



IN STAMPATELLO

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Durante i primi 90 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria O, in alternativa, di un quaderno di appunti formato A4. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. E' possibile utilizzare il retro dei fogli. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo.

(1) Calcolare

$$\iint_{\Omega} \frac{1}{x+y} dx dy, \quad \Omega = \left\{ (x, y) : 0 < \frac{x}{3} \leq y \leq 3x, 1-x \leq y \leq 3-x \right\}.$$

8 punti

Risposta:

1

Svolgimento:

Mediante cambio di variabile:

$$\psi^{-1} = \begin{cases} u = x+y \\ v = y/x \end{cases}$$

$$\psi^{-1}(\Omega) = S = \left\{ (u, v) : 1 \leq u \leq 3, \frac{1}{3} \leq v \leq 3 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = x(1+v) \\ y = vx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{1+v} \\ y = \frac{uv}{1+v} = u \left(1 - \frac{1}{1+v}\right) \end{cases} =: \psi(u, v)$$

$$J_{\psi}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+v} & -\frac{u}{(1+v)^2} \\ \frac{v}{1+v} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{pmatrix}$$

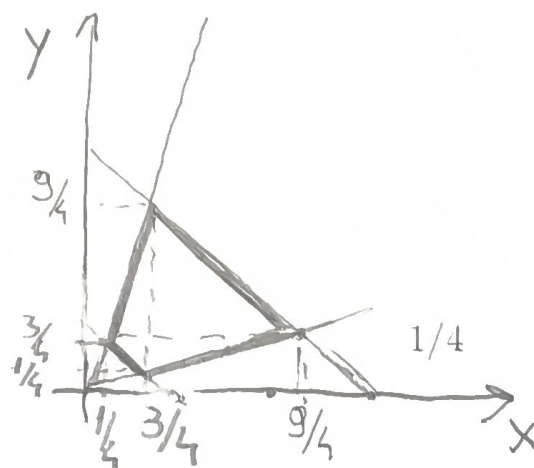
$$\det J = \frac{u}{(1+v)^3} + \frac{uv}{(1+v)^3} = \frac{u}{(1+v)^2}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{1}{x+y} dx dy &= \iint_S \frac{1}{u} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} du dv = \int_{1/3}^3 \left(\int_1^3 \frac{1}{(1+v)^2} du \right) dv \\ &= 2 \int_{1/3}^3 \frac{1}{(1+v)^2} dv = -2 \left[\frac{1}{1+v} \right]_{1/3}^3 = 2 \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) = 1 \end{aligned}$$

- Altrimenti si disegna il dominio e si integra su due triangoli: per esempio

$$\int_{1/4}^{3/4} \left(\int_{1-x}^{3x} \frac{1}{x+y} dy \right) dx + \int_{3/4}^{9/4} \left(\int_{x/3}^{3-x} \frac{1}{x+y} dy \right) dx$$

- Infine si può anche effettuare il cambio di variabile $u = x+y$, $v = x-y$.



(2) Sia $f(x, y) = (x + y)^2(x - y)$.

a) Determinare i punti critici di f in $\mathbb{R}^2$.

b) Stabilire la natura di almeno due punti critici.

c) Determinare gli estremi assoluti di f in $K = \{(x, y) : |x| \leq y \leq 1\}$.

8 punti

Risposta: a) $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ b) vedi risposta (R)

c) $\max_K f = 0$, $\min_K f = -\frac{32}{27} = f\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

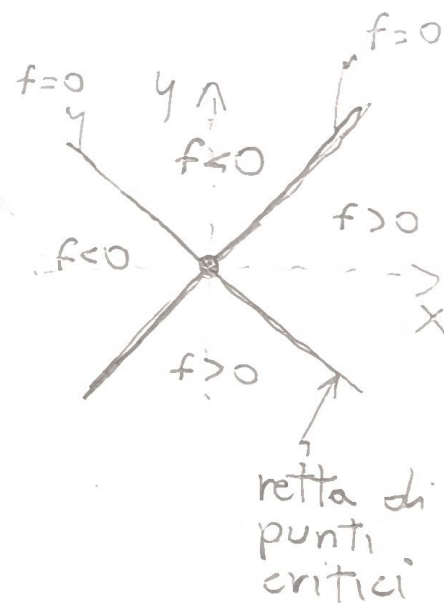
a) Svolgimento: $f(x, y) = (x^2 - y^2)(x + y) = x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + 2xy - y^2 \\ f_y = x^2 - 2xy - 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 = 0 \\ 4x^2 - 4y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

addizione

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 = 0 \\ x = y \end{cases} \vee \begin{cases} 0 = 0 \\ x = -y \end{cases} \Leftrightarrow (x, -x), x \in \mathbb{R}$$

b) Si ha $\det D^2 f(x, -x) = 0$, quindi uso la def.
Dai segni in figura si deduce che:



(R) $\begin{cases} (0,0) \text{ non } \bar{e} \text{ di max n\'e di min} \\ (x, -x) \bar{e} \text{ un punto di max locale se } x < 0 \\ (x, -x) \text{ " " min " " } x > 0 \end{cases}$

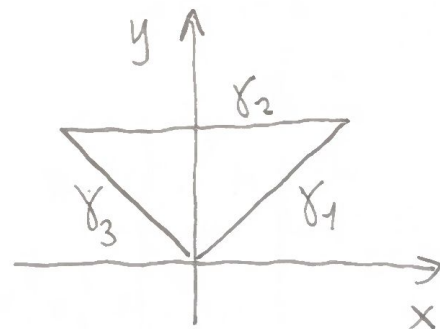
c) $f|_{\gamma_1} \equiv 0$, $f|_{\gamma_3} \equiv 0$ tutti candidati

$$f|_{\gamma_2} = x^3 + x^2 - x - 1 = g(x)$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

$$\Delta = 4 + 12 \quad x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{+6} = \left\langle \frac{-1}{1/3} \right\rangle$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1 < 0 \\ = -\frac{32}{27}$$



(3)

- a) Al variare del parametro $B \in \mathbb{R}$, determinare le soluzioni stazionarie della seguente EDO:

$$y'(x) = By(x) - (y(x))^2$$

- b) Per $B = 2$, determinare l'unica soluzione tale che $y(0) = 3$, specificandone anche l'intervallo massimale di esistenza.

8 punti

Risposta: a) $y(x) \equiv 0$, $y(x) \equiv B$

$$b) y(x) = \frac{6e^{2x}}{3e^{2x} - 1}, \quad I = \left(-\frac{1}{2} \log 3, +\infty\right)$$

Svolgimento:

$$a) By - y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0 \vee y = B$$

$$b) y' = 2y - y^2; \quad \int \frac{y'}{y(2-y)} dx = \int 1 dx; \quad \int \frac{dy}{y(2-y)} = x + C$$

$$\frac{1}{y(2-y)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2-y} \right) \Rightarrow \int \frac{dy}{y(2-y)} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{y}{2-y} \right)$$

$$\log \left(\frac{y}{2-y} \right) = 2x + C \Leftrightarrow \frac{y}{2-y} = C e^{2x}$$

$$y(0) = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{-1} = C \Leftrightarrow C = -3$$

$$\Leftrightarrow y = 3e^{2x}(y-2) \quad y(3e^{2x}-1) = 6e^{2x} \Leftrightarrow y = \frac{6e^{2x}}{3e^{2x}-1}$$

$$3e^{2x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} = 1/3 \Leftrightarrow 2x = \log(1/3) \\ x = -\frac{1}{2} \log 3$$

(C denota una generica costante che cambia durante i passaggi)

In alternativa si può usare la sostituzione $v(x) = \frac{1}{y(x)}$ per ricondursi a una EDO lineare non omogenea.