ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE (L-Z) — PROVA SCRITTA — 20.02.13

Cognome: .... **Nome:** ....

Solo durante le prime 2 ore e 15 minuti è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

VERSIONE PRELIMINARE - SI PREGA DI SEGNALARE EVENTUALI ERRORI.

(1) Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto della funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x\left(x^2 - y + 2\right), \quad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq x^2 + 4\right\}.$$

.... 7 punti

Risposta:

$$\max_{\Omega} f = 4, \quad \min_{\Omega} f = -4.$$

....

Svolgimento: Si ha

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff \left(3x^2 - y + 2, -x\right) = (0,0) \iff (x,y) = (0,2),$$

quindi $P_0 := (0,2)$ è un punto critico interno ad Ω. Si ha inoltre $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -2 \leq x \leq 2, \ y = 2x^2\}$$
$$\Gamma_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -2 \leq x \leq 2, \ y = x^2 + 4\}$$

Restringendo la funzione su Γ_1 si ottiene

$$\phi_1(x) := f|_{\Gamma_1} = x\left(2 - x^2\right), \quad x \in [-2,2]$$

e si verifica che $x = -2$ ed $x = \sqrt{2/3}$ sono punti di massimo locale per ϕ_1, mentre $x = -\sqrt{2/3}$ ed $x = 2$ sono punti di minimo locale per ϕ_1. A tali punti corrispondono i candidati $P_1 := (-2,8)$ e $P_2 := (\sqrt{2/3}, 4/3)$ (possibili punti di massimo locale per f) e $P_3 := (-\sqrt{2/3}, 4/3)$ e $P_4 := (2,8)$ (possibili punti di minimo locale per f). Su Γ_2 si ha invece che

$$\phi_2(x) := f|_{\Gamma_2} = -2x, \quad x \in [-2,2]$$

da cui segue che $x = -2$ ed $x = 2$ sono, rispettivamente, punti di massimo locale e di minimo locale per $\phi_2(x)$, cui corrispondono i candidati P_1 e P_4. Confrontando i valori dei candidati $P_0, \ldots, P_4$ si ottiene la risposta.

(2) Determinare le coordinate del baricentro del seguente insieme:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y^3 \le x \le \sqrt{y}\right\}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$(3/7, 12/25)$

. . . .

Svolgimento:
Per definzione

$$x_b = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega x \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad y_b = \frac{1}{|\Omega|}\iint_\Omega y \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove $|\Omega|$ è l'area di Ω. Poiché

$$0 \le y^3 \le \sqrt{y} \iff y \in [0,1],$$

Ω si riscrive come dominio semplice come segue:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [0,1], \ y^3 \le x \le \sqrt{y}\right\}.$$

Pertanto

$$|\Omega| = \int_0^1 \left(\int_{y^3}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\sqrt{y} - y^3\right) \mathrm{d}y = \frac{5}{12}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} y_b = \frac{12}{5}\int_0^1 \left(\int_{y^3}^{\sqrt{y}} y \ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y &= \frac{12}{5}\int_0^1 y\left(\sqrt{y} - y^3\right) \mathrm{d}y \\ &= \frac{12}{5}\int_0^1 \left(y^{3/2} - y^4\right) \mathrm{d}y = \frac{12}{25}, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} x_b = \frac{12}{5}\int_0^1 \left(\int_{y^3}^{\sqrt{y}} x \ \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y &= \frac{6}{5}\int_0^1 x^2\Big|_{y^3}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y \\ &= \frac{6}{5}\int_0^1 \left(y - y^6\right) \mathrm{d}y = \frac{3}{7}. \end{aligned}$$

(3) Sia $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, 2\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

(orientata nel verso delle t crescenti) e sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x, y) = \frac{2xy}{1 + x^4y^2}\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{1 + x^4y^2} + x\right)\mathrm{d}y.$$

Calcolare

$$\int_{\gamma^+} \omega\ .$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

2π

. . . .

Svolgimento:
La forma differenziale

$$\omega_1 := \omega - x\ \mathrm{d}y$$

è esatta in $\mathbb{R}^2$ (le sue funzioni potenziali sono $U(x, y) = \arctan(x^2y) + C$, $C \in \mathbb{R}$).
Poiché γ è chiusa, si ottiene

$$\int_{\gamma^+} \omega = \int_{\gamma^+} x\ \mathrm{d}y = 2\int_0^{2\pi} \cos^2 t\ \mathrm{d}t = 2\pi.$$

(4) Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{3}{2}\left(x^2-1\right)\frac{1}{y(x)}e^{-y^2(x)} \\ y(-1) = \sqrt{\log 3} \end{cases} .$$

.... 7 punti

Risposta:

$y(x) = \sqrt{\log\left(x^3-3x+1\right)}$, $y \in (-\sqrt{3}, 0)$.

....

Svolgimento:

L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$2y(x)e^{y^2(x)}y'(x) = 3\left(x^2-1\right) \Longleftrightarrow e^{y^2(x)} = x^3-3x+C.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $C = 1$. Quindi

$$y(x) = \pm\sqrt{\log\left(x^3-3x+1\right)},$$

e per soddisfare la condizione iniziale si deve scegliere la soluzione positiva:

$$y(x) = \sqrt{\log\left(x^3-3x+1\right)}.$$

Tale funzione è definita se

$$\begin{aligned} x^3-3x+1 \geq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad x\left(x^2-3\right) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2-3 \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-3 \geq 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in \left[-\sqrt{3}, 0\right] \cup [\sqrt{3}, +\infty), \end{aligned}$$

quindi l'intervallo aperto massimale che contiene $x = -1$ è $(-\sqrt{3}, 0)$.

(5) Rispondere alle due domande che saranno distribuite durante il compito.

(1) Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definiti rispettivamente da

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{e} \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Calcolare il flusso del campo vettoriale ∇f uscente da Ω.

(2) Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^2$.

. . . . $\boxed{\text{8 punti}}$

Risposte: