS riprendendolo da [Accascina, Rogora, 2006]. Una studentessa ha continuato ad asserire con sicurezza che si ottenevano sempre rettangoli perché ogni piano interseca un diedro retto in angoli retti. Quando i Professori Accascina e Rogora hanno detto che ciò non era vero, la studentessa ha provato a dare alcune dimostrazioni, ovviamente sbagliate e, ogni qual volta le veniva mostrato l'errore nella sua dimostrazione, lei ne proponeva una nuova. Si è convinta solo quando i professori le hanno mostrato al computer la seguente figura:



e le hanno chiesto di misurare la somma degli angoli del triangolo intersezione del piano con il cubo.

Eppure, durante la precedente lezione, la studentessa aveva accettato la definizione di perpendicolarità tra piani in cui si era messo in evidenza il fatto che i piani con cui si interseca il diedro siano perpendicolari al suo spigolo.

Da ciò deriva che per far ben capire i concetti essenziali, non è sufficiente dare le definizioni e dimostrare alcuni teoremi, ma è necessario fornire, oltre alle definizioni e ai teoremi fondamentali, anche esempi concreti che permettano di affinare l'intuizione e la visualizzazione dei corpi nello spazio.

Questa stessa esperienza mostra anche quanto sia importante, e nello stesso tempo delicato, l'uso di modelli reali e virtuali.

Bisogna far ben capire agli studenti che in alcuni casi è utile usare modelli concreti, in altri sono da preferire modelli virtuali.

Capitolo 2

Percorsi didattici

2.1 Introduzione

Propongo ora alcuni percorsi per mezzo dei quali ogni studente dovrebbe (da solo) ragionare e avvicinarsi il più possibile alla comprensione dei problemi che gli vengono di volta in volta proposti.

I percorsi didattici che seguiranno possono essere utili a:

- studenti dell'ultimo anno delle scuole medie superiori
- studenti laureati o in fase di specializzazione in matematica e in fisica che volessero intraprendere la carriera dell'insegnamento
- chiunque, spinto magari anche solamente dalla curiosità, volesse capire le prime nozioni di geometria dello spazio in maniera attiva

I seguenti percorsi sono strutturati da singole domande sotto forma di schede accompagnate da immagini e dalla possibilità di utilizzare il programma Cabri3D. Il gruppo di schede di ogni percorso è diviso in passi che segnano le tappe del percorso di apprendimento.

Ogni domanda costituirà una scheda che darà modo allo studente di riflettere e rispondere; solo in un secondo momento potrà confrontare le sue risposte con un commento ragionato che lo accompagnerà gradualmente alla soluzione esatta.

Nella tesi le schede sono inserite una di seguito all'altra per motivi di spazio. L'ideale sarebbe che fossero pagine singole e che venissero presentate, magari anche tramite un piccolo programma, una per volta agli studenti. Questi ultimi avrebbero così tutto il tempo necessario per rispondere.

Ho posto l'attenzione solamente su alcuni dei possibili percorsi sulla geometria dello spazio quindi non sono i primi che proporrei, ma ve ne sarebbero molti altri a precederli.

Ogni percorso inizia con la seguente avvertenza, destinata a potenziali futuri insegnanti, che però scrivo solamente qui:

Questo è un percorso di autovalutazione e di autoapprendimento. Per questo: è auspicabile che le domande vengano lette in ordine e che le risposte non vengano ritoccate in seguito, ma eventualmente solo rilette. Nello svolgere questo percorso

potrai tornare spesso a rivedere le risposte già date. Cerca in quei momenti di capire ed individuare le difficoltà che hai avuto, gli errori che hai eventualmente commesso prima di giungere ad una soluzione e gli sbagli che non ti hanno consentito di dare una risposta.

Ho ideato i seguenti percorsi didattici:

1. Verso la definizione di piani perpendicolari
2. Sezioni piane del diedro

In essi sono dati per scontati alcuni concetti che ho elencato all'inizio di ogni percorso.

Per motivi di spazio solamente il percorso B è costituito da schede dettagliate. Il percorso A è un progetto didattico che si può comunque ampliare e strutturare in maniera analoga al percorso B.

2.2 Percorso A: Verso una definizione di piani perpendicolari

Prerequisiti

La geometria del piano viene data come prerequisito.

Sono dati come prerequisiti anche i seguenti argomenti che potrebbero essere stati svolti in altri percorsi precedenti.

- Uno sottoinsieme dello spazio si dice convesso se presi comunque due suoi punti, il segmento che li congiunge è tutto contenuto in esso. L'intersezione di due convessi è un convesso.
- Nello spazio una retta è individuata da due punti, mentre un piano può essere individuato da:
 1. tre punti non allineati,
 2. una retta e un punto esterno ad essa,
 3. due rette incidenti,
 4. due distinte rette parallele.
- Due rette nello spazio si dicono perpendicolari se sono incidenti e sul piano generato sono perpendicolari.
- Una retta ed un piano nello spazio si dicono perpendicolari se la retta è incidente al piano e qualsiasi retta del piano passante per il punto di incidenza è perpendicolare alla retta data.
- Se una retta è perpendicolare a due rette distinte di un piano passanti per il punto di incidenza del piano e della retta, allora la retta è perpendicolare al piano.

- Data una retta r e un punto A , esiste uno ed un sol piano perpendicolare a r e passante per A .
- Dato un piano α e un punto A , esiste una ed un sola retta perpendicolare a α e passante per A .
- Piani perpendicolari ad una stessa retta sono tra loro paralleli.
- Siano A e B due semispazi aventi per origini rispettivamente i piani α e β incidenti. L'insieme $A \cap B$, cioè l'insieme dei punti comuni ai due semispazi, è detta diedro. La retta di intersezione dei due piani si dice spigolo del diedro. Il diedro è un convesso perché è intersezione di due convessi, i semispazi.
- Dato un diedro e dato un piano γ che interseca il diedro in un angolo, ogni piano parallelo a γ interseca il diedro in un angolo uguale al precedente.

Obiettivo: Voglio portare lo studente dall'idea intuitiva di piani perpendicolari ad una definizione vera e propria: un piano α è perpendicolare ad un piano β se il piano α contiene una retta perpendicolare al piano β (Def_1).

Questa definizione ha il difetto di non mettere in risalto la sua simmetricità. Per mezzo della dimostrazione della simmetria della definizione voglio portare gradualmente lo studente ad una seconda definizione di perpendicolarità tra piani, quella in cui si considerano le intersezioni dei due piani con un piano perpendicolare alla retta intersezione dei due piani (Def_2).

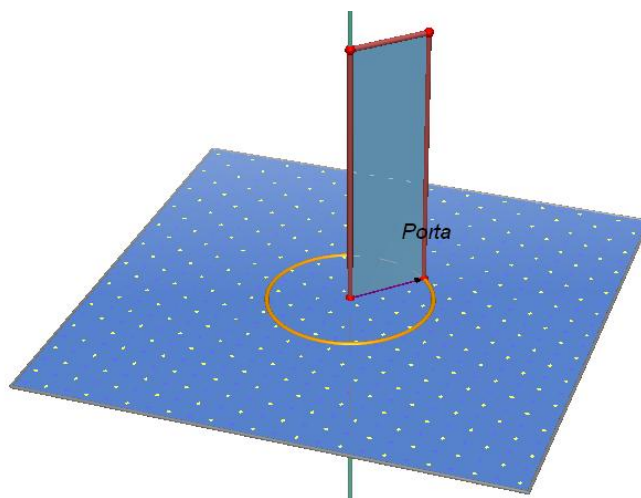
Nell'ultima parte del percorso intendo portare gli studenti a dimostrare che le due definizioni si equivalgono.

PASSO 1: verso una prima definizione di piani perpendicolari

Ogni studente è in grado di mostrare esempi di piani perpendicolari: ha un'idea precisa di cosa siano due piani perpendicolari, ma non è in grado di darne una definizione. Quindi la prima scheda:

SCHEDA: dai qualche esempio di piani perpendicolari

Nelle osservazioni che lo studente legge dopo aver provato a rispondere alla precedente domanda vengono proposti alcuni esempi. Per capire cosa siano due piani perpendicolari, faccio in modo di porre l'attenzione su due pareti adiacenti di una stanza, il pavimento ed una parete o (ancora più chiaramente) il pavimento ed una porta. Un utile aiuto è il file **Porta** realizzato con Cabri3D. Per mezzo di esso si ha una simulazione di una porta girevole intorno ai suoi cardini.



Dall'esempio della porta, pensando a come questa sia vincolata dai cardini, si giunge alla seguente definizione:

Def₁: Siano dati piani α e β che si intersecano in una retta r . Si dice che il piano α è perpendicolare al piano β se α contiene almeno una retta perpendicolare a β .

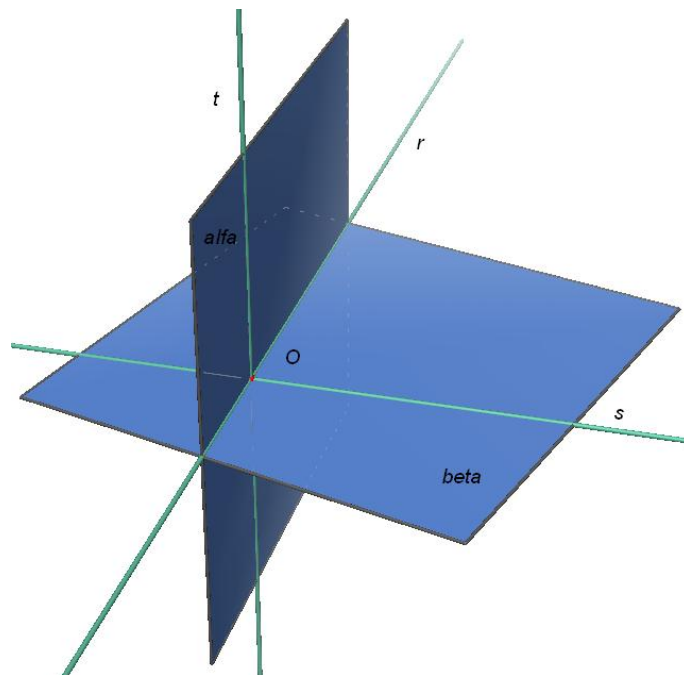
PASSO 2: simmetria della proprietà di perpendicolarità tra due piani

A piccoli passi intendo giungere alla conclusione che la condizione di perpendicolarità tra due piani gode della proprietà simmetrica. Faccio ricorso alla seguente dimostrazione.

Dimostrazione: $\alpha \perp \beta \iff \beta \perp \alpha$ (secondo la *Def₁*).

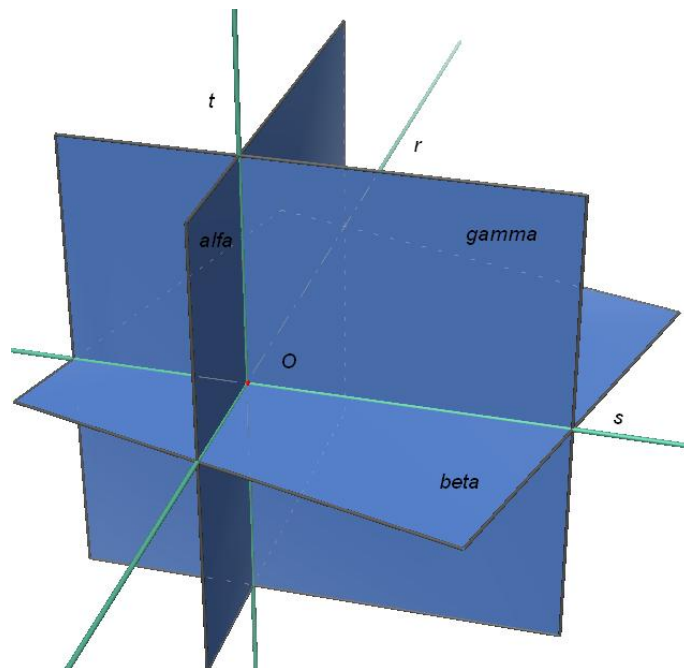
Sia per ipotesi $\alpha \perp \beta$. Consideriamo la retta t contenuta in α e perpendicolare a β . Consideriamo il punto O di intersezione tra la retta t e la retta r di intersezione tra α e β . Per definizione di perpendicolarità tra una retta e un piano, tutte le rette del piano β passanti per O sono perpendicolari alla retta t . In particolare la retta r è perpendicolare a t .

Consideriamo sul piano β la retta s passante per O e perpendicolare alla retta r . La retta s è per costruzione perpendicolare a r ed è perpendicolare, per quel che abbiamo detto prima, alla retta t . Ma allora, la retta s , essendo perpendicolare a due rette distinte passanti per O del piano α è perpendicolare al piano α . Abbiamo dimostrato $\beta \perp \alpha$. ■

**PASSO 3: verso una seconda definizione di piani perpendicolari**

La dimostrazione della simmetria permette di arrivare ad un'altra definizione di perpendicolarità tra piani che ha il pregio di essere simmetrica. Questa definizione ci sarà utile nel percorso successivo.

Per ottenere ciò chiedo agli studenti di riprendere la dimostrazione della simmetria e di considerare il piano γ determinato dalle rette t e s .



La retta r è perpendicolare alle rette t e s e quindi è perpendicolare al piano γ . Osserviamo che il piano γ interseca i piani α e β nelle rette t e s che sono tra loro perpendicolari. Viene quindi spontaneo pensare alla seguente definizione di piani perpendicolari:

Def₂: due piani α e β che si intersecano in una retta r si dicono tra loro perpendicolari se preso comunque un piano perpendicolare alla retta r , le sue rette di intersezione con i piani α e β sono perpendicolari.

Per capire bene questa seconda definizione faccio in modo che lo studente possa pensare non più solamente ad una porta, ma dovendo far ricorso ad un terzo piano, al pavimento e a *due* pareti verticali adiacenti di una stanza rettangolare. Infatti due pareti adiacenti, tra loro perpendicolari, sono intersecate dal pavimento della stanza (che è perpendicolare allo spigolo della stanza, intersezione delle due pareti) in due rette tra loro ortogonali.

Sfrutterò poi alcuni argomenti che ho dato per prerequisiti per far capire agli studenti che la *Def₂* è indipendente dalla scelta del piano perpendicolare allo spigolo del diedro.

PASSO 4: equivalenza delle definizioni

A questo punto lo studente ha capito la simmetria della proprietà in questione e ha dedotto due differenti definizioni di perpendicolarità tra piani. Ora non resta altro che dimostrare che $Def_1 \iff Def_2$. Anche qui seguo lo studente a piccoli passi verso la tesi attraverso la dimostrazione.

Abbiamo già visto che $Def_1 \Rightarrow Def_2$. Dimostriamo ora che $Def_2 \Rightarrow Def_1$.

Dimostrazione: $Def_2 \Rightarrow Def_1$

Siano dati α e β perpendicolari secondo la *Def₂*. Per definizione, il piano γ perpendicolare a r interseca i due piani α e β in due rette t e s perpendicolari tra loro. La retta t , appartenente al piano α è perpendicolare sia a s che a r , rette di β , e quindi è perpendicolare al piano β . Abbiamo dimostrato che il piano α contiene una retta perpendicolare al piano β . Abbiamo quindi dimostrato che il piano α è perpendicolare al piano β secondo la *Def₁*. ■

2.3 Percorso B: Sezioni piane del diedro

Prerequisiti

- Prerequisiti al precedente percorso A
- Tutto il percorso A (in particolare le *Def₁* e *Def₂* di piani perpendicolari)
- **Definizione:** il diedro generato da due piani perpendicolari si dice diedro retto (due piani perpendicolari determinano quattro diedri retti).

Obbiettivi: l'obiettivo iniziale è far capire allo studente che dati due piani perpendicolari, tramite una sezione piana, si possono ottenere tutti gli angoli compresi nell'intervallo $(0^\circ, 180^\circ)$ e non solamente l'angolo retto. Ciò mette in luce il fatto che nella Def_2 di perpendicolarità tra piani la condizione di perpendicolarità tra il piano e lo spigolo del diedro è essenziale.

Un secondo obbiettivo è far prendere coscienza allo studente del fatto che dato un qualsiasi diedro, tramite una sezione piana, si possono sempre ottenere tutti gli angoli appartenenti all'intervallo sopra menzionato. Tutto ciò è fondamentale per far capire che assegnato un qualsiasi diedro è sempre possibile determinare un piano che lo intersechi in un angolo retto.

Il terzo obiettivo è far capire che, dato un diedro qualsiasi e un punto O sul suo spigolo, comunque si assegni un angolo α convesso, esistono infiniti piani passanti per O che intersecano il diedro in un angolo uguale a α .

PASSO 1: possibilità di ottenere angoli di ampiezza compresa tra 0° e 90° dalle sezioni piane di un diedro retto

SCHEDA B.1: intersecando con un piano un diedro retto si può ottenere un angolo di 90° ?

Osservazioni:

E' molto probabile che la tua risposta sia stata: "Sì".

Dalla Def_2 di perpendicolarità tra piani, basta infatti prendere un piano perpendicolare allo spigolo del diedro per avere un angolo retto.

Qualunque risposta tu abbia dato, osserva l'immagine **01**. Questo è un modellino molto semplice da costruire. Sono bastati del cartoncino e del nastro adesivo. Come vedi i due piani costituiti dai due cartoncini verde e viola sono perpendicolari. Utilizzando questo modello proviamo a fare delle osservazioni.



Immagine **01**

Prendi una squadra da disegno (va bene anche un libro o un foglio di carta, ma è meglio avere le squadre a portata di mano) e usando due pareti adiacenti di una stanza come piani perpendicolari, o proprio un modellino analogo a quello che hai appena visto in foto, prova a vedere se si può ottenere un angolo retto.

Dovresti essere riuscito a confermare che: si possono ottenere angoli di 90° . (Vedi immagine **02**)



Immagine 02

SCHEDA B.2: hai intersecato il diedro con un piano perpendicolare allo spigolo del diedro. Cosa succede se consideri un piano ad esso parallelo?

Osservazioni:

Sicuramente hai risposto che la sua intersezione con il diedro è sempre un angolo retto. Infatti tutti i piani perpendicolari alla retta di intersezione formano un angolo retto.

D'ora in poi vogliamo considerarne solamente uno.

Per fare ciò fissiamo un punto O sullo spigolo del diedro e studiamo d'ora in poi solamente i piani secanti contenenti quel punto.

SCHEDA B.3: si può ottenere un angolo di 45° come sezione piana di un diedro retto?

Osservazioni:

Usando una squadra da disegno (quella con due angoli di 45°) puoi vedere come sia facilmente ottenibile un tale angolo. (Vedi immagine 03)



Immagine 03

SCHEDA B.4: si può ottenere un angolo di 30° come sezione piana di un diedro retto?

Osservazioni:

Potendoti aiutare sempre con una squadra (quella con gli angoli di 30° e 60°) avrai sicuramente notato che si può ottenere un angolo di 30° . (Vedi immagine 04)



Immagine 04

SCHEDA B.5: si può ottenere un angolo di 60° come sezione piana di un diedro retto?

Osservazioni:

Puoi facilmente rispondere alla domanda osservando l'immagine 05.



Immagine 05

Abbiamo così notato che dalle sezioni piane del diedro retto si possono ottenere angoli di 30° , 60° e 90° . Non sono i soli, perché si possono avere tutti gli angoli compresi nell'intervallo $(0^\circ, 90^\circ)$. Puoi fare qualche altra prova ritagliando del cartoncino in spicchi di ampiezza minore di 30° o a tuo piacimento.

PASSO 2: possibilità di ottenere angoli di ampiezza maggiore di 90° dalle sezioni piane di un diedro retto

SCHEDA B.6: è possibile ottenere un angolo di ampiezza compresa tra 90° e 180° ?

Osservazioni:

Qualsiasi sia stata la tua risposta, ti consiglio di usare carta (o anche meglio cartoncino) e taglierino per costruire angoli di ampiezza maggiore di 90° e minore di 180° . Fai le dovute prove.

Dovrebbe essere ormai banale che sia possibile fare il tutto per angoli di ampiezza variabile tra 0° e 180° . (Vedi immagini 06 07 e 08)



Immagine 06



Immagine 07



Immagine 08

Ti sono state presentate diverse immagini che spero di volta in volta abbiano chiarito le tue idee. Come hai potuto sicuramente notare, a individuare l'angolo che ci interessava c'erano due frecce (vettori). In assenza della squadra, possono bastare le frecce per formare un angolo e il piano che lo genera. Osserva le immagini **06** e **09** e nota come le cose cambiano solo apparentemente.

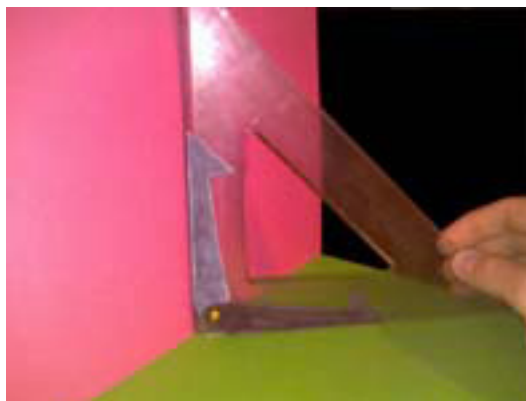


Immagine 09

SCHEDA B.7: puoi ottenere angoli di ampiezza maggiore dell'angolo piatto?

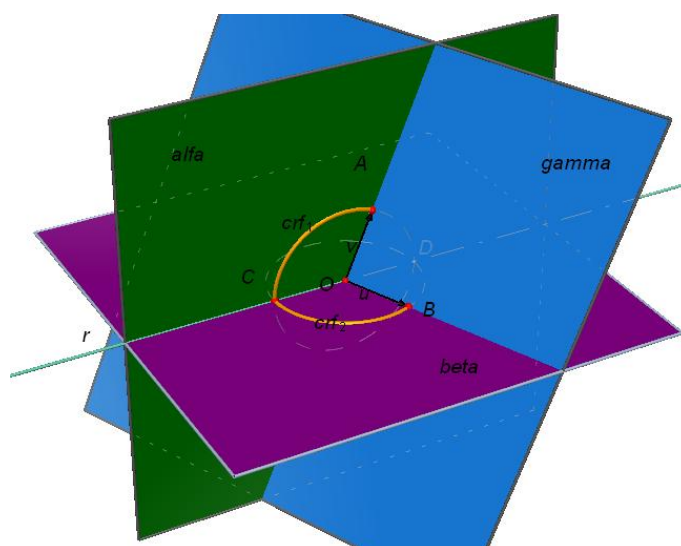
Osservazioni:

Se hai fatto le dovute prove hai senza dubbio e giustamente pensato che non ci sia speranza di ottenere un angolo di questo tipo secando due piani perpendicolari.

A quale conclusione siamo alla fine giunti? Che dalle sezioni piane del diedro retto è possibile ottenere tutti e soli gli angoli la cui misura sia compresa tra 0° e 180° .

Finora abbiamo utilizzato un modellino di carta. Facciamo ora ricorso ad un modello virtuale realizzato con Cabri3D.

Apri il file **Primo modello - PERPENDICOLARI - VETTORI**. Cerchiamo di comprendere bene la struttura del modello proposto.



I piani perpendicolari che utilizziamo sono i piani α e β di colore **verde** e **viola**. Questi piani si intersecano nella retta r . Le frecce $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ sono disegnate in nero sui piani α e β . I punti O , A e B determinano il piano secante γ .

Il punto A si muove su α mantenendo la stessa distanza da O quindi si muove lungo la circonferenza crf_1 . Analogamente il punto B si muove sulla circonferenza crf_2 del piano β . Le circonferenze crf_1 e crf_2 si incontrano nei punti C e D .

Adesso puoi facilmente provare con mano che dati i piani α e β perpendicolari, spostando i punti A e B si possono ottenere diversi angoli $\widehat{AOB}$.

Se avviciniamo A e B entrambi a C o a D , la misura dell'angolo $\widehat{AOB}$ tende sempre di più al valore di 0° (che si avrebbe quando entrambi coincidono contemporaneamente con C o con D). Mentre se li avviciniamo uno a C e l'altro a D , la misura dell'angolo che si ottiene si avvicina (tende) sempre di più al valore di 180° (che si avrebbe quando A coincide con C e B con D ... o viceversa).

Possiamo quindi far variare l'ampiezza dell'angolo da 0° a 180° .

Abbiamo poi visto con il nostro modellino che non è possibile ottenere un angolo maggiore di 180° , ma perché ciò accade?

Osserviamo che un angolo maggiore di 180° non è convesso. Ma noi sappiamo che ogni diedro è un convesso. Intersecando un diedro (convesso) con un piano (convesso) otteniamo un convesso. Non possiamo quindi ottenere un angolo maggiore di 180° .

PASSO 3: numero di piani secanti che formano ogni angolo

SCHEDA B.8: poniamo attenzione su un altro aspetto. Torniamo all'angolo di 90° . In quanti modi si può ottenere quest'angolo (oltre a tutti i piani paralleli come abbiamo già avuto modo di vedere)?

Osservazioni:

Fai i dovuti tentativi sempre usando il modello che preferisci. Usando il file **Primo modello - PERPENDICOLARI - VETTORI** puoi fare interessanti osservazioni. Prova a fissare il punto A sulla retta passante per O perpendicolare al piano β .

Spostando adesso il punto B otteniamo piani perpendicolari al piano β (segue dalla prima definizione di perpendicolarità tra piani vista alla fine del percorso A). Analizza bene la situazione. Non ti ricorda l'esempio della porta visto nel percorso A?

In modo analogo puoi fissare il punto B sulla retta passante per O perpendicolare al piano α e modificare la posizione del punto B .

Hai quindi visto che sono molti i piani passanti per un punto O fissato che ci consentono di ottenere un angolo di 90° : infiniti.

Tra tutti questi piani si può scegliere un piano perpendicolare ad entrambi cioè un piano perpendicolare allo spigolo del diedro. Questo è il primo piano da noi trovato.

SCHEDA B.9: in quanti modi si può ottenere un angolo di 45° ?

Osservazioni:

Per rispondere a questa domanda puoi comodamente usare una squadra. Osserva le immagini **03** (scheda B.3) **10** e **11** e prova a rifare lo stesso per vedere come sia possibile avere infiniti piani secanti che formano un angolo di 45° .



Immagine 10

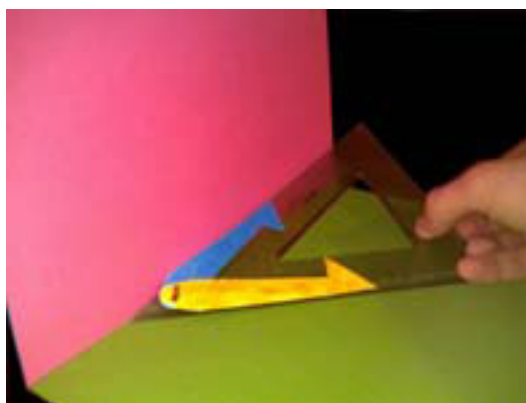


Immagine 11

SCHEDA B.10: in quanti modi si può ottenere un angolo di 30° ?

Osservazioni:

Avrai sicuramente già preso la squadra con un angolo di 30° per agire come abbiamo fatto per l'angolo di 45° .

SCHEDA B.11: in quanti modi si può ottenere un angolo di 60° ?

Osservazioni:

Non precisiamo ancora una volta l'iter per arrivare alla soluzione del quesito. Sicuramente ci sei già arrivato da solo.

SCHEDA B.12: in quanti modi si può ottenere un angolo di ampiezza maggiore di 90° e minore di 180° ?

Osservazioni:

Ritaglia del cartoncino o usa le frecce come nell'immagine **08** (scheda B.6). Con lo stesso criterio utilizzato nelle immediate schede precedenti puoi vedere come un angolo di ampiezza maggiore di 90° si comporti sotto questo aspetto come un angolo di ampiezza minore di 90° . Ne esistono infiniti.

SCHEDA B.13: vediamo di riassumere quel che abbiamo visto. In quanti modi si può ottenere un angolo di ampiezza compresa tra 0° e 180° ?

il punto A . Osserva come ci sia la posizione che forma un angolo qualsiasi.

Hai quindi visto come sia possibile, anche con un diedro NON retto, ottenere un angolo di ampiezza arbitraria.

Osserva in particolare che, dato un qualsiasi diedro, esistono piani che lo intersecano in due rette tra loro perpendicolari. Riprenderemo tra poco ciò.

SCHEDA B.16: è possibile ottenere un angolo di ampiezza maggiore dell'angolo piatto?

Osservazioni:

La risposta è, come prevedibile, "No" per le stesse motivazioni incontrate nel caso del diedro retto.

SCHEDA B.17: in quanti modi si può ottenere, come intersezione di un diedro qualsiasi, un angolo di misura precedentemente fissata?

Osservazioni:

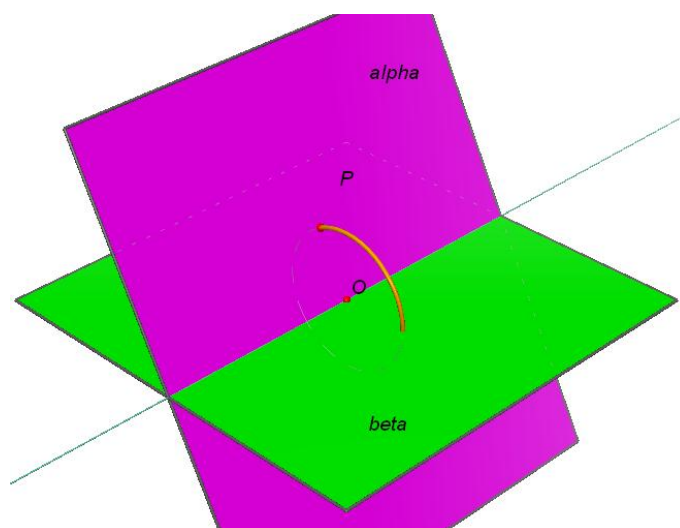
Riguarda le immagini **03 10** e **11** (schede B.3 e B.9). Modificando l'inclinazione dei piani del diedro in modo tale da formare un diedro NON retto, puoi rifare le stesse prove fatte nel caso del diedro retto per vedere che esistono infiniti modi di ottenere un angolo qualsiasi anche avendo un diedro NON retto.

Siamo giunti alla seguente **Proprietà**: Sia dato un diedro qualsiasi e un punto O sul suo spigolo. Fissato un qualsiasi angolo convesso, esistono infiniti piani passanti per O che intersecano il diedro in un angolo uguale ad esso.

PASSO 5: una costruzione guidata tramite Cabri3D

SCHEDA B.18: abbiamo visto che vi sono infiniti piani, tutti passanti per un punto fissato dello spigolo del diedro, che intersecano il diedro in un angolo convesso di ampiezza desiderata. Siamo quindi giunti alla conclusione che si può sempre ottenere un angolo di 90° come sezione piana di un qualsiasi diedro.

Ti chiediamo di costruire un tale piano usando Cabri3D. Apri il file **Costruzione angolo retto**.



Tramite questo modello puoi decidere il tipo di diedro da cui partire modificando la posizione del punto P . Sullo spigolo del diedro è fissato un punto O . Ti chiediamo di determinare un piano che intersechi il diedro in due rette tra loro perpendicolari.

Con Cabri3D è possibile costruire il piano passante per un punto assegnato e perpendicolare ad una retta assegnata. E' anche possibile costruire la retta passante per un punto assegnato e perpendicolare ad un piano assegnato.

Osservazioni:

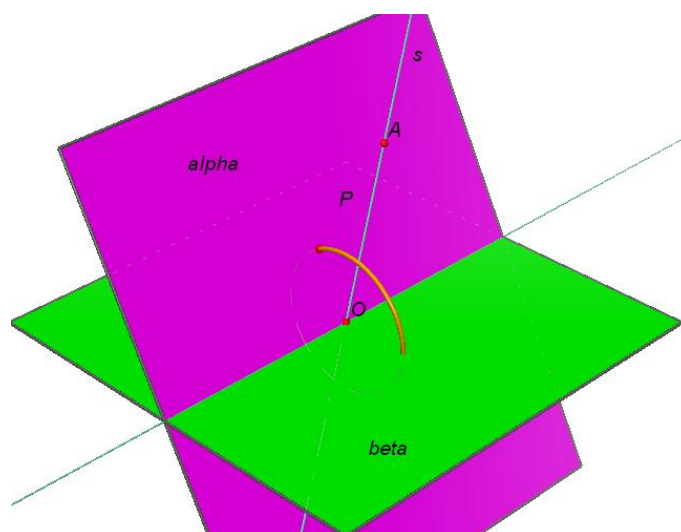
Nel caso in cui tu non ci sia riuscito ti diamo un piccolo aiuto. Lo trovi nella prossima scheda.

SCHEDA B.19: abbandona temporaneamente il modello virtuale e ritorna al modellino concreto che rappresenta un diedro formato da due piani α e β . Fissa un punto O sullo spigolo del diedro e fissa una qualsiasi retta s , distinta dallo spigolo che chiamiamo r . Prendi una squadra e vedi se esiste un piano che contiene la retta s e interseca il diedro in un angolo retto.

Osservazioni:

Ti sarai sicuramente accorto che un tale piano esiste.

SCHEDA B.20: ritorniamo al modello virtuale. Apri il file **Costruzione angolo retto-1**



In esso è rappresentato il solito diedro che puoi modificare spostando il punto P .

E' poi disegnata la retta s passante per O e per un punto A del piano α . Puoi spostare il punto A a tuo piacimento sul piano α . Ti chiediamo di trovare un piano γ contenente la retta s che interseca il diedro in un angolo retto.

Osservazioni:

Se non sei riuscito a trovare tale piano ti consigliamo di avere un po' di immaginazione.

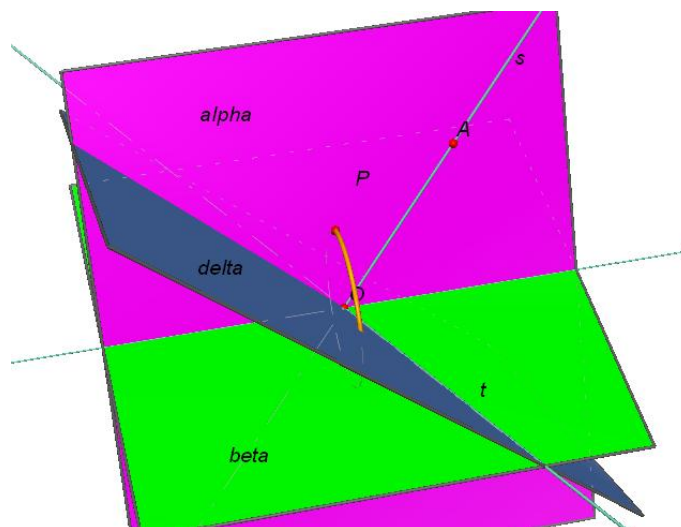
Pensa di aver trovato tale piano. Pensa alle sue intersezioni con i piani α e β .

SCHEDA B.21: la retta s è l'intersezione del piano γ con il piano α . Indichiamo con t la retta di intersezione di γ con β . La retta t è, per costruzione perpendicolare alla retta s e quindi ...

Osservazioni:

...e quindi la retta t appartiene al piano passante per O perpendicolare alla retta s .

Costruiamo quindi tale piano. Chiamiamolo δ



La retta t è l'intersezione tra δ e β .

Ecco trovato quindi il piano che cerchiamo. Il piano γ cercato è il piano determinato dalle rette s e t . Puoi modificare la sua posizione spostando il punto A .

2.4 Alcune dimostrazioni

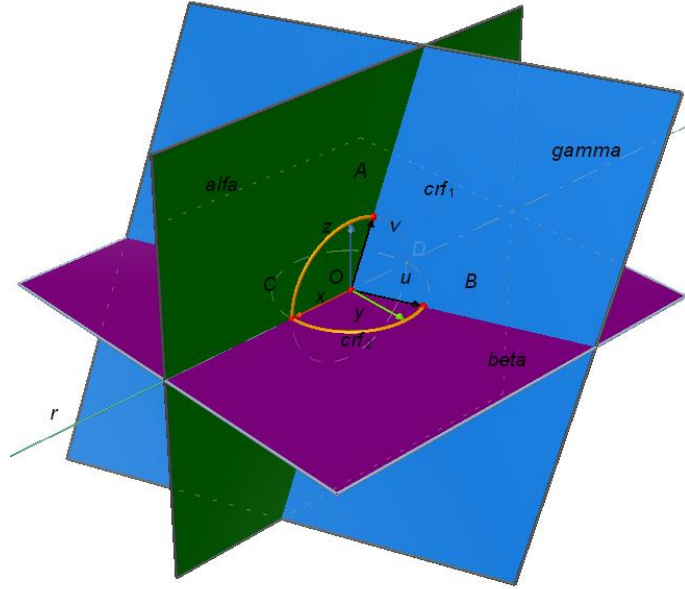
Nei percorsi didattici, dedicati anche a studenti non universitari, in alcuni casi ho dato solo un'idea intuitiva, basata sull'uso di modelli concreti e virtuali, del fatto che intersecando con un piano un diedro retto (o anche un diedro qualsiasi) si possono ottenere angoli di qualsiasi ampiezza compresa tra 0° e 180° . Inserisco ora le dimostrazioni mancanti che dovrebbero essere incluse nei percorsi dedicati a studenti universitari in ambito scientifico. Per i medesimi, le dimostrazioni avrebbero potuto anche essere inserite direttamente all'interno dei relativi percorsi, ma per mantenere un ordine che ritengo migliore in questo contesto, ho preferito raggrupparle qui alla fine.

Le dimostrazioni sfruttano la geometria analitica dello spazio e le proprietà delle funzioni continue, argomenti che non sono trattati nelle scuole secondarie superiori. Per gli studenti di queste ultime ci si dovrà quindi accontentare dell'evidenza data dai modelli.

Teorema: Tramite le sezioni piane del diedro retto si possono ottenere tutti gli angoli compresi nell'intervallo $(0^\circ, 180^\circ)$.

Dimostrazione:

Consideriamo la seguente figura simile a una già vista in precedenza (puoi anche direttamente aprire il file **Primo modello - PERPENDICOLARI - VETTORIxyz**).



In essa abbiamo fissato un sistema di riferimento cartesiano con origine in O , versore $\vec{u}_x$ sulla retta r di intersezione dei piani α e β , versore $\vec{u}_y$ sul piano β e versore $\vec{u}_z$ piano α . Per determinare il piano γ abbiamo scelto due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ unitari di origine O appartenenti rispettivamente al piano β e al piano α . Si ha pertanto:

$$\vec{u} = \cos(\alpha)\vec{u}_x + \sin(\alpha)\vec{u}_v = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$$

$$\vec{v} = \cos(\beta)\vec{u}_x + \sin(\beta)\vec{u}_z = (\cos(\beta), 0, \sin(\beta))$$

Gli angoli α e β variano tra 0° e 180° .

I due vettori determinano un qualsiasi piano passante per O . Per calcolare quindi l'angolo formato dal piano con il diedro, possiamo calcolare l'angolo η determinato dai due vettori.

È semplice calcolare il coseno dell'angolo η sapendo che il prodotto scalare dei due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ è dato da:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\eta)$$

Essendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vettori di modulo unitario si ha

$$\cos(\eta) = \vec{u} \cdot \vec{v} = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)$$

Poiché $\cos(\alpha)$ e $\cos(\beta)$ assumono tutti i valori compresi tra -1 e 1 , si ha che anche $\cos(\eta)$, essendo una funzione continua in α e β , assume tutti i valori compresi tra -1 e 1 . Pertanto l'angolo η varia tra 0° e 180° .

Osserviamo che il valore 0° si ottiene come limite quando i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tendono a diventare paralleli alla retta r di intersezione (quindi anche paralleli tra loro) e

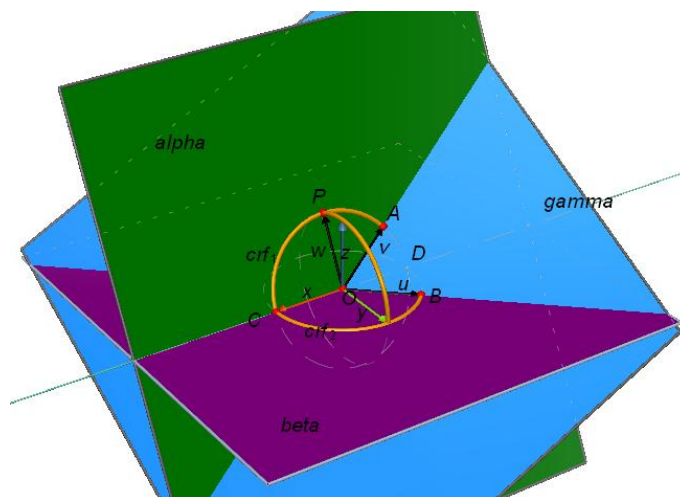
ad avere stesso verso. In questo caso $\cos(\alpha)$ e $\cos(\beta)$ tendono entrambi allo stesso valore di 1 (o di -1 secondo il verso scelto).

Se al contrario i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ tendono ad avere stessa direzione ma verso opposto allora $\cos(\eta)$ tende al valore di -1 quindi η tende al valore di 180° . ■

Teorema: Tramite le sezioni piane del diedro non necessariamente retto si possono ottenere tutti gli angoli compresi nell'intervallo $(0^\circ, 180^\circ)$.

Dimostrazione:

Consideriamo la seguente figura simile a quella vista nella scheda B.15 (si può anche aprire il file **Secondo modello - NON PERPENDICOLARI - VETTORIxyz**).



In essa il piano β è fissato una volta per tutte mentre il piano α ruota intorno alla retta r appartenente a β . Abbiamo fissato un sistema di riferimento cartesiano con origine in O , versore $\vec{u}_x$ sulla retta r di intersezione dei piani α e β , versore $\vec{u}_y$ sul piano β . Il versore $\vec{u}_z$, a differenza del caso precedente, non appartiene necessariamente al piano α .

Per modificare a nostro piacimento l'inclinazione del piano α facciamo ricorso ad un altro vettore unitario che chiamiamo $\vec{w}$. Il vettore $\vec{w}$ è stato preso, per comodità, perpendicolare alla retta di intersezione r . Abbiamo quindi:

$$\vec{w} = \cos(\phi)\vec{u}_y + \sin(\phi)\vec{u}_z = (0, \cos(\phi), \sin(\phi))$$

Per determinare il piano γ abbiamo scelto due vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ unitari di origine O appartenenti rispettivamente al piano β e al piano α . Si ha pertanto:

$$\vec{u} = \cos(\alpha)\vec{u}_x + \sin(\alpha)\vec{u}_y = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$$

$$\vec{v} = \cos(\beta)\vec{u}_x + \sin(\beta)\vec{w} = (\cos(\beta), \sin(\beta)\cos(\phi), \sin(\beta)\sin(\phi))$$

Gli angoli α , β e ϕ assumono tutti i valori compresi tra 0° e 180° .
Ora calcoliamo l'angolo η compreso tra i vettori $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$.

Abbiamo:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}| \cdot \cos(\eta)$$

Essendo $\vec{\mathbf{u}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ vettori di modulo unitario si ha

$$\cos(\eta) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \cos(\phi)$$

Osserviamo i seguenti casi:

- $\alpha \rightarrow \pi/2; \beta \rightarrow \pi/2 \implies \eta \rightarrow \phi$
- $\alpha \rightarrow 0^\circ; \beta \rightarrow 0^\circ \implies \eta \rightarrow 1$
- $\alpha \rightarrow 180^\circ; \beta \rightarrow 180^\circ \implies \eta \rightarrow 1$
- $\alpha \rightarrow 0^\circ; \beta \rightarrow 180^\circ \implies \eta \rightarrow -1$
- $\alpha \rightarrow 180^\circ; \beta \rightarrow 0^\circ \implies \eta \rightarrow -1$

Ne segue che $\cos(\eta)$, essendo una funzione continua, assume tutti i valori compresi tra -1 e 1 e quindi l'angolo η assume tutti i valori tra 0° e 180° . ■

Capitolo 3

Bibliografia

[Accascina, Rogora, 2006]

G.Accascina, E. Rogora *Using Cabri 3D Diagrams For Teaching Geometry*, International Journal for Technology in Mathematics Education, vol. 13, n.1., pp. 11-22

[Miele, 2006]

A. Miele *Perpendicolarità nello spazio con software di geometria dinamica*, Tesi di Laurea (Relatori: G.Accascina, C. Bernardi), Dipartimento di Matematica, Università di Roma “La Sapienza”.

[Cateni, Fortini, Bernardi, 2005]

L.Cateni, R.Fortini, C.Bernardi *Il nuovo pensiero geometrico 2*, Per il triennio del liceo scientifico.

Indice

1	Profilo del laureato medio	3
1.1	Esperienze: i corsi MC3 e SSIS	3
2	Percorsi didattici	9
2.1	Introduzione	9
2.2	Percorso A: Verso una definizione di piani perpendicolari	10
2.3	Percorso B: Sezioni piane del diedro	14
2.4	Alcune dimostrazioni	26
3	Bibliografia	30