ANALISI MATEMATICA 1 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 10.07.2015 | A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Determinare il dominio naturale D, l'estremo inferiore, l'estremo superiore, gli eventuali punti di massimo locale e gli eventuali punti di minimo locale della funzione $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \log\left((x+1)(4x^2+1)\right).$$

7 punti

Risposta: $D = (-1, +\infty)$, $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$,
$x = -1/2$ punto di massimo locale
$x = -1/6$ " " minimo "

Svolgimento:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)(4x^2+1) > 0\} = (-1, +\infty)$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

quindi necessariamente $\inf f = -\infty$, $\sup f = +\infty$.

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)(4x^2+1)}\left(12x^2 + 8x + 1\right)$$

$$> 0 \iff 12x^2 + 8x + 1 > 0$$

$$\iff x \in (-1, -1/2) \cup (-1/6, +\infty)$$

" $12x^2 + 8x + 1 = 0$
$\Delta = 64 - 12 \cdot 4 = 16$
$x = \dfrac{-8 \pm 4}{24} = \begin{cases} -1/2 \\ -1/6 \end{cases}$ "

Quindi $x = -1/2$ è punto di max loc
$x = -1/6$ " min ".

(2) Per ogni $\alpha > 0$ calcolare (purché esista) il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\cos(x^{2\alpha})\right)^{5/x}.$$

6 punti

Risposta:

$$\begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 1/4 \\ e^{-5/2} & \text{se } \alpha = 1/4 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1/4 \end{cases}$$

Svolgimento:

Si ha $x^{2\alpha} \to 0$ per $x \to 0^+$ (poiché $\alpha > 0$).

Pertanto $\cos(x^{2\alpha}) = 1 - \frac{x^{4\alpha}}{2}(1+o(1))$ per $x \to 0^+$.

Si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\cos(x^{2\alpha})\right)^{5/x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{5}{x}\log(\cos(x^{2\alpha}))}$$

e

$$\frac{5}{x}\log(\cos(x^{2\alpha})) = \frac{5}{x}\log\left(1 - \frac{x^{4\alpha}}{2}(1+o(1))\right)$$

$$= \frac{5}{x}\left(-\frac{x^{4\alpha}}{2}\right)(1+o(1))$$

$$= -\frac{5}{2}x^{4\alpha-1}(1+o(1)) \text{ per } x \to 0^+$$

da cui segue la risposta.

(3) Studiare la continuità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} xe^{1/x} & x < 0 \\ \sqrt{\frac{x}{x+1}} & x \geq 0 \end{cases},$$

e determinarne gli eventuali asintoti.

6 punti

Risposta: $f \in C(\mathbb{R})$

$y = x + 1$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$
$y = 1$ " orizzontale per $x \to +\infty$

Svolgimento:

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ per le proprietà elementari

Si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x e^{1/x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{\frac{x}{x+1}} = 0$$

quindi f è anche continua in $x = 0$.

Si ha

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} e^{1/x} = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{x \to -\infty} x\left(e^{1/x} - 1\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} x \left(\frac{1}{x}(1 + o(1))\right) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

da cui segue la risposta.

(4) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \log(1-7x) & \text{se } x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x}{\sqrt{x+1}} & \text{se } x \in [0,1]. \end{cases}$$

Determinare esplicitamente la seguente funzione integrale:

$$F(x) = \int_0^x f(s)\mathrm{d}s.$$

7 punti

Risposta:

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + 4/3 & \text{se } x \geq 0 \\ -\frac{1}{7}(1-7x)\log(1-7x) - x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Svolgimento:

$z^2 = s+1 \qquad s = z^2 - 1$

$ds = 2z\,dz$

Se $x > 0$, si ha

$$F(x) = \int_0^x \frac{s}{\sqrt{s+1}}\,ds \overset{z=\sqrt{s+1}}{=} \int_1^{\sqrt{x+1}} \frac{(z^2-1)}{\cancel{z}} \cdot 2\cancel{z}\,dz$$

$$= \frac{2}{3}z^3 - 2z \Big|_1^{\sqrt{x+1}} = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2(x+1)^{1/2} + \frac{4}{3}$$

Se $x < 0$, si ha

$$F(x) = \int_0^x \log(1-7s)\,ds = -\frac{1}{7}\int_0^x -7\log(1-7s)\,ds$$

$$-\frac{1}{7}\Big[(1-7s)\log(1-7s)\Big]_0^x + \frac{1}{7}\int_0^x \frac{1-7s}{1-7s}(-7)\,ds$$

$$= -\frac{1}{7}(1-7x)\log(1-7x) - x.$$