

**Sapienza - Università di Roma**  
**Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014**

**Esercitazione per il corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (Docente Daniela Giachetti)**  
**a cura di Ida de Bonis**

**Esercizio 1.** Calcolare per  $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma} \frac{z-2}{(z-\frac{1}{2})^n} dz$$

dove  $\gamma = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$ .

**Esercizio 2.** Calcolare al variare di  $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-1)^k} dz$$

dove  $\gamma = \{2e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$ .

**Esercizio 3.** Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-\frac{1}{3})(z-2i)} dz$$

dove  $\gamma = \{3e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$ .

**Esercizio 4.** Si determini una funzione olomorfa in  $\mathbb{C}$  che abbia come parte reale la funzione

$$u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y.$$

**Esercizio 5.** Si determini per quali valori del parametro  $b \in \mathbb{R}$  la funzione

$$u(x, y) = e^{bx} \cos 2y \sin 2y$$

è la parte reale di una funzione olomorfa  $f(z)$ .

**Esercizio 6.** Calcolare la trasformata di Laplace  $F(s)$  di

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon-1} & 0 \leq t \leq \epsilon-1 \\ 0 & t > \epsilon-1 \end{cases}$$

Mostrare che  $\lim_{\epsilon \rightarrow 1} F(s) = 1$ .

**Esercizio 7.** Si calcoli l'ascissa di convergenza  $\sigma[f]$  del segnale

$$f(t) = \begin{cases} e^t & 3 < t \\ 1 & 0 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

**Esercizio 8.**

i) Si esprima come somma di una serie numerica il seguente integrale, giustificando i passaggi

$$\int_0^1 \sin(3x^2) dx;$$

ii) Si calcoli l'integrale precedente con un errore inferiore a  $3 \cdot 10^{-2}$ .

**Esercizio 9.**

i) Si esprima come somma di una serie numerica il seguente integrale, giustificando i passaggi

$$\int_0^1 (e^{-3x^2} - 1) dx;$$

ii) Si calcoli l'integrale precedente con un errore inferiore a  $3 \cdot 10^{-2}$ .

**Esercizio 10.** Si calcoli

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(z - \pi)}{(z - \pi)^2} dz,$$

dove  $\gamma$  é il bordo dell'insieme  $A$  definito da  $A = \{z = x + iy : x^2 - 4x \leq y \leq 2\}$ .

**Esercizio 11.** Si calcoli

$$\int_{\gamma} |z| \cos z dz,$$

dove  $\gamma(t) = 3e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Esercizio 12.** Si classifichino le singolarit  della seguente funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1}.$$

Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{e^z - 1}$$

dove  $\gamma$  é il bordo dell'insieme  $\{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| \leq 2, 1 \leq Im(z) \leq 9\}$ .

**Esercizio 13.** Calcolare, con i metodi della variabile complessa, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{x^2 + 4i} dx.$$

**Esercizio 14.** Provare che  $f(z) = \cos(\frac{1}{z})$  ammette primitiva in  $C^*$ .