CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

PROGRAMMA DEL CORSO DI ANALISI MATEMATICA 2

A.A. 2021-2022

LORENZO GIACOMELLI E SANTE CENTURIONI

Tutti gli argomenti si intendono comprensivi di definizioni, proprietà, enunciati, esempi, contro-esempi, applicazioni e, per le parti sottolineate, dimostrazioni.

Testi consigliati: Bertsch, Dal Passo, Giacomelli - Analisi Matematica (seconda edizione) - McGraw-Hill, 2011.

Il programma non viene svolto nell'ordine in cui è stilato. Per informazioni sull'ordine si veda il calendario indicativo delle lezioni.

FUNZIONI DI PIU' VARIABILI REALI A VALORI REALI

Introduzione. R^N. Punti e vettori (applicati) in R^N, rappresentazioni, operazioni. Modulo e distanza (euclidea). Coordinate polari.

Funzioni da R^N in R: dominio naturale, immagine, grafico. Insiemi di livello. Simmetria di rotazione rispetto a un asse. Simmetrie pari o dispari rispetto a un asse (in R^2). Intorni sferici, punti di accumulazione. (R^N)^*. Intorni di infinito. Definizione di limite. Continuità. Proprietà elementari del limite e delle funzioni continue. Cenni di topologia in R^N: punti interni, punti esterni, punti di frontiera, insiemi aperti, insiemi chiusi, insiemi limitati, insiemi connessi (per archi). Caratterizzazione degli insiemi chiusi. Insiemi compatti. Teorema di Weierstrass. Teorema degli zeri e dei valori intermedi.

Derivate direzionali. Derivate parziali. Gradiente. Funzioni derivabili. Proprieta` elementari delle derivate parziali e del gradiente. Le funzioni derivabili non sono continue se N>1. Funzioni differenziabili. Piano tangente al grafico di una funzione da R^2 in R. Continuità e derivabilità delle funzioni differenziabili. Calcolo delle derivate direzionali di funzioni differenziabili. Proprietà elementari delle funzioni differenziabili. Il teorema del differenziale totale. Il gradiente come direzione di massima crescita. Regola della catena per funzioni composte con curve, 2. Punti critici (stazionari). Teorema di Fermat. Candidati a punti di estremo locale di una funzione. Integrali dipendenti da parametri: scambio tra limite e integrale, scambio tra derivata e integrale. Derivate direzionali e parziali di ordine superiore. Teorema di Schwarz. Insiemi convessi. Funzioni convesse. Criterio differenziale di convessità.

Matrice Hessiana. Il Teorema di Peano al secondo ordine. Matrici (semi-)definite positive (negative), indefinite e loro autovalori. Caratterizzazione delle matrici (semi-)definite positive (negative) o indefinite in R^n e in R^2. Natura dei punti critici. Studio dei massimi e minimi liberi (ovvero, natura dei punti stazionari interni) per funzioni di due variabili (tramite lo studio della matrice hessiana o tramite la definizione). Determinazione degli estremi assoluti di funzioni continue su insiemi compatti: metodo ad-hoc.

Punto regolare di un insieme di livello. Il teorema delle funzioni implicite (o di Dini) in R^2 (enunciato qualitativo). Il gradiente è ortogonale all'insieme di livello in un suo punto regolare. Retta tangente a un insieme di livello in un suo punto regolare. Estremi vincolati in R^2. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in R^2. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Determinazione degli estremi assoluti vincolati in R^2.

Determinazione degli estremi assoluti di funzioni continue su insiemi compatti di R^2: metodo dei moltiplicatori.

Il teorema delle funzioni implicite (o di Dini) in R^3 con un vincolo (enunciato qualitativo). Il gradiente è ortogonale all'insieme di livello in un suo punto regolare. Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange in R^3 con un vincolo. Il teorema di Dini in R^3 con due vincoli (enunciato qualitativo). Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange in R^3 con due vincoli. Estremi vincolati di funzioni di tre variabili con uno o due vincoli.

Funzioni di più variabili a valori vettoriali. Differenziabilità e differenziale. Regola della catena. Cenno al metodo indiretto nel calcolo delle variazioni.

CURVE - INTEGRALI CURVILINEI DI FUNZIONI

Curva. Rappresentazione di una curva. Sostegno. Orientazione di una curva. Curva piana. Curva semplice. Curva chiusa. Curva cartesiana. Curva polare. Vettore velocita` e sua rappresentazione. Velocita` scalare. Curva regolare. Vettore e versore tangente a una curva. Retta tangente al sostegno di una curva. Vettore accelerazione. Accelerazione scalare. Lunghezza di una curva. Curva rettificabile. Formula integrale per il calcolo della lunghezza. Ascissa curvilinea. Regole della catena per funzioni composte con curve, 1. Integrale curvilineo di una funzione (di prima specie). Curve equivalenti (con lo stesso verso, con verso opposto). La lunghezza è invariante per curve equivalenti. Densità lineare e massa di un filo curvilineo. L'integrale curvilineo di I specie è invariante per curve equivalenti. Proprietà elementari dell'integrale curvilineo di I specie.

CAMPI VETTORIALI - INTEGRALI CURVILINEI DI CAMPI VETTORIALI

Campi vettoriali: proprietà di base, rappresentazione grafica. Forme differenziali e lavoro di un campo vettoriale. Integrale di un campo vettoriale lungo una curva (o integrale curvilineo di II specie) e lavoro di un campo vettoriale. Proprietà. Invarianza per curve equivalenti con lo stesso verso. Campi vettoriali conservativi. L'integrale curvilineo di un campo conservativo dipende solo dagli estremi del cammino. Caratterizzazione dei campi conservativi. Determinazione della funzione potenziale. Calcolo del lavoro di un campo vettoriale conservativo. Rotore di un campo vettoriale in R^2 e in R^3. Campi vettoriali irrotazionali. Forme differenziali esatte/chiuse e campi vettoriali conservativi/irrotazionali. I campi vettoriali di classe C^1 sono irrotazionali, ma il viceversa è falso: il campo magnetico generato da un filo elettrico. Curve omotope. Insieme semplicemente connesso. I campi irrotazionali su insiemi semplicemente connessi sono conservativi.

INTEGRALI MULTIPLI

Integrali doppi su rettangoli. Proprietà elementari. Teorema della media integrale. Le funzioni continue sono integrabili. Formule di riduzione sui rettangoli. Insiemi misurabili del piano. Insiemi non misurabili. Classi di insiemi misurabili. Integrali doppi e integrabilità su insiemi misurabili. Domini normali in R^2. Area di un dominio normale. Formule di riduzione sui domini normali. Utilizzo di simmetrie nel calcolo di integrali doppi. Baricentro o centro d'area di un insieme nel piano. Il baricentro come punto di minima distanza quadratica media. Momenti secondi rispetto a un asse nel piano. Massa e centro di massa di una lamina non omogenea. Proprietà dell'integrale, teorema della media integrale, classi di funzioni integrabili. Domini ammissibili (ovvero scomponibili in domini normali). Baricentro di baricentri. L'elemento d'area in coordinate polari. Passaggio in coordinate polari negli integrali doppi. L'elemento d'area nei cambi di coordinate lineari. Cambiamento di variabili negli integrali doppi: il caso generale. Matrice jacobiana, determinante jacobiano, interpretazione geometrica. Coordinate ellittiche. Altri cambi di coordinate. –

Integrali tripli. Proprietà. Teorema della media integrale. Volume, baricentro, massa, centro di massa e momenti secondi di un solido. Baricentro di baricentri. Integrazione per fili. Integrazione per strati. Solidi di rotazione. Volume di solidi di rotazione. Cambiamenti di variabile negli integrali tripli. Coordinate cilindriche. Coordinate sferiche. Coordinate ellissoidali.

SUPERFICI – INTEGRALI SU SUPERFICI

Superfici (elementari). Parametrizzazione. Punti interni e bordo di una superficie. Regola della catena per superfici composte con curve. Punti regolari. Identificazione del piano tangente e dei versori normali a una superficie in un punto regolare. Superfici regolari e regolari a tratti. Superfici cartesiane. Elemento d'area. Area di una superficie. Integrale di funzione su una superficie. Superfici composte. Superfici di rotazione. Area di superfici di rotazione. Integrali di funzioni su superfici di rotazione. Superfici orientabili. Il nastro di Moebius.

I TEOREMI DELLA DIVERGENZA E DEL ROTORE

Prima relazione tra integrali curvilinei di I specie e integrali curvilinei di II specie. Orientazione positiva della frontiera di domini semplici. Formule di Green su domini semplici rispetto a entrambi gli assi di R^2. Domini regolari a tratti. Orientazione positiva della frontiera di domini regolari a tratti. Formule di Green su domini di R^2 regolari a tratti (dimostrazione per un prototipo). Area di un dominio regolare a tratti. Versore normale esterno alla frontiera di un dominio regolare a tratti. Flusso di un campo vettoriale piano uscente da un sottoinsieme di R^2. Seconda relazione tra integrali curvilinei di I specie e integrali curvilinei di II specie. Divergenza di un campo vettoriale. Teorema della divergenza in R^2. La divergenza come densità di flusso uscente per unità di area. Formula di integrazione per parti in R^2. Operatore di Laplace. Teorema del rotore in R^2: dimostrazione diretta e indiretta. Il rotore (scalar e 3) come densità di circuitazione per unità di area.

Flusso di campo vettoriale attraverso una superficie orientabile, Dominio regolare di R^3. Normale esterna a un dominio regolare. Flusso di un campo vettoriale uscente da un dominio regolare. Teorema della divergenza in R^3 (dim. per domini normali rispetto a tutti i piani coordinati). La divergenza come densità di flusso uscente per unità di volume. Formule di integrazione per parti in R^3. Equazione di continuità (conservazione della massa) per fluidi comprimibili. Orientazione del bordo di una superficie orientabile. Circuitazione di un campo vettoriale lungo una curva chiusa. Teorema del rotore in R^3. Il rotore (scalar una direzione) come densità di circuitazione (intorno a un asse) per unità di area.

Identità per operatori differenziali (gradiente, divergenza, rotore e loro composizioni).

SERIE DI FOURIER

Funzioni regolari a tratti. Polinomi trigonometrici. Proiezione ortogonale di un vettore su un sottospazio. Determinazione dei coefficienti di Fourier di funzioni 2π-periodiche (dim. per funzioni continue). Coefficienti di Fourier e simmetrie. Serie di Fourier. Convergenza puntuale e in media quadratica di serie di Fourier per funzioni regolari a tratti. Il segnale a dente di sega. Il segnale a dente di sega in $\pi/2$. Variazione totale di una funzione. Stima di decadimento dei coefficienti di Fourier di una funzione regolare a tratti. Il fenomeno di Gibbs. Serie di Fourier di funzioni L-periodiche. Equazioni differenziali con condizioni al contorno. L'equazione delle onde: soluzione in serie del problema della corda vibrante.

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE (EDO)

EDO: introduzione, primi esempi, problemi tipici. Classificazione delle EDO: forma implicita ed esplicita, ordine, linearità. Definizione di soluzione ed integrale generale di una EDO. EDO lineari del prim'ordine omogenee: metodo di separazione delle variabili. EDO lineari del prim'ordine omogenee: integrale generale.

Problema di Cauchy. EDO lineari del second’ordine omogenee: combinazioni lineari di soluzioni sono soluzioni. Soluzioni linearmente indipendenti. EDO lineari del second’ordine omogenee a coefficienti costanti: integrale generale. Problema di Cauchy. EDO lineari del second’ordine omogenee a coefficienti costanti: problemi al contorno. EDO lineari di ordine superiore al secondo, omogenee a coefficienti costanti. EDO lineari non omogenee: integrale generale. EDO lineari non omogenee: metodo di variazione delle costanti, metodo di somiglianza. EDO del prim’ordine a variabili separabili. Problema di Cauchy, esempi e metodo di risoluzione generale. Teorema di esistenza, unicità ed intervallo massimale per il problema di Cauchy. EDO del prim’ordine a variabili separabili: controesempi all’unicità per il problema di Cauchy. Metodi risolutivi: riduzione d’ordine, metodo di D’Alembert. Cambiamenti di variabile: EDO lineari del second’ordine in forma di Eulero, EDO del second’ordine autonome in forma esplicita, altri cambiamenti di variabile.