ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 23.06.2016

Cognome: VÈRSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$f(x,y) = xy(x^2 - y^2 - 4).$$

a) Determinare e classificare (punto di massimo locale, punto di minimo locale, punto di sella) gli eventuali punti critici di f.

b) Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto di f ristretta al segmento chiuso che unisce il punto $(0,0)$ al punto $(3, 3/2)$.

6 punti

Risposta: a) $(0,0)$, $(\pm 2, 0)$ punti di sella

b) $\max_{\Sigma} f = f(3, 3/2) = \frac{99}{8}$, $\min_{\Sigma} f = f\left(\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -8/3$.

Svolgimento:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2y - y^3 - 4y = y(3x^2 - y^2 - 4) = 0 \\ f_y = x^3 - 3xy^2 - 4x = x(x^2 - 3y^2 - 4) = 0 \end{cases}$$

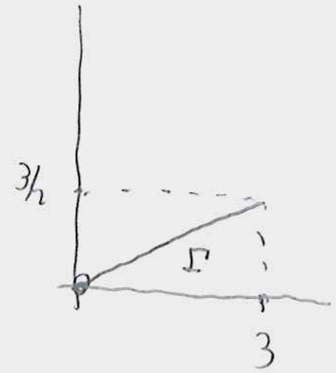
$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x(x^2-4) = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} 3x^2 - y^2 - 4 = 0 \iff y^2 = 3x^2 - 4 \\ x(x^2 - 9x^2 + 12 - 4) = 0 \iff x(8 - 8x^2) = 0 \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzioni $(0,0)$, $(\pm 2, 0)$, il secondo non ha soluzioni.

Si ha $D^2 f = \begin{pmatrix} 6xy, & 3x^2 - 3y^2 - 4 \\ 3x^2 - 3y^2 - 4, & -6xy \end{pmatrix}$

$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ punto di sella | $D^2 f(\pm 2, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ punti di sella

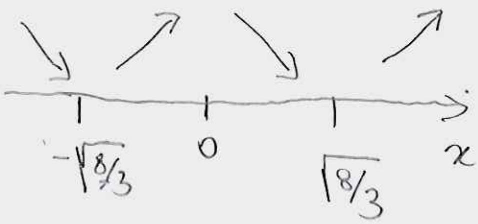
$$y = \frac{x}{2} \quad , \quad x \in [0,3]$$



$$g(x) := f\left(x, \frac{x}{2}\right) = \frac{x^2}{2}\left(x^2 - \frac{x^2}{4} - 4\right)$$

$$= \frac{x^2}{8}\left(3x^2 - 16\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{8}\left(12x^3 - 32x\right) = \frac{x}{2}\left(3x^2 - 8\right)$$



$x = 0$ pto di max loc per g

$x = \sqrt{8/3} < 3$ pto di min loc per g

$x = 3$ pto di max loc per g

$$g(0) = f(0,0) = 0$$

$$g\left(\sqrt{8/3}\right) = f\left(\sqrt{8/3}, \sqrt{2/3}\right) = \frac{1}{3}\left(8 - 16\right) = -8/3$$

$$g(3) = \frac{9}{8}\left(27 - 16\right) > 0$$

(2) Sia assegnata la seguente forma differenziale:

$$\omega(x,y) = \left(\frac{9x}{9x^2+4y^2-1} + y\right) dx + \left(\frac{4y}{9x^2+4y^2-1} - 2y\right) dy.$$

a) Determinare il dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ di ω, specificandone le proprietà topologiche (insieme chiuso, aperto, limitato, illimitato, connesso, non connesso, semplicemente connesso).

b) Calcolare

$$\int_{\gamma^+} \omega,$$

dove γ^+ è il tratto di circonferenza di raggio 1 centrato nell'origine e contenuto nel terzo quadrante, percorso in verso antiorario.

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

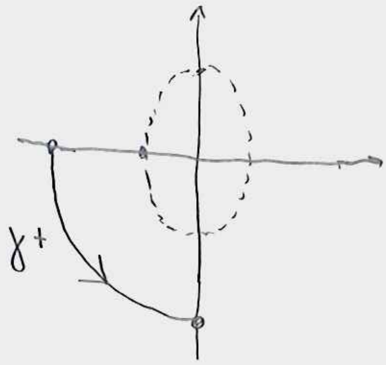
Risposta: a) $D = \{9x^2+4y^2-1 \neq 0\}$ aperto illimitato non connesso

b) $\frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{8}\right) - \frac{\pi}{4}$

....

Svolgimento:

$\omega_1 = \omega - y\,dx$ è esatta in $D_1 = \{9x^2+4y^2-1>0\}$:



$$U(x,y) = \int\left(\frac{4y}{9x^2+4y^2-1} - 2y\right)dy$$

$$= \frac{1}{2}\log|9x^2+4y^2-1| - y^2 + C(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{9x}{9x^2+4y^2-1} + C'(x) = \frac{9x}{9x^2+4y^2-1} \iff C'(x) = 0 \iff C(x) = C_1.$$

Quindi

$$\int_{\gamma^+}\omega = \int_{\gamma^+}\omega_1 + \int_{\gamma^+} y\,dx = U(0,-1) - U(-1,0) + \int_{\pi}^{3/2\pi} \sin t(-\sin t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\log(3) - \frac{1}{2}\log(8) - \frac{1}{2}(t - \sin t\cos t)\Big|_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{3}{8}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

(3) Calcolare il volume del seguente insieme:

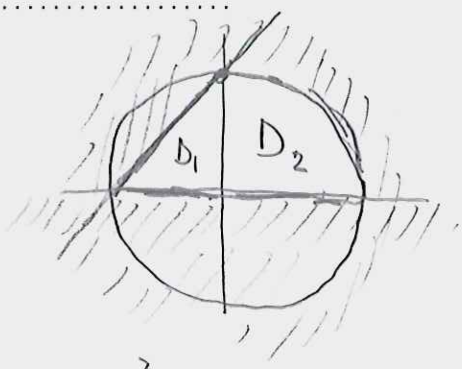
$$\Omega = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 \leq 4, \; 0 \leq y \leq x + 2, \; 0 \leq z \leq y\right\}.$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta: $9/6$

....

Svolgimento:



Integrazione per fili:

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in D, \quad 0 \leq z \leq y \right\}$$

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 \leq 4, \quad 0 \leq y \leq x+2 \right\}$$

$$= D_1 + D_2 \quad \text{come in figura}$$

$$\iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^y dz \right) dx\,dy = \iint_D y \, dx\,dy = \iint_{D_1} y\,dx\,dy + \iint_{D_2} y\,dx\,dy$$

$$\iint_{D_1} y \, dx\,dy = \int_{-1}^{0} \left(\int_0^{x+2} y \, dy \right) dx = \int_{-1}^{0} \frac{(x+2)^2}{2} dx = \left.\frac{(x+2)^3}{6}\right|_{-1}^{0}$$

$$= \frac{8}{6} - \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$\iint_{D_2} y\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\rho = \frac{1}{3}.$$

(4) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = \frac{2}{x^2} \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}.$$

7 punti

Risposta: $y(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2\log x}{x^2} + \dfrac{(\log x)^2}{x^2}$.

Svolgimento: $\tilde{y}(s) = y(e^s)$ $\qquad s = \log x \iff x = e^s$

$$\frac{d\tilde{y}}{ds} = e^s \frac{dy}{dx} = x\frac{dy}{dx} \qquad \tilde{y}(0) = 1$$

$$\tilde{y}'(0) = 0$$

$$\frac{d^2\tilde{y}}{ds^2} = e^s \frac{dy}{dx} + e^{2s}\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{dy}{dx} + x^2\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = \frac{2}{x^2} \iff \tilde{y}'' - \tilde{y}' + 5\tilde{y}' + 4\tilde{y} = 2e^{-2s}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \qquad \tilde{y}_0(s) = Ae^{-2s} + Bse^{-2s}$$

$$\tilde{y}_p(s) = Cs^2e^{-2s}$$

$$\tilde{y}_p'(s) = Ce^{-2s}(2s - 2s^2)$$

$$\tilde{y}_p''(s) = Ce^{-2s}(-4s + 4s^2 + 2 - 4s)$$

$$\tilde{y}_p'' + 4\tilde{y}_p' + 4\tilde{y}_p = Ce^{-2s}(\cancel{4s^2} \cancel{-8s} + 2 \cancel{+8s} \cancel{-8s^2} \cancel{+4s^2})$$

$$= 2Ce^{-2s} \stackrel{!}{=} 2e^{-2s} \iff C = 1$$

$$\Rightarrow \tilde{y}(s) = Ae^{-2s} + Bse^{-2s} + s^2e^{-2s} \qquad \tilde{y}(0) = A = 1$$

$$\tilde{y}'(s) = e^{-2s}(-2A - 2Bs - 2s^2 + B + 2s) \qquad \tilde{y}'(0) = B - 2A = 0 \iff B = 2$$