ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE (L-Z) — PROVA SCRITTA — 06.07.12 | A |

Cognome: .... **Nome:** ....

Solo durante le prime 2 ore e 15 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(-1,0)$, e sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y) = \frac{4x^3}{1+x^4+y^4}\mathrm{d}x + \left(\frac{4y^3}{1+x^4+y^4} + x\right)\mathrm{d}y.$$

Calcolare

$$\int_{\partial\Omega^+} \omega.$$

.... 7 punti

Risposta:

1/2

....

Svolgimento:

Si ha

$$\int_{\partial\Omega^+} \omega = \int_{\partial\Omega^+} \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s,$$

dove

$$\mathbf{v} = \left(\frac{4y^3}{1+x^4+y^4} + x, -\frac{4x^3}{1+x^4+y^4}\right).$$

Applicando il Teorema della divergenza, si ottiene

$$\int_{\partial\Omega^+} \omega = \iint_\Omega \operatorname{div}\mathbf{v}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |\Omega| = \frac{1}{2}.$$

In alternativa, siano

$$\omega_1 = \frac{4x^3}{1+x^4+y^4}\mathrm{d}x + \frac{4y^3}{1+x^4+y^4}\mathrm{d}y, \quad \omega_2 = x\mathrm{d}y.$$

Si verifica che ω_1 è esatta (osservando che è chiusa in $\mathbb{R}^2$ o determinandone un potenziale), quindi

$$\int_{\partial\Omega^+} \omega = \int_{\partial\Omega^+} x\mathrm{d}y$$

che si calcola facilmente (ponendo attenzione al verso di percorrenza!).

(2) Sia $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva piana definita da $\gamma(t) = (\sin t,\ t\ \sin t)$.

(a) Verificare che γ è una curva di Jordan.

(b) Calcolare l'area del suo interno.

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$\pi/4$

. . . .

Svolgimento:

La curva in esame è chiusa in quanto $\gamma(0) = (0, 0) = \gamma(\pi)$, ed è semplice in quanto

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 \sin t_1 = t_2 \sin t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \quad t_1 = t_2 \quad \text{(sostituendo la seconda nella prima).}$$

Quindi è una curva di Jordan. Perciò l'area del suo interno, Ω, è, a meno del segno che dipende dall'orientazione di γ,

$$\int_{\partial\Omega} y \mathrm{d}x = \int_0^\pi t \sin t \cos t \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{4},$$

da cui segue il risultato.

(3) Sia $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{v}(x, y, z) = (0, y, z)$$

e sia Σ^+ la superficie definita da

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 = 4(y^2 + z^2), \ x \in [1, 2]\right\}$$

e orientata in modo tale che $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_1 > 0$. Calcolare il flusso di $\mathbf{v}$ attraverso Σ^+.

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$-7\pi/6$

....

Svolgimento:
Si parametrizza la superficie utilizzando coordinate cartesiane o cilindriche. Nel secondo caso

$$\sigma(r, \varphi) = (2r, r\cos\varphi, r\sin\varphi), \quad D = [1/2, 1] \times [0, 2\pi].$$

Si ha

$$\sigma_r = (2, \cos\varphi, \sin\varphi), \quad \sigma_\varphi = (0, -r\sin\varphi, r\cos\varphi),$$

quindi

$$\sigma_r \wedge \sigma_\varphi = (r, -2r\cos\varphi, -2r\sin\varphi),$$

la cui orientazione coincide con quella richiesta. Pertanto

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{v}) = \int_\Sigma \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^+ \mathrm{d}\Sigma = \iint_D (v \circ \sigma) \cdot (\sigma_r \wedge \sigma_\varphi) \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \iint_D -2r^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = -7\pi/6.$$

(4) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificandone l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} y'' = (y')^2 \dfrac{\sin y}{\cos y} \\ y(-1/2) = \pi/4 \\ y'(-1/2) = 2 \end{cases} .$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$y(x) = \arcsin(\sqrt{2}(1+x))$, $I = (-1 - 1/\sqrt{2}, 1 - 1/\sqrt{2})$.

. . . .

Svolgimento:

(5)

(B.1) Calcolare, purché esista, il seguente limite: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3 + xy}{x^2 + y^2}$.

(B.2) Dimostrare che per ogni x in un intorno di $x_0 = 1$ esiste un unico $y(x)$ in un intorno di $y_0 = 1$ tale che $(x, y(x))$ risolve l'equazione

$$2x^5y^7 - x^8y^2 - 1 = 0$$

e dimostrare che $y(x) < 1$ se $x > 1$.

. . . . 8 punti

Risposte:

(B.1) Il limite non esiste: vale 0 nella direzione $y = 0$ e $1/2$ nella direzione $y = x$.

(B.2) Sia $g(x, y) = 2x^5y^7 - x^8y^2 - 1$. Si ha

$$\nabla g(1, 1) = (2, 12),$$

quindi eistenza e unicità seguono dal teorema delle funzioni implicite, e inoltre

$$y'(1) = -1/6 > 0$$

da cui segue la monotonia.