

**Sapienza - Università di Roma**  
**Facoltà di Ingegneria - A.A. 2012-2013**  
**Analisi Matematica 2 - Settimo foglio di esercizi**  
**a cura di Ida de Bonis**

**Esercizio 1.** Scrivere la serie di Fourier di  $f(x) = \sin^2 x$ .

**Esercizio 2.** Scrivere la serie di Fourier della funzione  $f(x)$  periodica di periodo  $2\pi$  definita da  $f(x) = \pi - |x|$  nell'intervallo  $[-\pi, \pi]$ .

**Esercizio 3.** Scrivere la serie di Fourier della funzione che si ottiene prolungando per periodicità su  $\mathbb{R}$  la funzione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in (0, \pi] \\ -2 & \text{se } x \in (-\pi, 0] \end{cases}$$

**Esercizio 4.** Consideriamo la restrizione della funzione  $x^2$  all'intervallo  $[-\pi, \pi]$  e sia  $f(x)$  il suo prolungamento periodico a  $\mathbb{R}$ . Scrivere la sua serie di Fourier.

**Esercizio 5** (Esame del 10 settembre 2008). i) Si scriva la serie di Fourier della funzione, periodica di periodo  $2\pi$ , definita per  $x \in (-\pi, \pi]$  da

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{se } -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Calcolare esplicitamente i coefficienti.

ii) Si dia un intervallo dove la serie converge totalmente.

**Esercizio 6.** Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  periodica di periodo  $2\pi$ , pari, definita nell'intervallo  $[0, \pi]$  da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{5} \\ -x + \pi & \text{se } \frac{\pi}{5} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

- a) Disegnare il grafico di  $f$  nell'intervallo  $[-3\pi, 3\pi]$ .
- b) Discutere la convergenza puntuale della serie di Fourier associata ad  $f$ .
- c) Determinare il valore della serie di Fourier di  $f$  in  $x = \frac{\pi}{5}$ .
- d) Calcolare il polinomio di Fourier di ordine 1 di  $f$ .

**Esercizio 7.** Sia data la funzione  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  definita nell'intervallo  $[-\pi, \pi)$  da

$$f(x) = x + 1$$

- a) Discutere la convergenza puntuale ed uniforme della serie di Fourier di  $f$ , specificandone il valore a cui essa converge nel punto  $x_0 = \pi$ .
- b) Scrivere la serie di Fourier di  $f$ .

**Esercizio 8.** Data la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } -\pi < x \leq -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{se } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Sia  $f$  il suo prolungamento  $2\pi$ -periodico. Disegnare  $f$ , scrivere la serie di Fourier ad essa associata e calcolarne la somma per  $x = 1$  e  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**Esercizio 9.** i) Disegnare il prolungamento periodico  $f$  della funzione ottenuta quale estensione pari in  $[-\pi, \pi]$  della funzione  $g = g(x)$  definita in  $[0, \pi]$  come segue:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

ii) Scrivere la corrispondente serie di Fourier per  $f$ .

**Esercizio 10.** Scrivere la serie di Fourier associata alla funzione  $2\pi$ -periodica definita da  $f(x) = x$  in  $(-\pi, \pi)$ . Precisare gli insiemi di convergenza puntuale e totale.