ANALISI MATEMATICA 1 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 09.02.2016

A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate dopo due ore. Solo durante le prime due ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). È possibile ritirarsi entro il termine della prova: in tal caso, assicurarsi che il docente apponga una "R" sulla prima pagina della prova. Per le prove consegnate, verrà verbalizzata una insufficienza sia se nella prova non sono risolti correttamente e completamente almeno 2 esercizi, sia se la prova ottiene una valutazione inferiore a 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente.

(1) Determinare il massimo assoluto, il minimo assoluto, i punti di massimo locale e i punti di minimo locale della funzione $f : [0, \frac{7}{6}\pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = e^{\frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{2}\sin^2 x}, \quad x \in \left[0, \frac{7}{6}\pi\right].$$

6 punti

Risposta: $x = 0$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \frac{7}{6}\pi$ pti di max. loc.

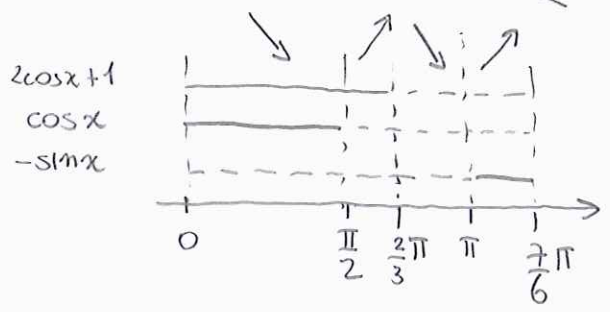
$x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ " " min loc.

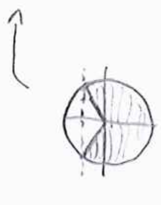
$\max f = e^{2/3}$, $\min f = e^{-2/3}$.

Svolgimento:

Si ha: $f'(x) = e^{\frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{2}\sin^2 x}\left[2\cos^2 x(-\sin x) - \sin x\cos x\right]$

$\gtreqless 0 \iff (-\sin x)\cos x\,(2\cos x + 1) \gtreqless 0$





Quindi $0, \frac{2}{3}\pi, \frac{7}{6}\pi$ punti di max loc.

$\frac{\pi}{2}, \pi$ " " min loc.

$$\frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{2}\sin^2 x = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{in } x = 0 \\ -\frac{1}{12} - \frac{3}{8} & \text{in } x = \frac{2}{3}\pi \\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{8} & x = \frac{7}{6}\pi \end{cases} \Rightarrow e^{2/3} = \max f$$

$$\frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{2}\sin^2 x = \begin{cases} -1/2 & x = \frac{\pi}{2} \\ -2/3 & x = \pi \end{cases} \Rightarrow e^{-2/3} = \min f$$

(2) Determinare il dominio naturale e gli eventuali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui) della funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x) = (x^2 + 3x)(e^{2/x} - 1).$$

7 punti

Risposta: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$x = 0$ asintoto verticale

$y = 2x + 8$ asintoto obliquo

Svolgimento:

$$\lim_{x \to 0^+} (x^2+3x)(e^{2/x}-1) = +\infty \quad \text{(gerarchie di infiniti)}$$

$\Rightarrow$ $x = 0$ asintoto verticale.

(si noti che invece $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} (x+3)\frac{2}{x}(1 + o(1)) = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \to +\infty} x\left[(x+3)(e^{2/x}-1) - 2\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[(x+3)\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) - 2\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[\cancel{2} + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{6}{x} - \cancel{2}\right]$$

$$= 8$$

$\Rightarrow$ $y = 2x + 8$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Con calcoli identici, $y = 2x + 8$ " " $x \to -\infty$.

(3) Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali è convergente il seguente integrale improprio:

$$\int_1^2 \left(\frac{\sin(x-1)}{(x-1)^\alpha} + \frac{x}{(\log x)^{2-\alpha}} \right) dx.$$

.... 7 punti

Risposta: $\alpha \in (1,2)$.

....

Svolgimento:

$$\frac{\sin(x-1)}{(x-1)^\alpha} = \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}(1+o(1)) \quad \text{per } x \to 1^+$$

$$\frac{x}{(\log x)^{2-\alpha}} = \frac{1+o(1)}{(\log(1+x-1))^{2-\alpha}} = \frac{1+o(1)}{(x-1)^{2-\alpha}}, \quad \text{per } x \to 1^+.$$

Entrambe le funzioni sono definitivamente positive per $x \to 1^+$. Quindi l'integrale è convergente se e solo se

$$\int_1^2 \frac{\sin(x-1)}{(x-1)^\alpha} dx \quad e \quad \int_1^2 \frac{x}{(\log x)^{2-\alpha}} dx$$

sono entrambi convergenti. Pertanto

$$\alpha - 1 < 1 \quad e \quad 2-\alpha < 1 \iff 1 < \alpha < 2.$$

(4) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x|1-e^x|}{(e^x-3)^3}\mathrm{d}x.$$

$\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$$\frac{2-e^{-1}}{(e^{-1}-3)^2} + \frac{2-e}{(e-3)^2} - \frac{1}{2}$$

Svolgimento:

Si ha

$$y = e^x \qquad dy = e^x dx$$

$$\int \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x-3)^3}dx = \int \frac{y-1}{(y-3)^3}dy$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(y-1)}{(y-3)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(y-3)^2}dy$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{y-1}{(y-3)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{y-3} + c = -\frac{1}{2(y-3)^2}(y-1+y-3) + c$$

$$= \frac{2-y}{(y-3)^2} + c = \frac{2-e^x}{(e^x-3)^2} + c$$

Poiché $e^x - 1 > 0 \iff x > 0$, si ottiene

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x|e^x-1|}{(e^x-3)^3}dx = \int_{-1}^{0} \frac{e^x(1-e^x)}{(e^x-3)^3}dx + \int_{0}^{1} \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x-3)^3}dx$$

$$= \left[\frac{e^x-2}{(e^x-3)^2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{2-e^x}{(e^x-3)^2}\right]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{2-e^{-1}}{(e^{-1}-3)^2} + \frac{2-e}{(e-3)^2} - \frac{1}{4}$$