ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 20.06.2025 | A

Cognome: VERSIONE **Nome:** PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria O, in alternativa, di un quaderno di appunti formato A4. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Risolvere i seguenti problemi di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$(a)\begin{cases} y''(x) = \dfrac{(y'(x))^3-(y'(x))^2}{y(x)} \\ y(0)=3,\ y'(0)=-\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} y''(x) = \dfrac{(y'(x))^3-(y'(x))^2}{y(x)} \\ y(0)=1,\ y'(0)=0 \end{cases}$$

8 punti

Risposta:

Svolgimento:

EDO autonoma II ordine.

(b) $y(x)\equiv 1$ è l'unica soluzione

(a) Metodo sistematico (vedi sotto per metodo ad hoc):

$$v(y)=y'(x(y)),\quad v'(y)=y''(x(y))\,x'(y)=\frac{y''}{y'}=\frac{y'^2-y'}{y}=\frac{v^2-v}{y}$$

C.I. $v(3)=-1/2$

Separazione di variabili: $\dfrac{v'}{v^2-v}=\dfrac{1}{y}$

$$\int\frac{v'\,dy}{v^2-v}=\int\frac{dv}{v(v-1)}=\int\left(\frac{1}{v-1}-\frac{1}{v}\right)dv=\log\left|\frac{v-1}{v}\right|=\int\frac{1}{y}dy=\log|y|+C$$

$$\Rightarrow\ \frac{v-1}{v}=Cy.\quad v(3)=-1/2 \iff \frac{-3/2}{-1/2}=3C\iff C=1$$

$$\Rightarrow\ \frac{y'-1}{y'}=y \iff y'-1=yy' \iff y'(y-1)=-1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(y-1)^2 = -x + C \,. \qquad y(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(3-1)^2 = C \Leftrightarrow C = 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(y-1)^2 = 2 - x \quad \Leftrightarrow \quad y(x) = 1 + \sqrt{4-2x}$$

$$4 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 2 .$$

Metodo ad-hoc: $\quad \dfrac{y''}{y'^2 - y'} = \dfrac{y'}{y} \; ; \quad \displaystyle\int \frac{y'' \, dx}{y'^2 - y'} = \int \frac{y'}{y} \, dx$

$$\log \left| \frac{y'-1}{y'} \right| = \log|y| + C$$

e prosegui come sopra.

(2) Per $a \in \mathbb{R}$, sia $f(x, y) = 4ax^2 + 2axy + y^2$.

(a) Determinare i valori del parametro a tali che $(0, 0)$ è un punto di estremo locale di f in $\mathbb{R}^2$.

(b) Per $a = 1$, determinare gli estremi assoluti di f in $K = \{(x, y) : x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1\}$.

8 punti

Risposta: (a) $a \in [0,4]$

(b) $\max_K f = 6$; $\min_K f = 0$

Svolgimento: $\nabla f(0,0) = (0,0)$ è punto critico.

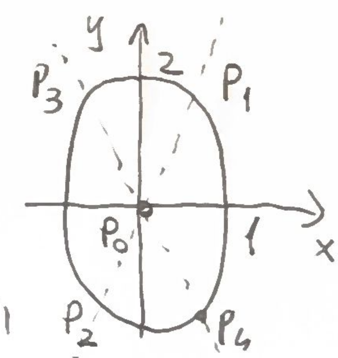
(a) $D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 8a & 2a \\ 2a & 2 \end{pmatrix}$ $\det D^2 f(0,0) = 16a - 4a^2 = 4a(4-a)$

$> 0 \iff a \in (0,4)$

$a = 0$: $f(x,y) = y^2 \geq 0 = f(0,0)$ $\forall (x,y)$

$a = 4$: $f(x,y) = 16x^2 + 8axy + y^2 = (4x+y)^2 \geq 0 = f(0,0)$ $\forall (x,y)$

(b) Candidati Punti critici interni : $(0,0) = P_0$



Punti di non differenziabilità : $\emptyset$

Punti critici vincolati : metodo dei moltiplicatori

(vedi sotto per metodo di sostituzione)

$\begin{cases} f_x = 8x + 2y = 2\lambda x \\ f_y = 2x + 2y = \frac{1}{2}\lambda y \\ x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1 \end{cases}$

$x = 0$ non è soluzione
$y = 0$ non è soluzione
moltiplico la I per y, la II per $4x$

$\cancel{8xy} + 2y^2 = 8x^2 + \cancel{8xy} \iff (2x+y)(2x-y) = 0$

$y = 2x \overset{III}{\iff} x^2 + x^2 = 1 \iff x = \pm 1/\sqrt{2}$ $P_1, P_2 = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

$y = -2x \iff x^2 + x^2 = 1 \iff x = \pm 1/\sqrt{2}$ $P_3, P_4 = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

Confrontando i candidati

$$f(P_0) = 0 = \min_K f$$

$$f(P_1) = f(P_2) = 2 + 2 + 2 = 6 = \max_K f$$

$$f(P_3) = f(P_4) = 2 - 2 + 2 = 2$$

Nota: col metodo di sostituzione $\gamma(t) = (\cos t, 2\sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

$$f|_{\partial K} = g(t) = 4\cos^2 t + 4\cos t \sin t + 4\sin^2 t$$

$$g'(t) = -\cancel{8\sin t \cos t} + 4\cos^2 t - 4\sin^2 t + \cancel{8\sin t \cos t}$$

$$= 0 \iff (\cos t + \sin t)(\cos t - \sin t) = 0$$

$$\iff t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

e si ottengono gli stessi candidati

(3) Sia

$$E = \left\{(0, y, z) :\ z \geq 0,\ 0 \leq y \leq 2\sqrt{1 - \frac{z}{3}}\right\}.$$

Sia Ω il solido ottenuto ruotando E di un angolo giro intorno all'asse z.

(a) Determinare il volume di Ω;

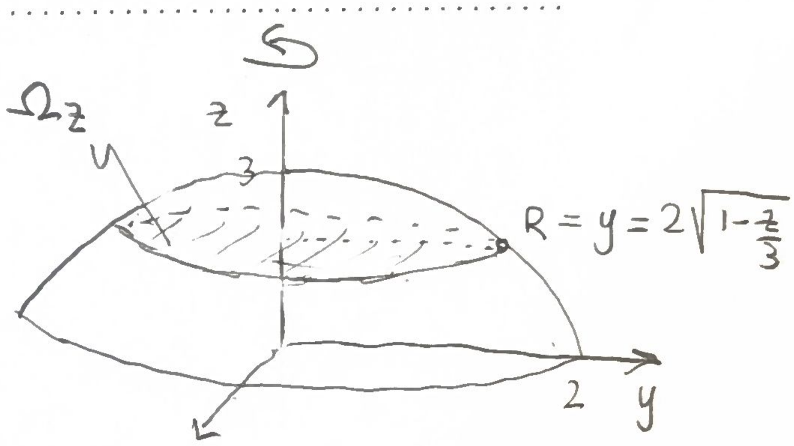
(b) calcolare il flusso di $\mathbf{V} = (y, y^3, z)$ uscente da Ω.

8 punti

Risposta: (a) 6π

(b) 18π

Svolgimento:



$1 - \frac{z}{3} \geq 0 \iff z \leq 3.$

Per strati:

(a) $|\Omega|_3 = \int_0^3 |\Omega_z|_2\, dz = \int_0^3 \pi \cdot 4\left(1 - \frac{z}{3}\right) dz$

$= -\frac{3}{2} \cdot 4\pi \left(1 - \frac{z}{3}\right)^2 = 6\pi$

(b) $\operatorname{div} \underline{V} = 3y^2 + 1$

$\iint_{\partial\Omega} \underline{V} \cdot \underline{N}^e\, dS = \iiint_\Omega \operatorname{div} \underline{V} = \iiint_\Omega (3y^2 + 1) = 6\pi + 3\iiint_\Omega y^2$

$\iiint_\Omega y^2 = \int_0^3 \iint_{\Omega_z} y^2 \overset{\text{coord. pol.}}{=} \int_0^3 \int_0^{2\sqrt{1-z/3}} \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2\varphi\, d\varphi\, d\rho\, dz$

$= \pi \int_0^3 \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{2\sqrt{1-z/3}} dz = \pi \int_0^3 4\left(1 - \frac{z}{3}\right)^2 dz$

$= -4\pi \left(1 - \frac{z}{3}\right)^3 \Big|_0^3 = 4\pi$