**ANALISI MATEMATICA 1 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 16.01.2015**

**Cognome:** ........................................ **Nome:** ........................................

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

**VERSIONE PRELIMINARE - SI PREGA DI SEGNALARE EVENTUALI ERRORI**

**(1)** Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \arctan(4|x| + x^3), \quad x \in (-\infty, 1].$$

........................................................................ 8 punti

**Risposta:**

$\inf f = -\pi/2$, $\sup f = \arctan(5)$, $x = -2/\sqrt{3}$ e $x = 1$ punti di massimo locale, $x = 0$ punto di minimo locale.

........................................................................

**Svolgimento:**

$f$ è continua in $(-\infty, 1]$ e derivabile in $(-\infty, 1] \setminus \{0\}$. Si ha:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 4}{1 + (x^3 - 4x)^2} \quad \text{se } \ x < 0,$$

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4}{1 + (x^3 + 4x)^2} \quad \text{se } \ x \in (0, 1].$$

Dallo studio del segno di $f'$ segue che $f$ è crescente in $(-\infty, -2/\sqrt{3}]$, decrescente in $[-2/\sqrt{3}, 0]$ e crescente in $[0, 1]$. Quindi $x = -2/\sqrt{3}$ e $x = 1$ sono punti di massimo locale e $x = 0$ è un punto di minimo locale. Infine

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\pi/2 < f(0) = 0, \quad f(-2/\sqrt{3}) = \arctan(16/3^{3/2}) < \arctan(5) = f(1),$$

quindi $\mathrm{im} f = (-\pi/2, \arctan(5)]$.

**(2)** Calcolare (purché esista) il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{6}{\sin(3x^2)}-\frac{1}{1+\cos(x+\pi)}\right).$$

.................................................................................... 6 punti

**Risposta:**

$-1/6$.

....................................................................................

**Svolgimento:**

Ricordando che $\cos(x+\pi) = -\cos x$ e utilizzando gli sviluppi di McLaurin, si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{6}{\sin(3x^2)}-\frac{1}{1+\cos(x+\pi)} &= \frac{6(1-\cos x)-\sin(3x^2)}{\sin(3x^2)(1-\cos x)}\\ &= \frac{6(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4))-(3x^2-\frac{27x^6}{6}+o(x^6))}{\frac{3}{2}x^4(1+o(1))}\\ &= \frac{-\frac{x^4}{4}(1+o(1))}{\frac{3}{2}x^4(1+o(1))}\to -\frac{1}{6}\quad \text{per}\quad x\to 0^+.\end{aligned}$$

**(3)** Determinare (purché esistano) i valori del parametro $\alpha > 0$ per i quali è convergente la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \log\left(1 + \frac{1}{k^{5\alpha}}\right) + \frac{6}{k^{2-\alpha}} \right).$$

........................................................................................ $\boxed{\text{6 punti}}$

**Risposta:**

$1/5 < \alpha < 1.$

........................................................................................

**Svolgimento:**

La serie può essere vista come somma di due serie a termini positivi. Poiché $\log\left(1+\frac{1}{k^{5\alpha}}\right) = \frac{1}{k^{5\alpha}}(1+o(1))$ per $k \to +\infty$, si ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{k^{5\alpha}}\right) \quad \text{converge se } 5\alpha > 1 \text{, diverge a } +\infty \text{ altrimenti}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^{2-\alpha}} \quad \text{converge se } 2-\alpha > 1 \text{, diverge a } +\infty \text{ altrimenti.}$$

Pertanto la serie è convergente se e solo se $1/5 < \alpha < 1$.

**(4)** Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 x^2 \cos\left(1 - x^{3/2}\right) \,\mathrm{d}x.$$

.................................................................................................... $\boxed{\text{7 punti}}$

**Risposta:**

$\frac{2}{3}(1 - \cos 1)$.

....................................................................................................

**Svolgimento:**

Posto $y = 1 - x^{3/2}$ (quindi $\mathrm{d}y = -\frac{3}{2}x^{1/2}\,\mathrm{d}x$ e $x^{3/2} = 1 - y$), si ottiene

$$\int x^2 \cos\left(1 - x^{3/2}\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int (1 - y)\cos y\,\mathrm{d}y = -\frac{2}{3}\sin y + \frac{2}{3}\int y\cos y\,\mathrm{d}y.$$

Integrando per parti, si ottiene

$$\int y\cos y\,\mathrm{d}y = y\sin y - \int \sin y\,\mathrm{d}y = y\sin y + \cos y + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Pertanto

$$\int x^2 \cos\left(1 - x^{3/2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\left(-x^{3/2}\sin(1 - x^{3/2}) + \cos(1 - x^{3/2})\right) + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

quindi

$$\int_0^1 x^2 \cos\left(1 - x^{3/2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(1 - \cos 1).$$

**(5)** Rispondere alle due domande che saranno distribuite durante il compito.

A.1) Fornire l'esempio di una funzione $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che non sia monotona ma sia tale che $f'(x) > 0$ per ogni $x \in X$.

A.2) Siano $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ tali che $g'(x_0) \neq 0$. Dire quanto vale $(f \circ g)'(x_0)$ e dimostrarlo.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

**Svolgimento:**