ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 24.09.2015 **B**

Cognome: ....VERSIONE.............. Nome: ...PRELIMINARE.........

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Data l'equazione

$$(y+1)x^2 + (y^2-3)x + \sin(xy) = -2,$$

si dimostri che in un intorno del punto $(1,0)$ essa definisce implicitamente il grafico di una funzione φ della sola variabile x. Si determini

$$\lim_{x\to 1} \frac{\varphi(x)}{(x-1)}.$$

.... 6 punti

Risposta:

$1/2$.

....

Svolgimento:

$$f(x,y) = (y+1)x^2 + (y^2-3)x + \sin(xy) + 2$$

$$f(1,0) = 0$$

$$f_x = 2x(y+1) + y^2 - 3 + y\cos(xy) \qquad f_x(1,0) = -1$$

$$f_y = x^2 + 2xy + x\cos(xy) \qquad f_y(1,0) = 2$$

Poiché $f_y(1,0) \neq 0$, φ è ben def in un intorno di $x=1$, e si ha $\varphi'(0) = -\frac{f_x(1,0)}{f_y(1,0)} = \frac{1}{2}$

Quindi $\lim_{x\to 1} \frac{\varphi(x)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\varphi'(x)}{1} = \frac{1}{2}$

(2) Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il campo vettoriale piano

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(-\frac{y^2+\alpha}{y(x-1)^2}\,,\ \frac{xy^2-1}{y^2(x-1)}\right)$$

sia conservativo nell'insieme $(1,+\infty)\times(0,+\infty)$. Per tali valori di α, calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ lungo la curva

$$\gamma(t) = \left(2+\frac{4}{\pi}\arctan(1-t)\,,\ \sqrt{1+3t^2}\right)\,, \qquad t\in[0,1]\,.$$

$\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta: $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{x} = \left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + 2 - (1+1)\frac{1}{2} - 1$

$= \dfrac{5}{2}$.

Svolgimento:

$$U = -\int \frac{y^2+\alpha}{y}\,\frac{1}{(x-1)^2}\,dx = \left(y+\frac{\alpha}{y}\right)\frac{1}{x-1} + c(y)$$

$$U_y = \left(1-\frac{\alpha}{y^2}\right)\frac{1}{x-1} + c'(y) \overset{?}{=} \frac{xy^2-1}{y^2(x-1)}$$

$$\Longleftrightarrow\ c'(y) = \frac{xy^2-1-y^2+\alpha}{y^2(x-1)} = \frac{y^2(x-1)+\alpha-1}{y^2(x-1)}$$

$$= 1 + \frac{\alpha-1}{y^2(x-1)}$$

e il termine che definisce $c'(y)$ è indipendente da x se e solo se $\alpha=1$. In tal caso la funzione potenziale è

$$U(x,y) = \left(y+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{x-1} + y$$

e poiché $\gamma(0) = (3,1)$ e $\gamma(1) = (2,2)$, si ottiene

$$\int \underline{F}\cdot d\underline{x} = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0))$$

(3) Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ l'insieme definito da

$$E = \left\{(x, y, z) \ : \ y \geq 0 \, , \ y^2 - y^4 \geq \sqrt{x^2 + z^2}\right\}.$$

a) Mostrare che E è un solido di rotazione (attorno a quale asse?) e disegnarlo;
b) calcolare il volume di E;
~~c) determinare i versori normali a ∂E nel punto $(0, 3/16, -3/16)$.~~ (*)

7 punti

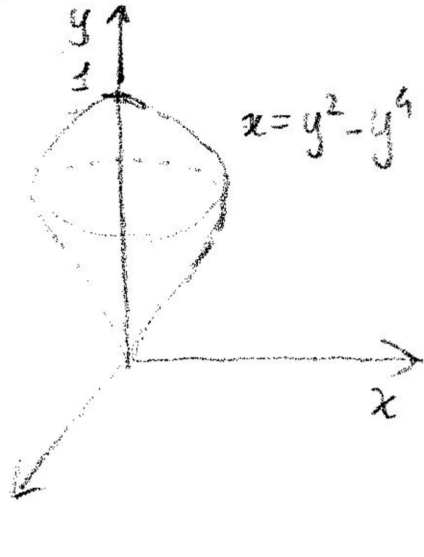
Risposta: a) asse y

b) $\pi\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{2}{7}\right)$

Svolgimento:

a) Posto $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$ $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi]$, si ha

$y^2 - y^4 \geq \sqrt{x^2 + z^2} = r$, quindi E è di rotazione attorno all'asse y.



b) Integro per strati:

$$|E| = \int_0^1 \pi\left(y^2 - y^4\right)^2 dy = \pi\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{2}{7}\right)$$

(*) c) Il punto $(0, 3/16, -3/16)$ non appartiene a ∂E.
Quindi il punto (c) non verrà considerato nella valutazione della prova.

(4) Data l'equazione differenziale

$$y''(x) + 2\alpha y'(x) + 3y(x) = 0\,,$$

determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali **tutte** le soluzioni dell'equazione sono infinitesime per $x \to +\infty$.

. . . . 6 punti

Risposta:

$$\alpha > 0.$$

. . . .

Svolgimento:

EDO lineare omogenea del II ordine.

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + 3 = 0 \iff \begin{array}{ll} \lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 3} & \text{se } \alpha^2 > 3 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = -\alpha & \text{se } \alpha^2 = 3 \\ \lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\sqrt{3 - \alpha^2} & \text{se } \alpha^2 < 3 \end{array}$$

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} & \text{se } \alpha^2 \neq 3 \\ C_1 e^{-\alpha x} + C_2 x e^{-\alpha x} & \text{se } \alpha^2 = 3 \end{cases}$$

Quindi $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$\iff \begin{cases} -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3} < 0 & \text{se } \alpha^2 > 3 \\ -\alpha < 0 & \text{se } \alpha^2 = 3 \\ -\alpha < 0 & \text{se } \alpha^2 < 3 \end{cases}$$

da cui segue la risposta (si confronti con il modello del moto armonico smorzato).