

Esercizio 1. Calcolare per $n \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma} \frac{z-2}{(z-\frac{1}{2})^n} dz$$

dove $\gamma = \{e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Esercizio 2. Calcolare al variare di $k \in \mathbb{Z}$

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{(z-1)^k} dz$$

dove $\gamma = \{2e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Esercizio 3. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{1}{(z-\frac{1}{3})(z-2i)} dz$$

dove $\gamma = \{3e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]\}$.

Esercizio 4. Si determini una funzione olomorfa in \mathbb{C} che abbia come parte reale la funzione

$$u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y.$$

Esercizio 5. Si determini per quali valori del parametro $b \in \mathbb{R}$ la funzione

$$u(x, y) = e^{bx} \cos 2y \sin 2y$$

è la parte reale di una funzione olomorfa $f(z)$.

Esercizio 6. Calcolare la trasformata di Laplace $F(s)$ di

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon-1} & 0 \leq t \leq \epsilon-1 \\ 0 & t > \epsilon-1 \end{cases}$$

Mostrare che $\lim_{\epsilon \rightarrow 1} F(s) = 1$.

Esercizio 7. Si calcoli l'ascissa di convergenza $\sigma[f]$ del segnale

$$f(t) = \begin{cases} e^t & 3 < t \\ 1 & 0 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Esercizio 8.

i) Si esprima come somma di una serie numerica il seguente integrale, giustificando i passaggi

$$\int_0^1 \sin(3x^2) dx;$$

ii) Si calcoli l'integrale precedente con un errore inferiore a $3 \cdot 10^{-2}$.

Esercizio 9.

i) Si esprima come somma di una serie numerica il seguente integrale, giustificando i passaggi

$$\int_0^1 (e^{-3x^2} - 1) dx;$$

ii) Si calcoli l'integrale precedente con un errore inferiore a $3 \cdot 10^{-2}$.

Esercizio 10. Si calcoli

$$\int_{\gamma} \frac{\sin(z - \pi)}{(z - \pi)^2} dz,$$

dove γ é il bordo dell'insieme A definito da $A = \{z = x + iy : x^2 - 4x \leq y \leq 2\}$.

Esercizio 11. Si calcoli

$$\int_{\gamma} |z| \cos z dz,$$

dove $\gamma(t) = 3e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Esercizio 12. Si classifichino le singolarit  della seguente funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{e^z - 1}.$$

Si calcoli il seguente integrale

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{e^z - 1}$$

dove γ é il bordo dell'insieme $\{z \in \mathbb{C} : |Re(z)| \leq 2, 1 \leq Im(z) \leq 9\}$.

Esercizio 13. Calcolare, con i metodi della variabile complessa, il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i3x}}{x^2 + 4i} dx.$$

Esercizio 14. Provare che $f(z) = \cos(\frac{1}{z})$ ammette primitiva in C^* .