ANALISI MATEMATICA 1 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 06.02.2015

Cognome: .... **Nome:** ....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Determinare l'estremo superiore, l'estremo inferiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : [-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \left(2x^2 - 5x^3\right)^3, \quad x \in (-\infty, 1].$$

.... 7 punti

Risposta:

$\sup f = +\infty$, $\inf f = -27$, $x = 0$ e $x = 1$ punti di minimo locale, $x = 4/15$ punto di massimo locale.

....

Svolgimento:

Si ha

$$f'(x) = 3\left(2x^2 - 5x^3\right)^2 x(4 - 15x), \quad x \in (-\infty, 1],$$

quindi f è: decrescente in $(-\infty, 0]$ e in $[4/15, 1]$, crescente in $[0, 4/15]$. Pertanto $x = 0$ e $x = 1$ sono punti di minimo locale, $x = 4/15$ è punto di massimo locale. Si ha inoltre

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \quad f(0) = 0 < f(1) = -27,$$

quindi $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -27$.

(2) Calcolare (purché esista) il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+3x^2\right)^{\frac{4}{\log(x)}}.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

e^8.

. . . .

Svolgimento:

Si ha

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+3x^2\right)^{\frac{4}{\log(x)}}=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{4\log(1+3x^2)}{\log(x)}}.$$

Poiché

$$\begin{aligned}\frac{4\log(1+3x^2)}{\log(x)} &= \frac{4\log(x^2)+4\log(3)+o(1)}{\log(x)}=\frac{4\log(x^2)(1+o(1))}{\log(x)}\\ &= \frac{8\log(x)(1+o(1))}{\log(x)}=8(1+o(1))\quad \text{per } x\to+\infty,\end{aligned}$$

si conclude che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+3x^2\right)^{\frac{4}{\log(x)}}=e^8.$$

(3) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^1 \min\{2-5x, 1-x\}\mathrm{d}x.$$

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:

$-5/8$.

....

Svolgimento:

Poiché $2-5x < 1-x$ se e solo se $x > 1/4$, si ha

$$\min\{2-5x, 1-x\} = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \le 1/4 \\ 2-5x & \text{se } x > 1/4. \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \min\{2-5x, 1-x\}\mathrm{d}x &= \int_0^{1/4} (1-x)\mathrm{d}x + \int_{1/4}^1 (2-5x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{16} + 2\left(1-\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{2}\left(1-\frac{1}{16}\right) = -5/8. \end{aligned}$$

(4) Determinare (purché esistano) i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali il seguente integrale improprio è convergente:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2\alpha}}{1+x^5} \mathrm{d}x.$$

.... 7 punti

Risposta:

$-1/2 < \alpha < 2.$

....

Svolgimento:
La funzione integranda, $f(x) := \frac{x^{2\alpha}}{1+x^5}$, è positiva e continua in $(0, +\infty)$. Si ha $f(x) = x^{2\alpha}(1 + o(1))$ per $x \to 0^+$, quindi

$$\int_0^1 \frac{x^{2\alpha}}{1+x^5} \mathrm{d}x \quad \text{è convergente se e solo se } 2\alpha > -1.$$

D'altra parte, si ha $f(x) = x^{2\alpha-5}(1 + o(1))$ per $x \to +\infty$, quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^{2\alpha}}{1+x^5} \mathrm{d}x \quad \text{è convergente se e solo se } 2\alpha - 5 < -1.$$

Combinando le informazioni si ottiene la risposta.

(5)

(A.1) Determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = e^{5-2x}$.

(A.2) Enunciare e dimostrare il criterio della radice per serie a termini positivi.

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Svolgimento: