ANALISI MATEMATICA 1 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 13.01.2016

Cognome: .... **Nome:** ....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

VERSIONE PRELIMINARE

(1) Determinare il dominio naturale $D \subseteq \mathbb{R}$, l'estremo superiore, l'estremo inferiore e gli eventuali punti di massimo o minimo locale o assoluto della funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |(\log(ex))^2 - 3\log x - 3|.$$

.... 7 punti

Risposta:
$\mathrm{dom} f = (0, +\infty)$; $\sup f = +\infty$, $\inf f = \min f = 0$, e^{-1} e e^2 punti di minimo locale, $e^{1/2}$ punto di massimo locale.
....

Svolgimento:
Si ha

$$(\log(ex))^2 - 3\log x - 3 = (\log x + 1)^2 - 3\log x - 3 = (\log x)^2 - \log x - 2 = (\log x + 1)(\log x - 2),$$

quindi

$$f(x) = \begin{cases} (\log x)^2 - \log x - 2 & \text{se } x \in (0, e^{-1}] \cup [e^2, +\infty) \\ -((\log x)^2 - \log x - 2) & \text{se } x \in (e^{-1}, e^2). \end{cases}$$

Si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2\log x - 1 & \text{se } x \in (0, e^{-1}) \cup (e^2, +\infty) \\ -2\log x + 1 & \text{se } x \in (e^{-1}, e^2), \end{cases}$$

quindi f è decrescente in $(0, e^{-1})$ e in $(e^{1/2}, e^2)$ e crescente in $(e^{-1}, e^{1/2})$ e in $(e^2, +\infty)$. Pertanto e^{-1} e e^2 sono punti di minimo locale e $e^{1/2}$ è punto di massimo locale. Infine

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$

quindi $\sup f = +\infty$ e $\inf f = \min f = f(e^{-1}) = f(e^2) = 0$.

(2) Determinare tutti i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la seguente serie è convergente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin\left(\frac{4}{k^3}\right) + \frac{\alpha}{k^3} \right) \frac{1}{1 + k^{\alpha-8}}.$$

.... 7 punti

Risposta:
$\alpha \in \mathbb{R}$.

....

Svolgimento:
Si ha

$$\sin\left(\frac{4}{k^3}\right) + \frac{\alpha}{k^3} = \begin{cases} \frac{4+\alpha}{k^3}(1+o(1)) & \text{se } \alpha \neq -4 \\ -\frac{32}{3k^9}(1+o(1)) & \text{se } \alpha = -4 \end{cases}$$

e

$$\frac{1}{1+k^{\alpha-8}} = \begin{cases} \frac{1}{k^{\alpha-8}}(1+o(1)) & \text{se } \alpha > 8 \\ 1/2 & \text{se } \alpha = 8 \\ 1+o(1) & \text{se } \alpha < 8 \end{cases}$$

Quindi

$$\left(\sin\left(\frac{4}{k^3}\right) + \frac{\alpha}{k^3} \right) \frac{1}{1+k^{\alpha-8}} = \begin{cases} \frac{4+\alpha}{k^{\alpha-5}}(1+o(1)) & \text{se } \alpha > 8 \\ \frac{4+\alpha}{2k^3}(1+o(1)) & \text{se } \alpha = 8 \\ \frac{4+\alpha}{k^3}(1+o(1)) & \text{se } \alpha < 8, \alpha \neq -4 \\ -\frac{32}{3k^9}(1+o(1)) & \text{se } \alpha = -4. \end{cases}$$

Per il criterio del confronto asintotico, la serie è convergente per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

(3) Determinare il valore di $a \in \mathbb{R}$ per il quale la seguente funzione è continua in $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \arctan(x^2)}{1+x^4} & \text{se} \quad x > 1 \\ \frac{x}{a} & \text{se} \quad x \leq 1 \end{cases}.$$

Per tale valore di a, determinare le primitive della funzione f.

7 punti

Risposta:

$a = 8/\pi$; $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\arctan^2(x^2) + \frac{\pi}{16} - \frac{\pi^2}{64} + C & \text{se} \quad x > 1 \\ \frac{\pi x^2}{16} + C & \text{se} \quad x \leq 1, \end{cases}$ $C \in \mathbb{R}$.

Svolgimento:

f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. f è continua in 1 se e solo se

$$f(1) = \frac{1}{a} \stackrel{!}{=} \lim_{x \to 1^+} \frac{x \arctan(x^2)}{1 + x^4} = \frac{1}{2}\arctan(1) = \frac{\pi}{8} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = \frac{8}{\pi}.$$

Per tale valore di a, si ha

$$\int \frac{\pi x}{8} \mathrm{d}x = \frac{\pi x^2}{16} + C$$

e, per sostituzione,

$$\int \frac{x \arctan(x^2)}{1 + x^4} \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\arctan^2(x^2) + C_2.$$

Poiché le primitive devono essere continue in $x = 1$, si ottiene

$$\frac{\pi}{16} + C = \frac{1}{4}\arctan^2(1) + C_2 = \frac{\pi^2}{64} + C_2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_2 = C + \frac{\pi}{16} - \frac{\pi^2}{64},$$

da cui segue la risposta.

(4) Calcolare, purché esista, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-e^{1/x^2}}+\sqrt{x^4+4x^2}\right).$$

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:
5/2.

....

Svolgimento:
Si ha

$$\frac{1}{1-e^{1/x^2}}+\sqrt{x^4+4x^2}=\frac{1+(1-e^{1/x^2})\sqrt{x^4+4x^2}}{1-e^{1/x^2}}$$

con

$$1-e^{1/x^2}=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^4}(1+o(1))\quad \text{per } x\to+\infty$$

e

$$\sqrt{x^4+4x^2}=x^2\left(1+\frac{4}{x^2}\right)^{1/2}=x^2+2+o(1)\quad \text{per } x\to+\infty.$$

Quindi

$$1+(1-e^{1/x^2})\sqrt{x^4+4x^2}=-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{2x^2}+o(1/x^2)=-\frac{5}{2x^2}+o(1/x^2)\quad \text{per } x\to+\infty,$$

da cui segue la risposta.

(5)

A.1) Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ due funzioni monotone decrescenti in $\mathbb{R}$. La funzione composta $f \circ g$ è monotona in $\mathbb{R}$? Se si' dimostrarlo, altrimenti esibire un controesempio.

A.2) Enunciare il teorema degli zeri.

A.3) Determinare la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = x^{\log x}$ nel punto $x = e$.

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Svolgimento: