**ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 04.06.2015**

**Cognome:** ........................................ **Nome:** ........................................

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza sia a chi non ottiene almeno 18 punti, sia a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate dopo 2 ore.



**(1)** Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto della funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = y^2 + xy + \frac{1}{3}x^3$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \le 1, \ -x \le y \le 0\}$..

........................................................................ 6 punti

**Risposta:**

$\min_\Omega f = f(1/2, -1/4) = -1/48$, $\max_\Omega f = f(1, 0) = f(1, -1) = 1/3$.

........................................................................

**Svolgimento:**

Si ha $\nabla f(x, y) = (y + x^2, 2y + x) = (0, 0)$ se e solo se $(x, y) = (0, 0) =: P_0$ oppure $(x, y) = (1/2, -1/4) =: P_1 \in \Omega$. $\Omega$ è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, -1)$ e $(1, 0)$, quindi $\partial\Omega$ consiste nel sostegno delle tre curve

$$\gamma_1(t) = (1, t), \ t \in [-1, 0], \quad \gamma_2(t) = (t, 0), \ t \in [0, 1], \quad \gamma_3(t) = (t, -t), \ t \in [0, 1].$$

Si ha:

$$g_1(t) = f(\gamma_1(t)) = t^2 + t + 1/3, \quad g_1'(t) = 1 + 2t, \quad t \in [-1, 0],$$

quindi $(1, -1) = P_2$ e $(1, 0) =: P_3$ sono candidati punti di massimo e $(1, -1/2) =: P_4$ è candidato punto di minimo;

$$g_2(t) = f(\gamma_2(t)) = t^3/3, \quad g_2'(t) = t^2 \ge 0, \quad t \in [0, 1],$$

quindi $(0, 0) = P_0$ è candidato punto di minimo e $(1, 0) = P_3$ è candidato punto di massimo;

$$g_3(t) = f(\gamma_3(t)) = t^3/3, \quad g_3'(t) = t^2 \ge 0, \quad t \in [0, 1],$$

quindi $(0, 0) = P_0$ è candidato punto di minimo e $(1, -1) = P_2$ è candidato punto di massimo. Confrontando i valori della funzione nei punti $P_0, \ldots, P_4$ si ottiene la risposta.

**(2)** Sia $a \in \mathbb{R}$ e sia $\omega_a$ la forma differenziale definita da

$$\omega_a(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x + \left(ax + \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)\mathrm{d}y.$$

i) Determinare (purché esista) $a$ tale che $\omega_a$ è esatta in $\mathbb{R}^2$ e determinarne una funzione potenziale.

ii) Sia $\gamma^+(t) = (3t, 2t^2)$, $t \in [0,1]$, orientata nel verso delle $t$ crescenti. Calcolare

$$\int_{\gamma^+} \omega_1 \;=\; \int_{\gamma^+} \frac{2x}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x + \left(x + \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)\mathrm{d}y.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

**Risposta:**
i) $a = 0$, $U(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$.
ii) $\log(14) + 4$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Svolgimento:**
La prima parte è standard. Per la seconda, conviene osservare che $\omega_1 = \omega_0 + x\mathrm{d}y$. Quindi, poiché $\omega_0$ è esatta e ne conosciamo il potenziale,

$$\int_{\gamma^+} \omega_1 = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) + \int_{\gamma^+} x\mathrm{d}x = \log(14) + \int_0^1 3t \cdot 4t\mathrm{d}t$$

da cui segue la risposta.

**(3)** Sia $\Sigma^+$ la superficie definita da

$$\Sigma^+ = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ y = z\right\}$$

e orientata in modo che $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_3 > 0$. Sia inoltre $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{V}(x,y,z) = (0, -x^2, 2y^2).$$

Determinare:

a) il flusso di $\mathbf{V}$ attraverso $\Sigma^+$;

b) la circuitazione di $\mathbf{V}$ intorno a $\partial\Sigma^+$.

........................................................................ $\boxed{\text{7 punti}}$

**Risposta:**
a) $\sqrt{2}\pi/4$, b) 0.

........................................................................

**Svolgimento:**
$\Sigma$ è una superficie cartesiana con parametrizzazione

$$\sigma : D \to \mathbb{R}^3, \quad \sigma(x,y) = (x,y,y), \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + 2y^2 \leq 1\}$$

e versori normali $\pm(0,1,-1)/\sqrt{2}$ (cosa che si verifica col calcolo diretto di $\sigma_x \wedge \sigma_y$ oppure osservando che la superficie è contenuta nel piano $y = z$). Quindi $\mathbf{n}^+ = (0,-1,1)/\sqrt{2}$.
a) Si ha

$$\iint_\Sigma \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^+ \mathrm{d}S = \iint_D (0, -x^2, 2y^2) \cdot \frac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}} \sqrt{2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (x^2 + 2y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

e passando in coordinate ellittiche, $(x,y) = (r\cos\varphi, \frac{r}{\sqrt{2}}\sin\varphi)$, si ottiene

$$\iint_D (x^2+2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2}} r^3 \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{4\sqrt{2}}.$$

b) Per il teorema del rotore, si ha

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{V} \cdot \mathbf{t} \ \mathrm{d}s = \int_\Sigma \mathrm{rot}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^+ \mathrm{d}S.$$

Poiché

$$\mathrm{rot}\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}^+ = (4y, 0, -2x) \cdot (0,-1,1)/\sqrt{2} = -\sqrt{2}x$$

è dispari rispetto ad $x$ e la superficie è simmetrica rispetto a $x = 0$, la circuitazione è nulla.

**(4)** Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = xe^{-3y(x)/x} + \frac{y(x)}{x} \\ y(2) = 0 \end{cases}.$$

[suggerimento: utilizzare il cambiamento di variabile dipendente $v(x) = y(x)/x$].

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6 punti

**Risposta:**
$y(x) = \frac{x}{3}\log(3x-5) \quad x \in I = (5/3, \infty)$.

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

**Svolgimento:**
Si ha

$$v'(x) = y'(x)/x - y(x)/x^2.$$

Quindi la EDO che $v$ deve soddisfare è

$$v'(x) = \left(xe^{-3y(x)/x} + \frac{y(x)}{x}\right)/x - y(x)/x^2 = e^{-3y(x)/x} = e^{-3v(x)},$$

una EDO a variabili separabili che si integra facilmente:

$$v(x) = \frac{1}{3}\log(3x + C).$$

Sostituendo la condizione iniziale, $v(2) = y(2)/2 = 0$, si ottiene $C = -5$. Quindi

$$v(x) = \frac{1}{3}\log(3x-5), \quad x > 5/3,$$

da cui segue la risposta.

**(5)** Rispondere alle due domande che saranno distribuite durante il compito.

1) Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a : I \to \mathbb{R}$ e $b : I \to \mathbb{R}$ funzioni di classe $C^1$. Dire quanto vale $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a(t), b(t))$

2) Enunciare il teorema del rotore in $\mathbb{R}^2$ e dimostrarlo (dando per note le formule di Green).

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

**Svolgimento:**