Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Esercitazione per il corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria
a cura di Daniela Giachetti

Esercizio 1.

(i) Si dia la definizione di successione delle somme parziali per una serie di funzioni.

(ii) Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{(\cos 2x)^n}{n}-\frac{(\cos 2x)^{n+1}}{n+1}\Big]$$

si costruisca la successione delle somme parziali, se ne calcoli il limite e si specifichi dove la convergenza é uniforme.

Esercizio 2. Si calcoli $f^{(6)}(0)$, dove

$$f(x)=\log\Big(\frac{1-2x}{3}\Big).$$

Esercizio 3. Si determini una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ che abbia come parte reale la funzione

$$u(x,y)=e^{1-2x}\cos 2y.$$

Esercizio 4.

(i) Definizione di punto singolare per $f(z)$. Classificazione dei punti singolari.

(ii) Data la funzione

$$f(z)=\frac{1}{(z-2i)(z+4i)},$$

svilupparla in serie di Laurent di centro $2i$ nella regione $|z-2i|<6$.

(iii) In quale altra regione del piano la funzione é sviluppabile e qual é il suo sviluppo?

Esercizio 5. Calcolare con i metodi della variabile complessa il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i2x}}{x^3+8i}dx$$

Esercizio 6. Calcolare il seguente integrale di funzione di variabile complessa

$$\int_{\gamma}\frac{e^{z^2}}{\big(3(z-1)+i\big)^2}dz$$

dove γ é il bordo dell'insieme $\mathcal{T}$ definito da

$$\mathcal{T}=\{z=x+iy\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}x^2-2x+1\le y\le 0\}$$

Esercizio 7.

(i) Provare che una funzione olomorfa in un aperto semplicemente connesso ammette primitiva in tale aperto.

(ii) Trovare una primitiva esplicita della funzione $\frac{1}{z}$ nell'insieme $\mathbb{C}-\{x+iy : x\le 0, y=0\}$.

Esercizio 8. Trovare i punti singolari della seguente funzione $f(z)$, classificarli e calcolare il residuo

$$f(z)=\frac{1}{e^z-i\pi}$$

Esercizio 9. Data la serie di Laurent definita da

$$\sum_{n=-\infty}^{3} \frac{1}{(z-1)^n}|n-4|^{n-1}$$

(i) individuare l'insieme di convergenza;

(ii) individuare i punti singolari della sua somma $f(z)$ e classificarli;

(iii) calcolare il residuo nei punti singolari.

Esercizio 10. Calcolare con i metodi della variabile complessa il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-1)(x^2+i)}dx$$

Esercizio 11. Calcolare il seguente integrale di funzione di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{\cos(z-1)}{(z-i)^3}dz$$

dove γ é il bordo dell'insieme $\mathcal{T}$ definito come

$$\mathcal{T} = \{z \in \mathbb{C} : -2 \le Re(z) \le 2,\ Re(z) - 2 \le Im(z) \le Re(z) + 2\}.$$

Disegnare la regione $\mathcal{T}$.

Esercizio 12. Si calcoli

$$\int_\gamma |z-1| sinz dz,$$

dove la curva γ é:

$$\gamma(t) = 1 + 2e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Esercizio 13. Trovare i punti singolari della seguente funzione $f(z)$, classificarli e calcolare il residuo

$$f(z) = \frac{1}{e^{iz} - \frac{\pi}{2}}$$

Esercizio 14. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{(\sin(z+i))^2}{4(z+i)^3}dz$$

dove γ é il bordo dell'insieme $\mathcal{T}$ definito come

$$\mathcal{T} = \{z \in \mathbb{C} : -1 \le Re(z) \le 1, (Re(z))^2 - 2 \le Im(z) \le 0\}$$

Disegnare la regione $\mathcal{T}$.

Esercizio 15. Calcolare, con i metodi della variabile complessa, il seguente integrale (a valor principale)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^3+8i)(x-2)}dx.$$