Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Esercitazione per il corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (Docente Daniela Giachetti)
a cura di Ida de Bonis

Esercizio 1. Calcolare per $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma \frac{z-2}{(z-\frac{1}{2})^n} dz$$

dove $\gamma = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Soluzione:
Per $n \leq 0$ si ha che l'integrale é nullo per il teorema integrale di Cauchy.
Per $n = 1$ si ha che

$$\int_\gamma \frac{z-2}{z-\frac{1}{2}} dz = 2\pi i res(f, \frac{1}{2})$$

Essendo $z = \frac{1}{2}$ un polo semplice per f, si ottiene

$$res(f, \frac{1}{2}) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} (z - \frac{1}{2}) \frac{z-2}{z-\frac{1}{2}} = -\frac{3}{2}$$

Ne segue che

$$\int_\gamma \frac{z-2}{z-\frac{1}{2}} dz = -3\pi i.$$

Per $n = 2$ la funzione presenta un polo di ordine 2 in $z = \frac{1}{2}$. Calcolando il residuo si ha:

$$res(f, \frac{1}{2}) = \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \Big((z - \frac{1}{2})^2 \frac{z-2}{(z-\frac{1}{2})^2} \Big) = 1,$$

quindi

$$\int_\gamma \frac{z-2}{(z-\frac{1}{2})^2} dz = 2\pi i$$

Per $n \geq 3$ si avrá

$$\int_\gamma \frac{z-2}{(z-\frac{1}{2})^n} dz = 0.$$

Si conclude che:

$$\int_\gamma \frac{z-2}{(z-\frac{1}{2})^n} dz = \begin{cases} 0 & \text{per } n \leq 0 \text{ e per } n \geq 3 \\ \neq 0 & \text{per } n = 1, 2 \end{cases}$$

Esercizio 2. Calcolare al variare di $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^k} dz$$

dove $\gamma = \{2e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Soluzione:
Procedendo in maniera analoga al precedente esercizio, risulta che:

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(z-1)^k} dz = \begin{cases} 0 & \text{per } k \leq 0 \\ \neq 0 & \text{per } k > 0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-\frac{1}{3})(z-2i)} dz$$

dove $\gamma = \{3e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Soluzione:
Applicando il teorema dei residui ed osservando che le singolaritá $z_0 = \frac{1}{3}$ e $z_1 = 2i$ sono poli semplici interni a γ, si ottiene:

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-\frac{1}{3})(z-2i)} dz = 2\pi i res(f, z_0) + 2\pi i res(f, z_1) = 2\pi i \Big(\frac{3}{1-6i} + \frac{3}{6i-1} \Big) = 0.$$

Esercizio 4. Si determini una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ che abbia come parte reale la funzione

$$u(x,y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y.$$

Soluzione:
Utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$$

Utilizzando la prima condizione del sistema si ha:

$$v_x = -u_y = xe^x \sin y + e^x \sin y + e^x y \cos y$$

da cui, integrando rispetto ad x si ha:

$$v(x,y) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + h(y)$$

Utilizzando la seconda condizione del sistema si ha:

$$v_y = u_x = e^x \cos y + xe^x \cos y - e^x y \sin y$$

da cui, integrando rispetto ad y si ha

$$v(x,y) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + g(x).$$

Ponendo ora

$$h(y) = g(x) = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

si trova che

$$v(x,y) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Esercizio 5. Si determini per quali valori del parametro $b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x,y) = e^{bx} \cos 2y \sin 2y$$

é la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$.

Soluzione:

Si osservi che

$$u(x,y) = e^{bx} \cos 2y \sin 2y = \frac{e^{bx} \sin(4y)}{2}.$$

Procedendo in maniera analoga al precedente esercizio si trova che:

$$v_x = -u_y = -2e^{bx} \cos(4y),$$

$$v_y = u_x = \frac{b}{2} e^{bx} \sin(4y)$$

da cui

$$v(x,y) = -\frac{2}{b} e^{bx} \cos(4y) + h(y),$$

$$v(x,y) = -\frac{b}{8} e^{bx} \cos(4y) + g(x).$$

Ne segue che $b = \pm 4$.

Esercizio 6. Calcolare la trasformata di Laplace $F(s)$ di

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon - 1} & 0 \le t \le \epsilon - 1 \\ 0 & t > \epsilon - 1 \end{cases}$$

Mostrare che $\lim_{\epsilon \to 1} F(s) = 1$.

Soluzione:
La trasformata di Laplace é data da:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt = \int_0^{\epsilon-1} \frac{1}{\epsilon-1}e^{-st}dt = \frac{e^{-s(\epsilon-1)}-1}{s(1-\epsilon)}.$$

Si ha che

$$\lim_{\epsilon\to 1} F(s) = \lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t} = 1,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo posto $t = s(1-\epsilon)$ ed abbiamo utilizzato il limite notevole.

Esercizio 7. Si calcoli l'ascissa di convergenza $\sigma[f]$ del segnale

$$f(t) = \begin{cases} e^t & 3 < t \\ 1 & 0 \le t \le 3. \end{cases}$$

Soluzione:
Dobbiamo calcolare l'estremo inferiore delle parti reali $Re\, s$ per cui

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|dt < +\infty$$

Risulta che:

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|dt = \int_0^{3} |e^{-st}|dt + \int_3^{+\infty} e^t|e^{-st}|dt = \int_0^{3} e^{(-Res)t}dt + \int_3^{+\infty} e^{t(1-(Res))}dt$$

Affinché $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-st}|dt$ risulti finito deve essere che $1 - Res < 0$, ovvero $Res > 1$. Ne segue che $\sigma[f] = 1$. Si osservi che non si é tenuto conto del primo integrale in quanto risulta finito perché l'intervallo su cui é definito é limitato.

Esercizio 8.

i) Si esprima come somma di una serie numerica il seguente integrale, giustificando i passaggi

$$\int_0^1 (e^{-3x^2}-1)dx;$$

ii) Si calcoli l'integrale precedente con un errore inferiore a $3 \cdot 10^{-2}$.

Soluzione:

i) Utilizzando lo sviluppo in serie di potenze per la funzione esponenziale, si puó esprimere la funzione integranda nel seguente modo:

$$e^{-3x^2} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3x^2)^n}{n!} - 1 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n x^{2n}}{n!} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n x^{2n}}{n!}$$

Risulta quindi che, integrando la serie termine a termine,

$$\int_0^1 (e^{-3x^2}-1)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{n!(2n+1)}$$

ii) Utilizzando la stima del resto per la serie di Leibniz si ha:

$$|R_n| \le |a_{n+1}| \le \frac{3^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)}$$

Imponendo che

$$\frac{3^{n+1}}{(n+1)!(2n+3)} < 3 \cdot 10^{-2}$$

si trova che per $n = 6$ l'integrale si approssima nel seguente modo

$$\int_0^1 (e^{-3x^2}-1)dx \cong -1 + \frac{3^2}{2!5} - \frac{3^3}{3!7} + \frac{3^4}{4!9} - \frac{3^5}{5!11} + \frac{3^6}{6!13}.$$

Esercizio 9.

i) Si esprima come somma di una serie numerica il seguente integrale, giustificando i passaggi

$$\int_0^1 \sin(3x^2)dx;$$

ii) Si calcoli l'integrale precedente con un errore inferiore a $3 \cdot 10^{-2}$.

Soluzione:

i) Procedendo in maniera analoga al precedente esercizio si trova che

$$\int_0^1 \sin(3x^2)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1}}{(2k+1)!(4k+3)},$$

ii) Stimando il resto come nell'esercizio precedente si trova che affinché

$$\frac{3^{2k+3}}{(2k+3)!(4k+7)} < 3 \cdot 10^{-2}$$

basta scegliere $k = 2$ per avere la seguente approssimazione:

$$\int_0^1 \sin(3x^2)dx \cong 1 - \frac{3^3}{3!7} + \frac{3^5}{5!11}$$

Esercizio 10. Si calcoli

$$\int_\gamma \frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^2} dz,$$

dove γ é il bordo dell'insieme A definito da $A = \{z = x + iy : x^2 - 4x \le y \le 2\}$.

Soluzione:

Si ha che $z = \pi$ é un polo semplice per la funzione integranda e si trova all'interno di A. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_\gamma \frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^2} dz = 2\pi i res(f,\pi).$$

Si trova che

$$res(f,\pi) = \lim_{z\to\pi}(z-\pi)\frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^2} = 1.$$

Pertanto

$$\int_\gamma \frac{\sin(z-\pi)}{(z-\pi)^2} dz = 2\pi i$$

Esercizio 11. Si calcoli

$$\int_\gamma |z| \cos z dz,$$

dove $\gamma(t) = 3e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$.

Soluzione:

La funzione integranda non é olomorfa nell'insieme di cui γ é il bordo. Osservando che su γ il modulo di z vale 3,

$$\int_\gamma |z| \cos z dz = 3 \int_\gamma \cos z dz = 0$$

poiché la funzione $\cos z$ é olomorfa e γ una curva chiusa contenuta nell'insieme di olomorfia.

Esercizio 12. Si classifichino le singolaritá della seguente funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1}.$$

Si calcoli il seguente integrale

$$\int_\gamma \frac{z^2}{e^z - 1}$$

dove γ é il bordo dell'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| \le 2, 1 \le Im(z) \le 9\}$.

Soluzione:
Le singolaritá della funzione f sono i punti tali che $e^z - 1 = 0$, che per la periodicitá dell'esponenziale sono i punti $z_k = 2k\pi i$.
Per $k = 0$ si ha che $z_0 = 0$ é una singolaritá eliminabile, infatti

$$\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{e^z - 1} = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{z}{e^z - 1} = 0.$$

Per $k \neq 0$ le singolaritá sono poli di ordine 1, poiché

$$\lim_{z\to 2k\pi i} (z - 2k\pi i) \cdot \frac{z^2}{e^z - 1} = \lim_{z\to 2k\pi i} \frac{(z - 2k\pi i)}{e^{z-2k\pi i} - 1} \cdot z^2 = (2k\pi i)^2 \neq 0.$$

L'unica singolaritá che cade nel rettangolo assegnato é $z = 2\pi i$, pertanto risulta che

$$\int_\gamma \frac{z^2}{e^z - 1} dz = 2\pi i res(f, 2\pi i) = -8\pi^3 i.$$

Esercizio 13. Calcolare, con i metodi della variabile complessa, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{x^2 + 4i} dx.$$

Soluzione:
L'estensione della funzione integranda in campo complesso é data da

$$f(z) = \frac{e^{i3z}}{z^2 + 4i},$$

e sia γ la curva chiusa (percorsa nel verso usuale) ottenuta concatenando una semicirconferenza γ_R nel semipiano $Imz \geq 0$ ed il segmento $[-R, R]$.
Le singolaritá di f sono $z_0 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}, z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.
L'unica singolaritá interna a γ é z_1. Per il teorema dei residui si ha:

$$\int_\gamma \frac{e^{i3z}}{z^2 + 4i} dz = 2\pi i res(f, z_1) = 2\pi i \frac{e^{-3\sqrt{2}i - 3\sqrt{2}}}{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}$$

da cui,

$$2\pi i \frac{e^{-3\sqrt{2}i - 3\sqrt{2}}}{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}} = \int_\gamma f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(z) dz + \int_{-R}^{+R} f(x) dx.$$

Per il lemma di Jordan il primo integrale nel membro di destra tende a zero per $R \to \infty$, e quindi si conclude che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \frac{e^{-3\sqrt{2}i - 3\sqrt{2}}}{-2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}}.$$

Esercizio 14. Provare che $f(z) = \cos(\frac{1}{z})$ ammette primitiva in C^*.

Soluzione:
Si puó osservare che il coefficiente c_{-1} dello sviluppo di Laurent della funzione é uguale a 0.
Si ha che

$$0 = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz$$

con γ curva chiusa contenuta in C^* e contenente il punto singolare $z_0 = 0$.
Poiché tutti gli integrali lungo curve chiuse di C^* non contenenti $z_0 = 0$ sono nulli per il teorema integrale di Cauchy, la funzione ha integrale nullo lungo tutte le curve chiuse contenute in C^* e questa é condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una primitiva in C^*.