ANALISI MATEMATICA 1 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 10.07.2015

Cognome: .... **Nome:** ....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Determinare il massimo assoluto, il minimo assoluto, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \left|\sin(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right|, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:
$\max f = f(0) = \sqrt{2}/2$, $\min f = f(\pi/8) = 0$, $x = \pi/4$ punto di massimo locale.

....

Svolgimento:
Operazioni elementari sulle funzioni e i loro grafici.

(2) Determinare, purché esistano, i valori del parametro $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie è convergente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 - k^3}{e^{\beta k} + k^{-\beta}}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:
$\beta > 0$ e $\beta < -4$.

. . . .

Svolgimento:
Si ha

$$k^2 - k^3 = -k^3(1 + o(1)) \quad \text{per } k \to +\infty$$

e

$$e^{\beta k} + k^{-\beta} = \begin{cases} e^{\beta k}(1 + o(1)) & \text{se } \beta > 0 \\ 2 & \text{se } \beta = 0 \\ k^{-\beta}(1 + o(1)) & \text{se } \beta < 0 \end{cases} \qquad \text{per } k \to +\infty.$$

Quindi

$$\frac{k^2 - k^3}{e^{\beta k} + k^{-\beta}} = \begin{cases} -k^3 e^{-\beta k}(1 + o(1)) & \text{se } \beta > 0 \\ -k^3/2 & \text{se } \beta = 0 \\ -k^{3+\beta}(1 + o(1)) & \text{se } \beta < 0 \end{cases} \qquad \text{per } k \to +\infty$$

(in particolare, la serie è definitivamente a segno costante) e la risposta segue dal criterio del confronto asintotico.

(3) Sia $(a, b) \subset \mathbb{R}$ l'intervallo definito da

$$(a, b) := \left\{ x \in (-\infty, 0) : \ x > \frac{2}{x+1} \right\}.$$

Calcolare

$$\int_a^b \frac{x^4}{\sqrt{1 - x^5}} \mathrm{d}x.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:
$\frac{2}{5}(\sqrt{33} - \sqrt{2})$.

. . . .

Svolgimento:
Per $x < 0$, si ha

$$x > \frac{2}{x+1} \iff x + 1 < 0 \ \text{ e } \ x(x+1) < 2$$

Poiché $x(x + 1) < 2$ per $x \in (-2, 1)$ si conclude che $(a, b) = (-2, -1)$. Si ha quindi

$$\int_{-2}^{-1} \frac{x^4}{\sqrt{1 - x^5}} \mathrm{d}x = -\frac{2}{5} \sqrt{1 - x^5} \Big|_{-2}^{-1} = -\frac{2}{5}(\sqrt{2} - \sqrt{33}).$$

(4) Determinare, purché esistano, le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ della seguente equazione:

$$2z^2 - 2i\bar{z} - |z|^2 = \mathrm{Re}\left(\frac{2}{1+i}\right).$$

. . . . 6 punti

Risposta:
$z = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{11} + i)$.

. . . .

Svolgimento:
Si ha $\frac{2}{1+i} = 1 - i$. Quindi, posto $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$2z^2 - 2i\bar{z} - |z|^2 = 2x^2 - 2y^2 + 4ixy - 2i(x - iy) - x^2 - y^2 = 1$$

che è vera se e solo se

$$\begin{cases} x^2 - 3y^2 - 2y = 1 \\ 4xy - 2x = 2x(2y-1) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} -3y^2 - 2y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x^2 - 3/4 - 1 = 1 \\ y = 1/2 \end{cases}$$

da cui segue la risposta (si noti che $3y^2 + 2y + 1 = 0$ non ha soluzioni reali).

(5) Rispondere alle due domande che saranno distribuite durante il compito.

1) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo integrale.

2) Siano $f(x) = 3x^2$, $g(x) = e^{5x}$ ed $h(x) = f(g(x))$. Calcolare $(h^{-1})'(3)$.

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Svolgimento: