Analisi matematica 2 (I mod) – Ing. Elettronica
PROFF. GIACOMELLI e VERGARA CAFFARELLI
ESEMPI DI ESERCIZI D'ESAME — A.A.08/09

Versione preliminare – si prega di segnalare eventuali errori

---

*) Determinare (purché esistano) i punti di massimo locale, i punti di minimo locale e i punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - xy^2 + y^3 - y \ , \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

....

Si ha

$$\begin{cases} f_x(x,y) = x^2 - y^2 = 0 \\ f_y(x,y) = -2xy + 3y^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y = -x \\ 5y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

da cui segue che i punti critici sono $P_1 = (1,1)$, $P_2 = (-1,-1)$, $P_3 = (-1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$, $P_4 = (1/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$. Si ha

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ -2y & 6y - 2x \end{pmatrix}.$$

da cui si deduce che P_1 è un punto di minimo locale, P_2 è un punto di massimo locale, P_3 e P_4 sono punti di sella.

---

*) Determinare i punti di massimo locale, i punti di minimo locale e i punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^2 y + \frac{1}{3}y^3 + x^2 + \frac{1}{2}y^2 - 2y \ , \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

....

Risposta: $(0,1)$ punto di minimo locale, $(0,-2)$ punto di massimo locale, $(\sqrt{2},-1)$ e $(-\sqrt{2},-1)$ punti di sella.

---

*) Determinare i punti di massimo locale, i punti di minimo locale e i punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3 + (x - y - 6)^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

....

Risposta: $(-6,6)$ punto di massimo locale, $(2,-2)$ punto di minimo locale, $\pm 2\sqrt{3}(1,1)$ punti di sella.

---

*) Determinare (purché esistano) i punti di massimo locale, i punti di minimo locale e i punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{y^4}{4} + 2x^2 + xy.$$

. . . .

Risposta: $(0,0)$ punto di sella, $\pm(-1/8, 1/2)$ punti di minimo locale.

---

*) Data nel piano l'iperbole

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + 3xy + y^2 + 4 = 0\}$$

determinare i punti di Γ che hanno minima distanza dall'origine.

. . . .

Conviene minimizzare la distanza al quadrato, ovvero la funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$. Si tratta quindi di trovare i punti di minimo di f vincolati su Γ. Posto

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 3xy + y^2 + 4)\,,$$

si ottiene con semplici calcoli che le soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + \lambda(2x + 3y) = 0 \\ L_y &= 2y + \lambda(3x + 2y) = 0 \\ L_\lambda &= x^2 + 3xy + y^2 + 4 = 0 \end{aligned}$$

sono $(2,-2)$ e $(-2,2)$. Poiché $\sup_\Gamma f = +\infty$, almeno uno dei due punti è di minimo; poiché $f(-2,2) = f(2,-2)$, lo sono entrambi.

---

*) Calcolare

$$\iint_D |y - 2x^2|\ dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le y \le 2x \le 3\right\}\ .$$

. . . .

Si ha $3x \le 2$ se e solo se $x \le 1$. e $3x \ge 0$ se e solo se $x \ge 0$. Perciò

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0,1],\ 0 \le y \le 2x\right\}\ .$$

Quindi

$$\begin{aligned} \iint_D |y - 2x^2|\ dxdy &= \int_0^1 \int_0^{2x} |y - 2x^2|\ dy\ dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{2x^2} (2x^2 - y)\ dy\ dx + \int_0^1 \int_{2x^2}^{2x} (y - 2x^2)\ dy\ dx \\ &= \int_0^1 (4x^4 - 2x^4 + 2x^2 - 4x^3 - 2x^4 + 4x^4)\ dx \\ &= \frac{4}{5} - 1 + \frac{2}{3} = \frac{7}{15}\ . \end{aligned}$$

---

*) Sia

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 \le y\,,\ x^2 + y^2 \le 2\right\}.$$

Calcolare

$$\iint_D x^2 y\ dxdy.$$

. . . .

Risposta: $\frac{34}{105}$.

---

*) Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$, e sia

$$D = \left\{(x,y) \in T : x^2 + y^2 \geq 1\right\}.$$

Calcolare

$$\iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\, dxdy$$

(si consiglia il passaggio in coordinate polari).

. . . .

Risposta: $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

. . . .

*) Sia

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq y \leq 2\,,\ 3 - 2x \leq y \leq 5 - 2x\right\}\,.$$

calcolare

$$\iint_D \frac{1}{x^2}\, dxdy.$$

. . . .

Poiché

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq y \leq 2\,,\ \frac{3-y}{2} \leq x \leq \frac{5-y}{2}\right\}\,,$$

si ottiene

$$\iint_D \frac{1}{x^2}\, dxdy = \int_1^2 \int_{\frac{3-y}{2}}^{\frac{5-y}{2}} \frac{1}{x^2}\, dx\, dy = 2\log\left(\frac{3}{2}\right)\,.$$

---

*) Siano D_1 il settore del disco di centro l'origine e raggio 1 contenuto nel secondo quadrante, D_2 il triangolo di vertici $(-1,0)$, $(0,1)$ e $(0,0)$, e $D = D_1 \setminus D_2$. Calcolare

$$\iint_D xy\, dxdy.$$

. . . .

Risposta: $-1/12$.

---

*) Determinare la lunghezza della seguente curva:

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(\frac{e^{-3t}}{3}, \frac{e^{-2t}}{2}\right)\,.$$

. . . .

Si ha

$$\gamma'(t) = (-e^{-3t}, -e^{-2t}), \quad |\gamma'(t)| = \sqrt{e^{-6t} + e^{-4t}} = e^{-2t}\sqrt{1 + e^{-2t}}.$$

Pertanto, utilizzando la sostituzione $y = e^{-t}$, si ottiene

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_0^1 e^{-2t}\sqrt{1+e^{-2t}}\;dt = \int_{e^{-1}}^1 y\sqrt{1+y^2}\;dy = \frac{1}{3}(1+y^2)^{3/2}\Big|_{e^{-1}}^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(2^{3/2} - \left(1+\frac{1}{e^2}\right)^{3/2}\right). \end{aligned}$$

---

*) Siano

$$\gamma : [1,e] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, t\log t - 1)$$

e

$$f(x,y) = \frac{y+1}{x^2}\ .$$

Calcolare

$$\int_\gamma f ds.$$

....

Si ha

$$\dot\gamma(t) = (1, 1+\log t) \quad |\dot\gamma(t)| = \sqrt{1+(1+\log t)^2}\,, \quad f(\gamma(t)) = \frac{\log t}{t}\,.$$

Perciò

$$\int_\gamma f\,ds = \int_1^e \frac{\log t}{t}\sqrt{1+(1+\log t)^2}\,dt\,.$$

Vi sono vari modi per risolvere tale integrale. Ad esempio, posto $y = 1+\log t$ si ottiene $dy = dt/t$ e $\log t = y-1$, ovvero

$$\int_1^e \frac{\log t}{t}\sqrt{1+(1+\log t)^2}\,dt = \int_1^2 (y-1)\sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{1}{3}(1+y^2)^{3/2}\Big|_1^2 - \int_1^2 \sqrt{1+y^2}\,dy\,;$$

per il secondo addendo si osserva che, mediante la sostituzione $y = \sinh s$,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+y^2}\,dy &= \int \cosh^2 s\,ds = \sinh s\cosh s - \int \sinh^2 s\,ds \\ &= \sinh s\cosh s - \int (\cosh^2 s - 1)\,ds \\ &= y\sqrt{1+y^2} - \int \sqrt{1+y^2}\,dy + \operatorname{arc\,sinh} y\,, \end{aligned}$$

ovvero

$$\int_1^2 \sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{1}{2}\left(y\sqrt{1+y^2} + \operatorname{arc\,sinh} y + C\right)\Big|_1^2\ .$$

Pertanto

$$\int_1^e \frac{\log t}{t}\sqrt{1+(1+\log t)^2}\,dt = \frac{2}{3}\sqrt{5} - \frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{2}(\operatorname{arc\,sinh} 2 - \operatorname{arc\,sinh} 1).$$

---

*) Sia

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(t^3, t\right)\ .$$

Calcolare
$$\int_\gamma x\ ds.$$
. . . .

Risposta: $\frac{10^{3/2}-1}{54}$.

---

*) Sia
$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2}\ ,\ \frac{t^3}{3}\right).$$
Calcolare
$$\int_\gamma (1+x)\ ds.$$
. . . .

Risposta: $(11\sqrt{2}-4)/15$.

---

*) (a) Determinare (purché esistano) i valori di $A \in \mathbb{R}$ per i quali la forma
$$\omega(x,y) = \frac{1}{x}\ dx + \left(Axy + \frac{1}{y}\right)\ dy$$
è chiusa in $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y > 0\big\}$.
(b) Calcolare
$$\int_{\partial B^+} \frac{1}{x}\ dx + \left(xy + \frac{1}{y}\ dy\right), \qquad B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-2)^2 + (y-3)^2 \le 1\big\}\ .$$
. . . .

(a) Si ha
$$0 = \partial_y(1/x) \stackrel{!}{=} \partial_x(Axy + 1/y) = Ay \qquad \Longleftrightarrow \qquad A = 0\ .$$
(b) Utilizzando il teorema della divergenza
$$\int_{\partial B^+} \frac{1}{x}\ dx + \left(xy + \frac{1}{y}\right)\ dy = \iint_B y\ dxdy$$
e passando in coordinate polari, $(x,y) = (2 + r\cos\theta, 3 + r\sin\theta)$,
$$\iint_B y\ dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(3 + r\sin\theta)\ d\theta\ dr = 3\pi\ .$$

---

*) Determinare (purché esistano) i valori di $A \in \mathbb{R}$ per i quali la forma differenziale
$$\omega = \frac{1}{\cos^2(xy)} \left(\left(\frac{\sin(2xy)}{1+A^2} + xy\right) dx + x^2\ dy\right)$$
è esatta in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |2xy| < \pi\}$.
. . . .

Risposta: $A = \pm 1$.

---

*) (a) Determinare una primitiva della forma differenziale

$$\omega(x,y) = \arctan(y)\ dx + \left(\frac{x}{1+y^2} + 3y\right)\ dy\ .$$

(b) Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da $\gamma(t) = (\log(e+t), 1-t)$. Calcolare

$$\int_{+\gamma} \omega\ .$$

....

Risposta: (a) $U(x,y) = x\arctan(y) + \frac{3}{2}y^2$; (b) $U(\log(e+1),0) - U(1,1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{3}{2}$.

---

*) Siano

$$\omega = \frac{x^2-y^2}{x^2y^2}\,(y\,dx - x\,dy)$$

e

$$\gamma : \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (2+\cos t, 2+\sin t).$$

Calcolare

$$\int_\gamma \omega.$$

....

Si cerca, se esiste, una primitiva U di ω: integrando rispetto a x

$$U(x,y) = \int \frac{x^2-y^2}{x^2y}\,dx = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) dx = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + C(y),$$

da cui

$$U_y = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{x} + c'(y) = \frac{y^2-x^2}{xy^2} + C'(y),$$

quindi

$$U_y dy = -\frac{x^2-y^2}{xy^2}dy \iff C'(y) = 0.$$

Perciò ω è esatta e $U(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + C$. Si ha quindi

$$\int_\gamma \omega = U(\gamma(2\pi)) - U(\gamma(3\pi/2)) = U(3,2) - U(2,1) = -\frac{1}{3}.$$

---

*) Sia ω la forma differenziale in $\mathbb{R}^2$ definita da

$$\omega = \Big(A(x^2y + y^2 + 1) + 2e^y - ye^x\Big)dx + \left(\frac{x^3}{3} + 2xy + B(2xe^y - e^x)\right) dy$$

e sia $\gamma : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

Determinare (purché esistano) i valori di $A \in \mathbb{R}$ e $B \in \mathbb{R}$ per i quali ω è esatta in $\mathbb{R}^2$; per tali valori, calcolare

$$\int_{+\gamma} \omega \, .$$

. . . .

Risposta: $A = B = 1$; -4.

---

*) Calcolare

$$\int_{\partial D^+} \frac{dz}{z^4 - 3z^2 - 18}, \qquad D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le 2\} \, .$$

. . . .

Si ha

$$s^2 - 3s - 18 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad s = 6 \ \text{ oppure } \ s = -3.$$

Perció

$$z^4 - 3z^2 - 18 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = z_i, \quad i = 1, \ldots, 4,$$

dove

$$z_1 = \sqrt{6}, \ z_2 = -\sqrt{6}, \ z_3 = i\sqrt{3}, \ z_4 = -i\sqrt{3}$$

che sono i quattro poli (del primo ordine) della funzione integranda. Poiché $z_1, z_2 \notin D$, $z_3, z_4 \in D$,

$$R(z_3) = \lim_{z \to z_3} \frac{z - z_3}{z^4 - 3z^2 - 18} = \lim_{z \to z_3} \frac{1}{(z^2 - 6)(z + i\sqrt{3})} = \frac{i}{18\sqrt{3}}$$

e

$$R(z_4) = \lim_{z \to z_4} \frac{z - z_4}{z^4 - 3z^2 - 18} = \lim_{z \to z_4} \frac{1}{(z^2 - 6)(z - i\sqrt{3})} = -\frac{i}{18\sqrt{3}},$$

si conclude che l'integrale vale 0.

---

*) Calcolare

$$\int_{\partial D^+} \frac{dz}{z^2 - 3iz - 2}, \qquad D = \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z - 1| \le \sqrt{3}\right\} .$$

. . . .

Risposta: -2π.

---

*) Sia $Q \subset \mathbb{C}$ il quadrato di vertici $\pm 1 \pm i$. Calcolare

$$\int_{+\partial Q} \frac{\cos z}{z^3} \, dz \, .$$

. . . .

Risposta: $-i\pi$.

---

*) Sia $Q \subset \mathbb{C}$ la corona circolare di centro l'origine e raggi 1/2 e 3/2. Calcolare

$$\int_{+\partial Q} \frac{\sin z}{z^3 - (2 + i)z^2 + 2iz} \, dz \, .$$

. . . .

Risposta: $2\pi \sin(i)/(i-2)$.

---

*) Determinare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(x) = \begin{cases} xe^{3x} & \text{se } x \in [0,2] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

. . . .

Si ha

$$\mathcal{L}[f](p) = \int_0^\infty f(x)e^{-px}\ dx = \int_0^2 xe^{(3-p)x}\ dx$$

e integrando per parti si ottiene

$$\mathcal{L}[f](p)\frac{1+(5-2p)e^{6-2p}}{(3-p)^2}.$$

(si osservi che l'ascissa di convergenza è $-\infty$ poiché f è a supporto compatto; lo studente controlli che la singolarità di $\mathcal{L}[f](p)$ in $p=3$ è apparente e quindi $\mathcal{L}[f](p)$ è analitica in tutto $\mathbb{C}$).

---

*) Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 & \text{se } x \in (-\pi, \pi] \setminus \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

. . . .

La funzione è pari, quindi si sviluppa in serie di soli coseni. Si ha

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\ dx = \frac{1}{2}, \\ a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(kx)\ dx = \frac{1}{k\pi}\sin(kx)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right), \quad k \geq 1, \end{aligned}$$

ovvero

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2j, \\ \frac{2(-1)^j}{(2j+1)\pi} & \text{se } k = 2j+1, \end{cases} \qquad j \geq 0.$$

Perciò

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1}\cos((2j+1)x).$$

Analisi matematica 2 (I mod) – Ing. Elettronica
PROFF. GIACOMELLI e VERGARA CAFFARELLI
ESEMPI DI ESERCIZI D'ESAME — A.A.07/08

Versione preliminare – si prega di segnalare eventuali errori

---

*) Determinare (se esistono) i punti di massimo locale, i punti di minimo locale e i punti di sella della seguente funzione:

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + y^2 - 6y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

....

Si ha

$$\begin{cases} f_x(x,y) = x^2 + xy = x(x+y) = 0 \\ f_y(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 2y - 6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} x = -y \\ y^2 + 4y - 12 = 0 \end{cases}$$

da cui segue che i punti critici sono $P_1 = (0,3)$, $P_2 = (6,-6)$, $P_3 = (-2,2)$. Si ha

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+y & x \\ x & 2 \end{pmatrix}.$$

Perciò $\det D^2 f(P_1) = 6$, $\det D^2 f(P_2) = -24$, $\det D^2 f(P_3) = -8$, da cui segue che P_1 è un punto di minimo locale e P_2, P_3 sono punti di sella.

---

*) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}(x+y+4)^2 \ ;$$

determinare (se esistono) i punti di massimo locale e i punti di minimo locale di f in $\mathbb{R}^2$.

....

Risposta: $(2,2)$ punto di minimo locale, $(-1,-1)$ punto di massimo locale $((\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ punti di sella.

---

*) Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x + 2y$ nel dominio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

....

Poiché f è regolare e $\nabla f = (1,2)$, il massimo e il minimo assoluto sono assunti su ∂D. Per deteminarli si può parametrizzare la frontiera o utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. In quest'ultimo caso, posto

$$L(x,y,\lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} L_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L_y = 2 + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$(x, y, \lambda) = \pm(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, -\sqrt{5}/2).$$

Perciò $\max_D f = \sqrt{5}$ e $\min_D f = -\sqrt{5}$.

---

*) Utilizzando il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{2}\ xy$$

nell'insieme

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}\ .$$

. . . .

Risposta: $\max\limits_{\Gamma} f = 1,\ \min\limits_{\Gamma} f = -1/2.$

---

*) Calcolare

$$\iint_D \cos(\pi y)\ dxdy, \quad D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ |x - 2| \leq y \leq \frac{1}{2}x\right\}.$$

. . . .

Si ha

$$D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [4/3, 4],\ |x - 2| \leq y \leq x/2\big\}\ .$$

Perciò

$$\begin{aligned}
\iint_D \cos(\pi y)dxdy &= \int_{4/3}^{4}\int_{|x-2|}^{x/2} \cos(\pi y)dy\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{4/3}^{4} (\sin(\pi x/2) - \sin(\pi|x - 2|))\, dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{4/3}^{4} \sin(\pi x/2)dx - \frac{1}{\pi}\int_{4/3}^{2} \sin(-\pi x)dx - \frac{1}{\pi}\int_{2}^{4} \sin(\pi x)dx \\
&= -\frac{2}{\pi^2}\cos(\pi x/2)\Big|_{4/3}^{4} - \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\Big|_{4/3}^{2} + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\Big|_{2}^{4} \\
&= \frac{1}{\pi^2}(-2 - 1 - 1 - 1/2 + 1 - 1) = -\frac{9}{2\pi^2}.
\end{aligned}$$

---

*) Sia

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}\ ;$$

calcolare

$$\iint_Q \sqrt{|y - x|}\ dxdy\ .$$

. . . .

Risposta: 8/15.

---

*) Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \leq x^2,\ x^2 + y^2 \leq 2\}\ ;$$

calcolare

$$\iint_D x \; dxdy \; .$$

....

Risposta: $2^{3/2}/3 + 7/12$.

---

*) Calcolare

$$\int_\gamma (x \; e^y \; dx + \sin x \; dy) \, ,$$

dove γ è una curva semplice regolare che ha come sostegno l'insieme

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], \; y = x^2\right\}$$

percorso una sola volta da $(0, 0)$ a $(1, 1)$.

....

La parametrizzazione più semplice della curva è $\gamma(x) = (x, x^2)$, $x \in [0, 1]$. Si ottiene

$$\begin{aligned} \int_\gamma (x \; e^y \; dx + \sin x \; dy) &= \int_0^1 \left(xe^{x^2} + 2x \sin x\right) dx = \left(\frac{1}{2}e^{x^2} + 2\sin x - 2x\cos x\right)\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(e - 1) + 2\sin 1 - 2\cos 1. \end{aligned}$$

---

*) (a) Determinare (se esiste) una primitiva della forma differenziale

$$\omega = y^2 dx + 2xy \; dy;$$

(b) calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, con

$$\gamma(t) = (1 - \sin(\pi t^2), \cos(\pi t^2)), \quad t \in [0, 1].$$

....

(a) $U(x, y) = xy^2 + C$.
(b) Osservando che $\gamma(1) = (1, -1)$ e $\gamma(0) = (1, 1)$, si ottiene

$$\int_\gamma \omega = U(1, -1) - U(1, 1) = 0.$$

---

*) Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x, y) = (ye^{xy} + 3x)dx + (xe^{xy} + 1)dy$$

e sia γ la curva definita da

$$\gamma(\theta) \;\; = \;\; \begin{cases} \cos\theta \\ \sin\theta \end{cases} , \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \; ;$$

calcolare

$$\int_{+\gamma} \omega \; .$$

. . . .

Ragionando come nell'Esercizio precedente, si ottiene:

$$\int_{+\gamma} \omega = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} - e^{-1/2}.$$

---

*) Calcolare

$$\int_{+\partial\Omega} \left(x + \arctan\left(e^{y^2}\right)\right) dy,$$

dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \le 1, \ -x \le y \le 1\right\}.$$

. . . .

Per le formule di Gauss-Green,

$$\int_{+\partial\Omega} \left(x + \arctan\left(e^{y^2}\right)\right) dy = \iint_{\Omega} \left(x + \arctan\left(e^{y^2}\right)\right)_x \ dxdy = |\Omega| = 2.$$

---

*) Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y) = (y-x)\,dx + x\,dy$$

e sia γ la curva definita da

$$\gamma(t) \quad = \quad \begin{cases} e^t \\ \cos t \end{cases} , \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ ;$$

calcolare

$$\int_{+\gamma} \omega \ .$$

. . . .

Risposta: $-e^{\pi}/4 - 1/2$.

---

*) Sia S il grafico della funzione

$$z = x + 3y, \quad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1, \ y \ge 0\}.$$

Calcolare

$$\iint_S y \ d\sigma.$$

. . . .

Si ha

$$\iint_S y \ d\sigma \quad = \quad \iint_D y\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \ dxdy = \sqrt{11}\int_0^1 \int_0^{\pi} r^2 \sin\theta \ d\theta dr = \frac{2}{3}\sqrt{11}.$$

---

*) Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da

$$f(z) = \frac{e^{-iz}}{(z-i)(z^2+5i)} \ ;$$

(a) determinarne i poli;
(b) calcolare

$$\int_{\partial D+} f(z)\ dz, \quad D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}.$$

. . . .

(a). I poli sono tutti e soli soluzioni di

$$(z-i)(z^2+5i) = 0 \iff z = i,\ z^2 = -5i = 5e^{\frac{3i\pi}{2}}.$$

Quindi i poli sono $z_0 = i$, $z_1 = \sqrt{5/2}(-1+i)$, $z_2 = \sqrt{5/2}(1-i)$.
(b). L'unico polo interno a D è z_0. Quindi

$$\int_{\partial D+} f(z)\ dz = 2\pi i\ \mathrm{Res} f|_{z_0} = \frac{2\pi i e}{5i-1}.$$

---

*) Calcolare

$$\int_{+\partial\Omega} \frac{1}{z^2+2iz+2}\ dz,$$

dove

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ |z+i| \le 2\}.$$

. . . .

Si ha

$z^2+2iz+2 = (z+i)^2+3 = 0 \iff z = z_1 = (-1-\sqrt{3})i$ oppure $z = z_2 = (-1+\sqrt{3})i$.

Si ha $z_1 \in \Omega$, $z_2 \in \Omega$ e

$$\mathrm{Res}(z_1) = \frac{1}{z_1 - z_2}, \quad \mathrm{Res}(z_2) = \frac{1}{z_2 - z_1},$$

perciò l'integrale è nullo.

---

*) Sia

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| \le 2\} \ ;$$

calcolare

$$\int_{+\partial\Omega} \frac{dz}{z^2-(3+2i)z+1+3i} \ .$$

. . . .

Risposta: $-2\pi\ i$.

---

*) Determinare lo sviluppo in serie di Laurent centrato in $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^4(z+2)} \ ;$$

utilizzare tale sviluppo per determinare il residuo di f in $z = 0$.

. . . .

Si ha

$$\frac{1}{z^4(z+2)} = \frac{1}{2z^4}\frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{2z^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}z^{n-4} = \frac{1}{32}\sum_{k=-4}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}z^k.$$

In particolare il residuo di f in $z = 0$ vale $-1/16$.

---

*) Determinare la serie di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pari e periodica di periodo 2π, tale che

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{se } \; x \in \left[0, \frac{1}{2}\pi\right) \\ 1 & \text{se } \; x \in \left[\frac{1}{2}\pi, \pi\right]. \end{cases}$$

. . . .

Poiché f è pari, si ha

$$\begin{aligned} b_n &= 0, \\ a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = -1, \\ a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\;dx = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(nx)\;dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos(nx)\;dx \\ &= -\frac{4}{n\pi}\sin(n\pi/2) - \frac{2}{n\pi}\sin(n\pi/2) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ -\frac{6}{(2k+1)\pi}(-1)^k & n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Perciò

$$f(x) = -\frac{1}{2} - \frac{6}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos((2k+1)x).$$

---

*) Determinare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ e^{-2x} & x \geq 0 \end{cases}.$$

. . . .

Per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathcal{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}\;dx = \int_0^{\infty} e^{-(2+i\omega)x}\;dx = \frac{e^0}{2+i\omega} - \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-(2+i\omega)x}}{2+i\omega} = \frac{1}{2+i\omega}.$$

---

*) Determinare la trasformata di Laplace (unilatera) della funzione $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, 2) \cup (4, \infty) \\ 3 - x & x \in [2, 4] \end{cases}.$$

. . . .

Risposta: $\frac{e^{-4p}}{p^2}(1+p+e^{2p}(p-1))$.

Esempi di esercizi d'esame – A.A. 2006/07
Analisi Matematica 2 – Ingegneria Elettronica
Proff. G. Vergara Caffarelli e L. Giacomelli

versione preliminare, si prega di segnalare eventuali errori

---

*) Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = 16x^2 + y - \frac{1}{4}xy^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

....

Il punto critico è $(1/8, 2)$ ed è un punto di sella.

---

*) Determinare i punti stazionari della funzione

$$f(x, y) = e^x \left(x^2 + \frac{4}{9}y^3 - 3y \right)$$

e precisarne la natura.

....

I punti stazionari sono $(1, 3/2)$ e $(-3, 3/2)$; il primo è un punto di minimo locale, il secondo è un punto di sella.

---

*) Determinare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

....

Si ha

$$\begin{cases} f_x = 6x^2 - 6y = 0 \\ f_y = -6x + 6y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = y \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0) \text{ oppure } (x, y) = (1, 1).$$

Inoltre

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \det(D^2 f(0, 0)) = -36 < 0, \\ \det(D^2 f(1, 1)) = 36 > 0 \ e \ f_{yy}(1, 1) = 6 > 0, \end{array}$$

per cui $(0,0)$ è un punto di sella e $(1,1)$ è un punto di minimo locale.

---

*) Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma xyz \, \mathrm{d}s$$

dove $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t), \quad t \in [0, \pi]$.

....

$-\pi/(2\sqrt{2})$ (calcolo diretto).

---

*) Calcolare

$$\int_{+\gamma} xy \, \mathrm{d}x + xy \, \mathrm{d}y$$

dove γ è la porzione di circonferenza unitaria con centro nell'origine contenuta nei primi due quadranti.

....

$2/3$ (calcolo diretto).

---

*) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D (x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

dove

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ e^x + e^{-x} \leq y \leq \frac{5}{2} \right\}.$$

....

Dopo aver tracciato un grafico qualtitativo si osserva che

$$e^x + e^{-x} = \frac{5}{2} \iff x = \pm \log 2$$

e che D è simmetrico rispetto all'asse y. Quindi

$$\iint_D (x+y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2 \int_0^{\log 2} \int_{e^x + e^{-x}}^{\frac{5}{2}} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 5 \log 2 - 3.$$

---

*) Calcolare

$$\iint_\Omega \frac{y^2}{x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2x^2, \ y^2 \leq y \leq 3y^2\}.$$

. . . .

Introducendo il cambio di variabili

$$(u,v) = \Psi(x,y) = \left(\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x}\right)$$

si ha

$$\Psi(\Omega) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq u \leq 1,\ \frac{1}{3} \leq v \leq 1\right\}$$

e

$$\det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right) = \det\begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix} = 3.$$

Perciò

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{y^2}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Psi(\Omega)} v\ \frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{3} = \frac{1}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{\frac{1}{3}}^{1} v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{2}{27}.$$

---

*) Calcolare

$$\iint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq y \leq (x+1)^2,\ 0 \leq x \leq 5-y\right\}.$$

. . . .

Dopo aver tracciato un grafico qualitativo, si osserva che $x = 5 - y$ se e solo se $y = 5 - x$ e che

$$\begin{cases} (x+1)^2 = 5-x \\ x \geq 0 \end{cases} \iff x = 1.$$

Quindi

$$\iint\limits_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^{(x+1)^2} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_1^5\int_0^{5-x} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{43}{20} + \frac{64}{3}.$$

---

*) Calcolare

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2-2x \leq 0\}$$

il (ovvero il cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1).

. . . .

Passando in coordinate polari con centro nell'origine,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad (r,\theta) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi),$$

si ottiene

$$x^2+y^2-2x=r^2-2r\cos\theta\le 0 \iff r\le 2\cos\theta \quad \text{e} \quad \cos\theta\ge 0.$$

Pertanto

$$\iint_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{9}.$$

---

*) Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega=\frac{2\cos(2x)}{3y+1}\,\mathrm{d}x-\frac{3\sin(2x)}{(3y+1)^2}\,\mathrm{d}y$$

lungo la curva $\gamma(t)=(2^{t/3},\log(1+t^7(e-1)))$, $t\in[0,1]$.

. . . .

La forma è esatta negli aperti connessi $A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y>-1/3\}$ e $A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y<-1/3\}$:

$$\omega=dU,\quad U(x,y)=\frac{\sin(2x)}{3y+1},\quad (x,y)\in A_1 \ \text{ oppure } \ (x,y)\in A_2.$$

Pertanto, poiché $\mathrm{im}\,(\gamma)\subset A_1$,

$$\int_{+\gamma}\omega=U(\gamma(1))-U(\gamma(0))=U(2^{1/3},1)-U(1,0)=\frac{1}{4}\sin(2^{4/3})-\sin 2.$$

---

*) (a) Determinare $A\in\mathbb{R}$ in modo tale che la forma differenziale

$$\omega=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left(-2xy\,dx+(x^2-Ay^2)\,dy\right)$$

sia chiusa nel suo dominio D;

(b) per tale valore di A calcolare $\displaystyle\int_\gamma\omega$, dove γ è una qualunque curva regolare in D che parte dal punto $(1,1)$ e arriva al punto $(2,2)$.

. . . .

Visto che per svolgere (b) risulterà necessario integrare la forma, conviene svolgere (a) cercandone le primitive (ricordiamo che: ω esatta in $D\Rightarrow\omega$ chiusa in D). Si ha

$$U(x,y)=-2\int\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{y}{x^2+y^2}+C(y),$$

e

$$U_y(x,y)=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}+C'(y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}+C'(y),$$

per cui se $A=1$ allora

$$dU=\omega\quad \text{con}\ \ U(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}+C$$

e in questo caso, poiché im$\gamma \subset D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$,

$$\int_\gamma \omega = U(2,2) - U(1,1) = -1/4.$$

---

*) Calcolare l'area della regione Ω delimitata dal sostegno della curva $\gamma = (t\cos t, t\sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$, e dal segmento che congiunge i punti $(0,0)$ e $(2\pi, 0)$.

. . . .

Per il Teorema della divergenza

$$\iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint_\Omega \mathrm{div}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}(x,y)\cdot \mathbf{n}_e\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_{+\partial\Omega}(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

Poiché il contributo sul segmento è nullo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\iint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[t\cos t(\sin t + t\cos t) - t\sin t(\cos t - t\sin t)]\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \frac{4\pi^3}{3}.\end{aligned}$$

---

*) Calcolare

$$\int_{\partial\Omega}\left(y^3 + x^3, y^3 - e^x\right)\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 2,\ x \le 0,\ y \ge 0\}$ ed $\mathbf{n}$ è la normale esterna ad Ω.

. . . .

Applicando il Teorema della divergenza e successivamente passando in coordinate polari si ottiene

$$\int_{\partial\Omega}\left(y^3 + x^3, y^3 - e^x\right)\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \iint_\Omega 3(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 3\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^3\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}.$$

---

*)Calcolare

$$\int_{\partial\Omega}\left(x + y^2 - 3, y + x^2 - 6\right)\cdot \mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 \le 0\}$ ed $\mathbf{n}$ è la normale esterna ad Ω.

. . . .

Poiché

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = (x-2)^2 + (y+1)^2 - 4,$$

Ω è il cerchio di centro $(2,-1)$ e raggio 2. Utilizzando il Teorema della divergenza si ottiene quindi

$$\int_{\partial\Omega} \big(x + y^2 - 3, y + x^2 - 6\big) \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}s = \iint_{\Omega} 2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 2|\Omega| = 8\pi.$$

---

*) Calcolare

$$\iint_S z^2\, \mathrm{d}\sigma$$

dove

$$S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = -\sqrt{3 - x^2 - y^2}\Big\}.$$

. . . .

Si tratta di una superficie cartesiana. Perciò si ottiene

$$\iint_S z^2\, \mathrm{d}\sigma = \iint_{\{x^2+y^2\le 3\}} \sqrt{3 - x^2 - y^2}\sqrt{3}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 2\pi\sqrt{3}\int_0^{\sqrt{3}} r\sqrt{3 - r^2}\, \mathrm{d}r = 6\pi.$$

---

*) Determinare i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x, y) = x^2+y$ nell'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

. . . .

La funzione ammette massimo e minimo (per il Teorema di Weierstrass), è regolare in Ω e non ha punti critici interni al dominio. Sulla frontiera, parametrizzata in coordinate polari, si ha

$$g(\theta) := f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos^2\theta + \sin\theta.$$

Studiandola, si ottiene che

$$\max g = g(\pi/6) = g(5\pi/6) = 5/4, \quad \min g = g(3\pi/2) = -1.$$

Quindi i punti di massimo assoluto sono $(\pm\sqrt{3}/2, 1/2)$ e il punto di minimo assoluto è $(0,-1)$.

---

*) Calcolare, nel campo complesso, l'integrale

$$\int_{+\partial D} \frac{e^z - 1}{z(z + 3)}\, \mathrm{d}z$$

nei seguenti due casi:

a) $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le 1\}$;

b) $D = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \le 5\}$.

. . . .

La funzione integranda ha una singolarità apparente in $z = 0$ e, un polo di ordine 1 in $z = -3$, in cui il residuo vale

$$\lim_{z\to -3} \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1 - e^{-3}}{3}.$$

Utilizzando il Teorema dei residui si ottiene quindi: 0 nel caso (a), $2i\pi\frac{1-e^{-3}}{3}$ nel caso (b).

---

*) Calcolare, nel piano complesso,

$$\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^3 - z}\,\mathrm{d}z$$

dove γ è la frontiera del cerchio di centro $z = 0$ e raggio 2, orientata positivamente.

. . . .

La funzione integranda ha una singolarità apparente in $z = 0$ e due poli del primo ordine in $z = \pm 1$, in cui il residuo vale

$$\lim_{z\to 1} \frac{\sin z}{z(z+1)} = \frac{\sin 1}{2}, \qquad \lim_{z\to -1} \frac{\sin z}{z(z-1)} = -\frac{\sin 1}{2}.$$

Perciò, per il Teorema dei residui, l'integrale vale 0.

---

*) Calcolare

$$\int_{+\partial\Omega} \frac{1}{\cos z}\,\mathrm{d}z,$$

dove

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 2\}.$$

. . . .

Gli zeri di $z \mapsto \cos z$ sono $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$. Perciò l'unico polo della funzione integranda interno a Ω è $z_0 = \frac{\pi}{2}$, e si ha

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\cos z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \frac{z - \frac{\pi}{2}}{\sin(\frac{\pi}{2} - z)} = -1.$$

Perciò, per il Teorema dei residui, l'integrale vale $-2\pi i$.

---

*) Calcolare

$$\int_{+\partial\Omega} \frac{1}{z^3 - 9i}\,\mathrm{d}z,$$

dove

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 3,\ \operatorname{Im} z > 0\}.$$

. . . .

I poli dell'integranda si determinano come segue:

$$z^3 = 9i = 9e^{i\pi/2} \iff z_k = 3^{2/3} e^{\frac{i}{3}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Si osserva che $z_0 = \frac{1}{2}3^{2/3}(\sqrt{3}+i) \in \Omega$, $z_1 = \frac{1}{2}3^{2/3}(-\sqrt{3}+i) \in \Omega$, $z_2 = -3^{3/2}i \notin \Omega$. Poiché

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)}, \quad \lim_{z\to z_1} \frac{1}{(z-z_0)(z-z_2)} = \frac{1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)},$$

segue dal Teorema dei residui che

$$\int_{+\partial\Omega} \frac{1}{z^3-9i}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i}{(z_0-z_1)}\left(\frac{1}{z_0-z_2} - \frac{1}{z_1-z_2}\right) = -\frac{2\pi i}{(z_0-z_2)(z_1-z_2)}.$$