Cognome e nome: .... **Matricola:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, svolgere correttamente 3 esercizi e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.

VERSIONE PROVVISORIA – SI PREGA DI SEGNALARE EVENTUALI ERRORI

(1) Determinare (purché esistano) i punti critici della seguente funzione e stabilirne la natura:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x(4 - x^2 - y^2).$$

Facoltativo: stabilire la natura di uno dei punti critici senza utilizzare la matrice hessiana.

.... 6 punti

Risposta:

$(0, \pm 2)$ punti di sella, $(2/\sqrt{3}, 0)$ punto di massimo locale, $(-2/\sqrt{3}, 0)$ punto di minimo locale.

....

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned} f_x &= 4 - 3x^2 - y^2 = 0 \\ f_y &= -2xy = 0 \end{aligned}$$

se e solo se

$$\begin{cases} 4 - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} 4 - 3x^2 = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Quindi i punti critici sono

$$P_1 = (0,2),\ P_2 = (0,-2),\ P_3 = (2/\sqrt{3}, 0),\ P_4 = (-2/\sqrt{3}, 0).$$

Si ha

$$\det D^2 f(x,y) = \det \begin{pmatrix} -6x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix} = 12x^2 - 4y^2.$$

Quindi P_1 e P_2 sono punti di sella, P_3 è un punto di massimo locale e P_4 è un punto di minimo locale.

Si ha $f(0,2) = 0$ e

$$f(x,2) = -x^3 \gtreqless 0 \iff x \lesseqgtr 0,$$

perciò $(0,2)$ è un punto di sella.

(2) Determinare un insieme connesso $E \subset \mathbb{R}^2$ in cui la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x(3x-y)}\mathrm{d}x + \frac{1}{3x-y}\mathrm{d}y$$

sia esatta; in E determinare una funzione potenziale (ovvero una primitiva) di ω.

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, y > 3x\}, \quad U(x,y) = -\log\left|\frac{x}{3x-y}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

. . . .

Svolgimento:

Il dominio della forma è

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0, y \neq 3x\}.$$

Verifichiamo che ω è esatta su ciascuna componente connessa di D determinandone una funzione potenziale:

$$U(x,y) = \int \frac{1}{3x-y}\mathrm{d}y = -\log|3x-y| + C(x),$$

da cui

$$\partial_x U(x,y) = -\frac{3}{3x-y} + C'(x) \overset{!}{=} -\frac{y}{x(3x-y)}$$

se e solo se

$$C'(x) = \frac{3}{3x-y} - \frac{y}{x(3x-y)} = \frac{3x-y}{x(3x-y)} = \frac{1}{x}.$$

Perciò $C(x) = \log|x| + C$, ovvero

$$U(x,y) = -\log\left|\frac{x}{3x-y}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si può quindi scegliere qualunque componente connessa di D, per esempio

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, y > 3x\}.$$

(3) Determinare l'area della porzione di superficie cilindrica definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y + 2)^2 = 4,\ 0 \le z \le x\}.$$

. . . . $\boxed{\text{8 punti}}$

Risposta:

8

. . . .

Svolgimento:

Si parametrizza S mediante coordinate cilindriche:

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma(\varphi, z) = (2\cos\varphi, -2 + 2\sin\varphi, z).$$

Per determinare D si nota che

$$0 \le z \le x \iff 0 \le z \le 2\cos\varphi,$$

quindi

$$D = \{(\varphi, z) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R} :\ 0 \le z \le 2\cos\varphi\}.$$

Poiché

$$\sigma_\varphi = (-2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0) \quad \text{e} \quad \sigma_z = (0, 0, 1),$$

si ha

$$\|\sigma_\varphi \wedge \sigma_z\| = \|(2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0)\| = 2.$$

Quindi

$$\iint_S \mathrm{d}S = \iint_D 2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z.$$

Si riscrive D come dominio semplice osservando che

$$0 \le 2\cos\varphi \iff \varphi \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Pertanto

$$\iint_S \mathrm{d}S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\varphi} 2\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\mathrm{d}\varphi = 8.$$

(4) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio di Green di volume 3 e baricentro $(0,1,0)$, e sia $\mathbf{V}$ il seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{V}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{V}(x,y,z) = \left(3x^2, y^2, 5z^2 + z\right).$$

Calcolare il flusso di $\mathbf{V}$ uscente da Ω.

. . . . 6 punti

Risposta:

9

. . . .

Svolgimento:

Applicando il teorema della divergenza, si ottiene

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}_e \mathrm{d}S &= \iiint_{\Omega} (6x + 2y + 10z + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= |\Omega| \left(\frac{6}{|\Omega|} \iiint_{\Omega} x\mathrm{d}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{2}{|\Omega|} \iiint_{\Omega} y\mathrm{d}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{10}{|\Omega|} \iiint_{\Omega} z\mathrm{d}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 1 \right) \\
&= 3\,(2+1) = 9.
\end{aligned}$$

(5) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificandone l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} x\,y'(x) &= y(x)\left(1 + y(x)e^{x/y(x)}\right) \\ y(1) = -\frac{1}{\log 4} \end{cases}$$

(si suggerisce di ricondursi a un'equazione a variabili separabili mediante un opportuno cambio di variabile).

. . . . 8 punti

Risposta:

$$y(x) = -\frac{x}{\log(3+x)}, \quad x \in (-2, +\infty).$$

. . . .

Svolgimento:

Ponendo ad esempio

$$u(x) := \frac{x}{y(x)},$$

si ottiene

$$u' = \frac{1}{y} - \frac{xy'}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y}(1 + ye^u) = -e^u.$$

Quindi

$$(e^{-u})' = -e^{-u}u' = 1,$$

ovvero

$$e^{-u(x)} = C + x.$$

Si ha $u(1) = 1/y(1) = -\log 4$, quindi

$$e^{-u(1)} = C + 1 \overset{!}{=} 4 \iff C = 3.$$

Pertanto

$$-u(x) = \log(3+x) \iff y(x) = \frac{x}{u(x)} = -\frac{x}{\log(3+x)}, \quad x \in (-2, +\infty).$$