VERSIONE PROVVISORIA – SI PREGA DI SEGNALARE EVENTUALI ERRORI

(*) Determinare (purché esistano) i punti critici della seguente funzione e stabilirne la natura:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x(4 - x^2 - y^2).$$

Facoltativo: stabilire la natura di uno dei punti critici senza utilizzare la matrice hessiana.

. . . . 6 punti

Risposta: $(0, \pm 2)$ punti di sella, $(2/\sqrt{3}, 0)$ punto di massimo locale, $(-2/\sqrt{3}, 0)$ punto di minimo locale.

. . . .

Svolgimento. Si ha

$$\begin{array}{l} f_x = 4 - 3x^2 - y^2 = 0 \\ f_y = -2xy = 0 \end{array}$$

se e solo se

$$\begin{array}{l} 4 - y^2 = 0 \\ x = 0 \end{array} \quad \text{oppure} \quad \begin{array}{l} 4 - 3x^2 = 0 \\ y = 0. \end{array}$$

Quindi i punti critici sono

$$P_1 = (0,2),\ P_2 = (0,-2),\ P_3 = (2/\sqrt{3}, 0),\ P_4 = (-2/\sqrt{3}, 0).$$

Si ha

$$\det D^2 f(x,y) = \det \begin{pmatrix} -6x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix} = 12x^2 - 4y^2.$$

Quindi P_1 e P_2 sono punti di sella, P_3 è un punto di massimo locale e P_4 è un punto di minimo locale.

Si ha $f(0,2) = 0$ e

$$f(x,2) = -x^3 \gtreqless 0 \iff x \lesseqgtr 0,$$

perciò $(0,2)$ è un punto di sella.

(*) Determinare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \log(x^2 + y^2) - x^2 - y$$

e stabilirne la natura.

. . . . 7 punti

Risposta: $(0,2)$ punto di massimo locale, $(\pm\sqrt{3}/2, 1/2)$ punti di sella.

. . . .

Svolgimento. Si ha

$$\begin{cases} f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} - 2x = 2x\left(\frac{1}{x^2+y^2} - 1\right) = 0 \\ f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

se e solo se

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{2}{y} - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Perciò i punti critici sono $(0,2)$, $(\sqrt{3}2,1/2)$ e $(-\sqrt{3}2,1/2)$. Si ha

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} - 2 & \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Valutandolo nei punti critici si ottiene la risposta.

(*) Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = 16y^2 + x - \frac{1}{4}x^4 y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

. . . .

Svolgimento:

(*) Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}y, \qquad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

. . . . 7 punti

Risposta: $\max f = 3/8$, $\min f = -3/4$.

. . . .

Svolgimento. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right) = \mathbf{0} \iff (x,y) = (0,1),$$

quindi f non ha punti critici interni. Perciò il massimo e il minimo (che esistono per il Teorema di Weierstrass) sono assunti su $\partial\Omega$. Posto

$$L(x,y,\lambda) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}y + \lambda(1 - x^2 - y^2),$$

si ha

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \left(\frac{x}{2} - 2\lambda x, -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} - 2\lambda y, 1 - x^2 - y^2\right) = \mathbf{0}$$

se e solo se

$$x = 0, \ y = \pm 1 \quad \text{oppure} \quad (\lambda = 1/4,)\ y = 1/2, \ x = \pm\sqrt{3}/2.$$

Si ha

$$f(0,1) = 1/4, \ f(0,-1) = -3/4, \ f(\pm\sqrt{3}/2, 1/2) = 3/8,$$

da cui segue la risposta.

Per studiare f su $\partial\Omega$ si può in alternativa considerare la funzione

$$g(y) = f(1-y^2, y) = \frac{1}{4}(1 - 2y^2 + 2y), \quad y \in [-1,1]$$

e osservare che g ha massimo assoluto in $y = 1/2$ e minimo assoluto in $y = -1$, oppure passare in coordinate polari.

(*) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^5 - x^2 y + 1.$$

Verificare che il Teorema delle funzioni implicite (o di Dini) è applicabile in un intorno del punto $(1, 0)$ e determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x = 1$ della funzione $x \mapsto g(x)$ definita implicitamente da

$$f(x, y) = f(1, 0).$$

. . . . 7 punti

Risposta: $5(x - 1)$.

. . . .

Svolgimento. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (5x^4 - 2xy, -x^2), \quad \nabla f(1, 0) = (5, -1),$$

quindi il teorema di Dini è applicabile rispetto a entrambe le variabili. Segue dal Teorema di Dini che

$$g'(x) = -\frac{5x^4 - 2xg(x)}{-x^2} = 5x^2 - \frac{2g(x)}{x}, \quad g''(x) = 10x - \frac{2g'(x)}{x} + \frac{g(x)}{x^2},$$

quindi

$$g(1) = 0, \; g'(1) = 5, \; g''(1) = 10 - 10 = 0$$

da cui segue la risposta.

Si noti che in questo caso g può anche essere ricavata esplicitamente:

$$f(x, y) = f(1, 0) \iff x^5 - x^2 y + 1 = 2 \iff y = \frac{x^5 - 1}{x^2} = x^3 - \frac{1}{x^2} =: g(x),$$

da cui

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^3}, \; g''(x) = 6x - \frac{6}{x^4},$$

e valutando in $x = 1$ si riottiene la risposta.

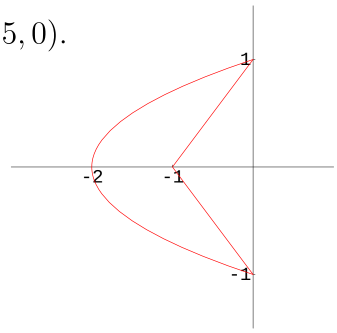
(*) Disegnare l'insieme

$$\Omega = \left\{(x, y) : \; 2(y^2 - 1) \le x \le |y| - 1\right\}$$

e calcolarne il baricentro.

. . . . 7 punti

Risposta: $(x_b, y_b) = (-27/25, 0)$.



. . . .

Svolgimento. La rappresentazione di Ω segue dal grafico delle due funzioni elementari $y \mapsto 2(y^2-1)$ e $y \mapsto |y|-1$. Per simmetria, $y_b = 0$. Si ha

$$|\Omega| = 2\int_0^1 \int_{2(y^2-1)}^{y-1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_0^1 (1+y-2y^2)\mathrm{d}y = 2(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}) = \frac{5}{3},$$

da cui

$$\begin{aligned} x_b &= \frac{6}{5}\int_0^1 \int_{2(y^2-1)}^{y-1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{5}\int_0^1 ((y-1)^2 - 4(y^2-1)^2)\mathrm{d}y \\ &= \frac{3}{5}\int_0^1 (-2y-4y^4+9y^2-3)\mathrm{d}y = \frac{3}{5}\left(-1-\frac{4}{5}+3-3\right) = -\frac{27}{25}. \end{aligned}$$

(*) Calcolare

$$\iint_\Omega xy \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le x, 1 \le x^2+y^2 \le 4\right\}.$$

.... 7 punti

Risposta: 15/16.

....

Svolgimento:

(*) Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t, t^2/2)$. Calcolare

$$\int_\gamma xy\mathrm{d}s.$$

.... 7 punti

Risposta: $(1+\sqrt{2})/15$.

....

Svolgimento:

(*) Determinare un insieme connesso $E \subset \mathbb{R}^2$ in cui la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x(3x-y)}\mathrm{d}x + \frac{1}{3x-y}\mathrm{d}y$$

sia esatta; in E determinare una funzione potenziale (ovvero una primitiva) di ω.

.... 7 punti

Risposta:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, y > 3x\}, \quad U(x,y) = -\log\left|\frac{x}{3x-y}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

....

Svolgimento. Il dominio della forma è

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0, y \neq 3x\}.$$

Verifichiamo che ω è esatta su ciascuna componente connessa di D determinandone una funzione potenziale:

$$U(x,y) = \int \frac{1}{3x-y}\mathrm{d}y = -\log|3x-y| + C(x),$$

da cui

$$\partial_x U(x,y) = -\frac{3}{3x-y} + C'(x) \overset{!}{=} -\frac{y}{x(3x-y)}$$

se e solo se

$$C'(x) = \frac{3}{3x-y} - \frac{y}{x(3x-y)} = \frac{3x-y}{x(3x-y)} = \frac{1}{x}.$$

Perciò $C(x) = \log|x| + C$, ovvero

$$U(x,y) = -\log\left|\frac{x}{3x-y}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si può quindi scegliere qualunque componente connessa di D, per esempio

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, y > 3x\}.$$

(*) Disegnare l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 < 0\}$$

e determinare il valore di $A \in \mathbb{R}$ per cui la forma differenziale

$$\omega = \frac{A(x-1)\mathrm{d}x + 2(y-2)\mathrm{d}y}{4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4}$$

è esatta in D.

. . . . 7 punti

Risposta: D è l'interno dell'ellisse di centro $(1,2)$ e semiassi paralleli agli assi, di lunghezza 1 e 2; $A = 8$.

. . . .

Svolgimento. Si ha

$$4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 4(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4,$$

da cui segue la caratterizzazione di D. Dalla precedente identità segue anche facilmente che ω è esatta se e solo se $A = 8$ in tal caso una primitiva di ω è

$$U(x,y) = \log|4(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4|.$$

(*) Sia

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(1 - t^2 - \cos(\pi t^3), \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - t^2 + 5\right).$$

Calcolare

$$\int_\gamma \left(\frac{e^y}{1+x^2}\ \mathrm{d}x + e^y \arctan x\ \mathrm{d}y\right).$$

. . . . 7 punti

Risposta: $\frac{\pi e^5}{4}$

. . . .

Svolgimento. Verifichiamo che la forma differenziale è esatta:

$$U(x,y) = \int \frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = e^y \arctan x + C(y)$$

da cui

$$U_y = e^y \arctan x + C'(y) \overset{!}{=} e^y \arctan x \quad \Longleftrightarrow \quad C'(y) = 0,$$

ovvero

$$U(x,y) = e^y \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Perciò, osservando che $\gamma(1) = (1,5)$ e $\gamma(0) = (0,5)$, si ottiene

$$\int_\gamma \left(\frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + e^y \arctan x\,\mathrm{d}y \right) = U(1,5) - U(0,5) = \frac{\pi e^5}{4}.$$

(*) (a) Determinare $A \in \mathbb{R}$ in modo tale che la forma differenziale

$$\omega = \frac{1}{(x+y)^2}\,(Ay\mathrm{d}x - 2x\mathrm{d}y)$$

sia chiusa nel suo dominio naturale D;
(b) per tale valore di A calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è una qualunque curva regolare in D che parte dal punto $(0,1)$ e arriva al punto $(1,0)$.

. . . . 7 punti

Risposta:

. . . .

Svolgimento:

(*) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio di Green di volume 3 e baricentro $(0,1,0)$, e sia $\mathbf{V}$ il seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{V}(x,y,z) = \left(3x^2, y^2, 5z^2 + z\right).$$

Calcolare il flusso di $\mathbf{V}$ uscente da Ω.

. . . . 6 punti

Risposta: 9

. . . .

Svolgimento. Applicando il teorema della divergenza, si ottiene

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}_e \mathrm{d}S &= \iiint_\Omega (6x + 2y + 10z + 1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= |\Omega| \left(\frac{6}{|\Omega|} \iiint_\Omega x\mathrm{d}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{2}{|\Omega|} \iiint_\Omega y\mathrm{d}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{10}{|\Omega|} \iiint_\Omega z\mathrm{d}\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 1 \right) \\
&= 3\,(2+1) = 9.
\end{aligned}$$

(*) Calcolare

$$\int_{\partial\Omega^+} xy \; \mathrm{d}y, \qquad \Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq 0, \; y \leq 5x, \; y \leq \frac{7}{x} - 2\right\}.$$

.... 7 punti

Risposta: $\frac{80}{3} - 14 \log \frac{7}{2}$.

....

Svolgimento. Segue dalle formule di Green che

$$I = \int_{\partial\Omega^+} xy \; \mathrm{d}y = \iint_\Omega y \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

L'insieme Ω è semplice rispetto a entrambi gli assi:

$$\begin{aligned} \Omega &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [0, 7/2], 0 \leq y \leq \min\left\{5x, \frac{7}{x} - 2\right\}\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \in [0, 5], \frac{y}{5} \leq x \leq \frac{7}{y + 2}\right\}. \end{aligned}$$

Quindi

$$I = \int_0^1 \int_0^{5x} y \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \int_1^{7/2} \int_0^{7/x-2} y \mathrm{d}y \mathrm{d}x \quad \text{oppure} \quad I = \int_0^5 \int_{y/5}^{7/(y+2)} y \mathrm{d}x \mathrm{d}y$$

e svolgendo correttamente gli integrali si ottiene la risposta.

(*) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{V} = (xz, yz, xy)$ uscente da $\Omega = [0, 1]^3$.

.... 7 punti

Risposta: 1

....

Svolgimento:

(*) Calcolare

$$\int_{\partial\Omega} \left(x + y^2 - 3, y + x^2 - 6\right) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4y + 2x + 1 \leq 0\}$ ed $\mathbf{n}$ è la normale esterna ad Ω.

.... 7 punti

Risposta:

....

Svolgimento:

(*) Sia Σ la porzione del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ compresa tra i piani $z = 0$ e $z = 1$. Calcolare

$$\iint_S z \mathrm{d}\sigma.$$

.... 6 punti

Risposta:

. . . .

Svolgimento:

(*) Determinare l'area della porzione di superficie cilindrica definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y + 2)^2 = 4,\ 0 \le z \le x\}.$$

. . . . 8 punti

Risposta: 8

. . . .

Svolgimento. Si parametrizza S mediante coordinate cilindriche:

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma(\varphi, z) = (2\cos\varphi, -2 + 2\sin\varphi, z).$$

Per determinare D si nota che

$$0 \le z \le x \iff 0 \le z \le 2\cos\varphi,$$

quindi

$$D = \{(\varphi, z) \in [0, 2\pi) \times \mathbb{R} :\ 0 \le z \le 2\cos\varphi\}.$$

Poiché

$$\sigma_\varphi = (-2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0) \quad \text{e} \quad \sigma_z = (0, 0, 1),$$

si ha

$$\|\sigma_\varphi \wedge \sigma_z\| = \|(2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0)\| = 2.$$

Quindi

$$\iint_S \mathrm{d}S = \iint_D 2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z.$$

Si riscrive D come dominio semplice osservando che

$$0 \le 2\cos\varphi \iff \varphi \in [-\pi/2, \pi/2].$$

Pertanto

$$\iint_S \mathrm{d}S = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\varphi} 2\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi\mathrm{d}\varphi = 8.$$

(*) Determinare una parametrizzazione $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ della superficie

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x^8 + y^2 + 4z^2 = 6\right\}$$

e determinare il piano tangente e i due versori normali a Σ in $(1, 1, 1)$.

. . . . 6 punti

Risposta: Una possibile parametrizzazione è Parametrizzazione: $D = \{(u, v) : u^2 + 4v^2 \le 6\}$, $\sigma(u, v) = ((6 - u^2 - 4v^2)^{1/8}, u, v)$, il piano tangente è $x - 1 + (y - 1)/4 + z - 1 = 0$ e i versori normali sono $\mathbf{n} = \pm\frac{4}{\sqrt{33}}(1, 1/4, 1)$.

. . . .

Svolgimento. Si può parametrizzare Σ come superficie cartesiana rispetto a qualunque asse. Per esempio, poiché $x \ge 0$,

$$x = (6 - y^2 - 4z^2)^{1/8} =: f(y, z), \quad 6 - y^2 - 4z^2 \ge 0,$$

pertanto

$$D = \{(u,v):\ u^2+4v^2 \le 6\}, \quad \sigma(u,v) = ((6-u^2-4v^2)^{1/8}, u, v).$$

Poiché si tratta di una superficie cartesiana, il piano tangente e i versori normali sono dati rispettivamente da

$$x-1-f_y(1,1)(y-1)-f_z(1,1)(z-1)=0, \quad \mathbf{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+f_y^2+f_z^2}}(1,-f_y,-f_z).$$

Poiché

$$f_y(y,z) = -\frac{1}{4}(6-y^2-4z^2)^{-7/8}, \quad f_z(y,z) = -(6-y^2-4z^2)^{-7/8},$$

si ha $f_y(1,1) = -1/4$, $f_z(1,1) = -1$, da cui segue la risposta.

(*) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificandone l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} x\,y'(x) &= y(x)\left(1+y(x)e^{x/y(x)}\right) \\ y(1) = -\frac{1}{\log 4} \end{cases}$$

(si suggerisce di ricondursi a un'equazione a variabili separabili mediante un opportuno cambio di variabile).

. . . . 8 punti

Risposta: $y(x) = -\frac{x}{\log(3+x)}, \quad x \in (-2,+\infty)$.

. . . .

Svolgimento. Ponendo ad esempio

$$u(x) := \frac{x}{y(x)},$$

si ottiene

$$u' = \frac{1}{y} - \frac{xy'}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y}(1+ye^u) = -e^u.$$

Quindi

$$(e^{-u})' = -e^{-u}u' = 1,$$

ovvero

$$e^{-u(x)} = C + x.$$

Si ha $u(1) = 1/y(1) = -\log 4$, quindi

$$e^{-u(1)} = C + 1 \overset{!}{=} 4 \iff C = 3.$$

Pertanto

$$-u(x) = \log(3+x) \iff y(x) = \frac{x}{u(x)} = -\frac{x}{\log(3+x)}, \quad x \in (-2,+\infty).$$

(*) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$x^2y''(x) + \tfrac{1}{3}xy'(x) + \tfrac{1}{9}y(x) = \log x, \quad x > 0.$$

. . . . 8 punti

Risposta: $y(x) = (c_0 + c_1 \log x)\, x^{1/3} + 9 \log x + 54.$

. . . .

Svolgimento. L'equazione assegnata una equazione di Eulero. Ponendo

$$x = e^t \iff t = \log x, \quad u(t) = y(e^t),$$

l'equazione differenziale per $u(t)$ diventa

$$u''(t) - \frac{2}{3}u'(t) + \frac{1}{9}u(t) = t.$$

Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$, per cui l'integrale generale dell'omogenea associata risulta essere

$$u_o(t) = (c_0 + c_1 t)\, e^{t/3}.$$

Per determinare una soluzione particolare si utilizza il metodo di somiglianza:

$$u_p(t) = At + B, \quad y_p'(t) = A, \quad y_p''(t) = 0,$$

da cui segue che

$$u_p''(t) - \frac{2}{3}u_p'(t) + \frac{1}{9}u_p(t) = -\frac{2}{3}A + \frac{1}{9}At + \frac{1}{9}B \overset{!}{=} t \iff A = 9,\ B = 54.$$

Da ci segue che l'integrale generale nell'incognita $u(t)$

$$u(t) = (c_0 + c_1 t)\, e^{t/3} + 9t + 54$$

e sostituendo $t = \log x$ si ottiene la risposta.

(*) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 2e^{2x}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

. . . .

Svolgimento:

(*) Risolvere il seguente problema di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = (x + 3y(x) - 2)^2 - \frac{1}{3} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

. . . . 7 punti

Risposta:

. . . .

Svolgimento:

(*) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'''' + 4y'' = 1$$

. . . . 7 punti

Risposta: $C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + C_3 + C_4 x + \frac{1}{8} x^2$.

. . . .

Svolgimento:

(*) Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se} \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$$

e utilizzarlo per calcolare la somma della seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

. . . .

Svolgimento: