ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 03.07.2015 A

Cognome: .... **Nome:** ....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = 3e^{x+y-2} - 2x - y$.

a) Determinare, purché esistano, i punti critici di f;

b) detta $y = h(x)$ la funzione definita implicitamente dall'equazione $f(x,y) = 0$ in un intorno del punto $(1,1)$, determinare il polinomio di Taylor di h di ordine 2 centrato in $x = 1$.

.... 7 punti

Risposta:
a) non esistono punti critici; b) $T_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{16}(x-1)^2$.

....

Svolgimento:
a) Si ha

$$\nabla f(x,y) = (3e^{x+y-2} - 2, 3e^{x+y-2} - 1) = (0,0) \iff 3e^{x+y-2} = 2 \ \text{ e } \ 3e^{x+y-2} = 1$$

che è impossibile. Quindi non esistono punti critici.

b) Si ha $h(1) = 1$ e

$$h'(x) = -\frac{f_x(x,h(x))}{f_y(x,h(x))} = -\frac{3e^{x+h(x)-2} - 2}{3e^{x+h(x)-2} - 1} = -1 + \frac{1}{3e^{x+h(x)-2} - 1},$$

da cui

$$h''(x) = -\frac{3e^{x+h(x)-2}(1 + h'(x))}{(3e^{x+h(x)-2} - 1)^2}.$$

Quindi

$$h'(1) = -1 + \frac{1}{3e^{1+h(1)-2} - 1} = -\frac{1}{2}$$

e

$$h''(1) = -\frac{3e^{1+h(1)-2}(1 + h'(1))}{(3e^{1+h(1)-2} - 1)^2} = -\frac{3}{8},$$

da cui segue la risposta.

(2) Sia $\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = e^t(\cos t, \sin t)$.

a) Calcolare la lunghezza di γ;

b) calcolare l'area del dominio limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ delimitato dal sostegno di γ e dal segmento di estremi $(0, e^{\pi/2})$ e $(0, -e^{-\pi/2})$.

. . . . 6 punti

Risposta:
a) $\sqrt{2}(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2})$; b) $|\Omega| = \frac{1}{4}(e^{\pi} - e^{-\pi})$.

. . . .

Svolgimento:
a) Si ha $\gamma'(t) = e^t(\cos t - \sin t, \sin t + \cos t)$, da cui $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}e^t$ e

$$|\gamma| = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2}e^t \mathrm{d}t = \sqrt{2}(e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}).$$

b) Segue dalle formule di Green che

$$|\Omega| \;=\; \iint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

Sul segmento si ha $x = 0$ e "$\mathrm{d}x = 0''$: perciò

$$|\Omega| \;=\; \frac{1}{2}\int_{\gamma^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

con γ^+ orientata nel verso delle t crescenti (la verifica dell'orientazione corretta è immediata con un disegno). Pertanto

$$\begin{aligned} |\Omega| \;&=\; \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^t\cos t(e^t\sin t)' - e^t\sin t(e^t\cos t)')\mathrm{d}t \\ &=\; \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}(e^{\pi} - e^{-\pi}). \end{aligned}$$

(3) Calcolare il baricentro del seguente insieme:

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, \ y^2+z^2 \leq x^2, \ x^2+y^2+z^2 \leq 8\right\}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:
$x_B = \frac{3}{4(\sqrt{2}-1)}, \ y_B = z_B = 0$

. . . .

Svolgimento:
Per simmetria, $y_B = z_B = 0$. Passando in coordinate sferiche,

$T(r,\varphi,\theta) = (x,y,z) = (r\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi\sin\theta)$ $r \geq 0, \ \varphi \in [0,2\pi), \ \theta \in [0,\pi)$

si ha

$$S = T^{-1}(\Omega) = \{0 \leq r \leq 2\sqrt{2}, \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \ 0 \leq \theta \leq \pi/4\}.$$

Quindi

$$|\Omega| = \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 32\pi(\sqrt{2}-1)/3$$

e

$$\iiint_\Omega x \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \int_0^{2\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} r^3 \sin\theta\cos\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 8\pi,$$

da cui segue la risposta.

(4) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'(x) - \alpha y(x) = 2e^{-2x} - 3.$$

. . . . 6 punti

Risposta:

$$\begin{aligned} y(x) &= -e^{-2x} - 3x + C && \text{se } \ \alpha = 0; \\ y(x) &= Ce^{-2x} + 2xe^{-2x} + \frac{3}{2} && \text{se } \ \alpha = -2; \\ y(x) &= Ce^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha+2}e^{-2x} - \frac{3}{\alpha} && \text{altrimenti.} \end{aligned}$$

. . . .

Svolgimento:

(5) Rispondere alle due domande che saranno distribuite durante il compito.

1) Sia $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma differenziale di classe C^1.

   (i) Dare la definizione di: " ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$ "

   (ii) Dare la definizione di: " ω è esatta in $\mathbb{R}^2$ "

   (iii) Dire se è vero che " ω è chiusa in $\mathbb{R}^2$ se e solo se ω è esatta in $\mathbb{R}^2$ ", motivando la risposta.

2) Determinare (purché esistano) i versori normali alla superficie $\Sigma = \{(uv, u, v^3) : u^2 + v^2 \leq 4\}$ nel punto $(1, 1, 1)$.

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

Svolgimento: