ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 21.07.2016

Cognome: VERSIONE .... **Nome: PRELIMINARE** ....

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la seguente funzione:

$$g(x,y) = x^2 + y^2 + x + y.$$

a) Scrivere l'equazione della retta tangente al sostegno della curva $g(x,y) = 2$ nel punto $(1,-1)$.

b) Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto di $f(x,y) = xy$ con il vincolo $g(x,y) = -\frac{1}{4}$.

.... 6 punti

Risposta:

a) $y = 3x - 4$. b) $\min_\Gamma f = 0$, $\max_\Gamma f = \frac{1}{4}(1+\sqrt{2}/2)^2$.

....

Svolgimento: a) Si ha $\nabla g(x,y) = (2x+1, 2y+1)$, quindi $\nabla g(1,-1) = (3,-1)$ e la retta tangente è

$$(3,-1)\cdot(x-1, y+1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = 3x-4.$$

b) (in alternativa, usare il metodo dei moltiplicatori). Si ha

$$g(x,y) = x^2+y^2+x+y = (x+1/2)^2 + (y+1/2)^2 - 1/2,$$

quindi

$$g(x,y) = -1/4 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+1/2)^2 + (y+1/2)^2 = 1/4$$

e

$$\{g = -1/4\} = \{(-1/2(1-\cos\varphi), -1/2(1-\sin\varphi)),\ \varphi \in [0,2\pi]\}.$$

Posto

$$h(\varphi) = f((-1/2(1-\cos\varphi), -1/2(1-\sin\varphi))) = \frac{1}{4}(1-\cos\varphi)(1-\sin\varphi),$$

si ha

$$\begin{aligned} h'(\varphi) &= \frac{1}{4}\left(\sin\varphi - \cos\varphi + \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\ &= \frac{1}{4}(\sin\varphi - \cos\varphi)(1 - \sin\varphi - \cos\varphi) \\ &= 0 \quad \Longleftrightarrow \varphi \in \{0, \pi/4, \pi/2, 5\pi/4\}. \end{aligned}$$

Confrontando i valori di h nei punti critici si ottiene la risposta.

(2) Sia T il trapezio di vertici $(0,-1)$, $(0,1)$, $(2,3)$, $(2,-1)$.

a) Calcolare

$$\int_{\partial T} xy \mathrm{d}s.$$

b) Calcolare

$$\int_{\partial T^+} xy \mathrm{d}x.$$

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta:

a) $= 6 + \frac{14}{3}\sqrt{2}$. b) $-20/3$.

. . . .

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}
\gamma_1^+(t) &= (t,-1),\ t \in (0,2), \\
\gamma_2^+(t) &= (2,t),\ t \in (-1,3) \\
\gamma_3^-(t) &= (t,1+t),\ t \in (0,2) \\
\gamma_4^-(t) &= (0,t),\ t \in (-1,1).
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T} xy \mathrm{d}s &= \int_0^2 (-t)\cdot 1 \ \mathrm{d}t + \int_{-1}^3 2t \cdot 1 \ \mathrm{d}t + \int_0^2 t(1+t)\cdot \sqrt{2} \ \mathrm{d}t + \ 0 \\
&= -2 + (9-1) + (2+8/3)\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_{\partial T^+} xy \mathrm{d}x &= \int_0^2 (-t)\cdot 1 \mathrm{d}t + \ 0 \ - \int_0^2 t(1+t)\cdot 1 \mathrm{d}t + \ 0 \\
&= -2 - (2+8/3) = -20/3
\end{aligned}$$

(per il secondo integrale, in alternativa si possono utilizzare le formule di Green o il teorema della divergenza).

(3) Dato l'insieme

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z \geq 0\,,\ x^2+y^2+z^4 \leq 81\right\}\ ,$$

a) calcolarne il volume;
b) calcolare il flusso uscente da ∂E del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(x^2,\, xz,\, z^4(x^2+y^2)\right)\ .$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

a) $\frac{4}{5}\pi 3^5$; b) $\frac{\pi}{2}3^{11}$.

....

Svolgimento: a) Si ha

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in E_z,\ z \in [0,3]\right\}\ ,$$

dove

$$E_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 81 - z^4\}.$$

Pertanto

$$|E|_3 = \int_0^3 |E_z|_2 \mathrm{d}z = \int_0^3 \pi(81-z^4)\mathrm{d}z = 3^5\pi(1-1/5).$$

Inoltre, poiché

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = 2x + 0 + 4z^3(x^2+y^2),$$

si ha

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial E} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S &= \iiint_E (2x+0+4z^3(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^3 \iint_{E_z} (2x+4z^3(x^2+y^2))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_0^3 4z^3 \int_0^{\sqrt{81-z^4}} \rho^3\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{2}\int_0^3 4z^3(81-z^4)^2\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{6}(81)^3.
\end{aligned}$$

(4) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$-x\,y''(x) + y'(x) = -2x\,\big(y'(x)\big)^2.$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$$y = D \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}\log|C - x^2| + D, \qquad C, D \in \mathbb{R}.$$

....

Svolgimento:
Posto $v = y'$, l'equazione si riduce ad una equazione di tipo Bernoulli:

$$-x\,v' + v = -2x\ v^2,$$

di cui $v \equiv 0$ è soluzione. Dividendo per v^2 e ponendo $z = 1/v$, si ottiene

$$(xz)' = xz' + z = -x\frac{v'}{v^2} + \frac{1}{v} = -2x,$$

da cui

$$xz = -x^2 + C \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = (C - x^2)/x \qquad \Longleftrightarrow \qquad v = y' = x/(C - x^2).$$

Pertanto

$$y = -\frac{1}{2}\log|C - x^2| + D$$

da cui segue la risposta.

(5) Rispondere alle due domande che saranno distribuite durante il compito.

. . . . $\boxed{\text{6 punti}}$

Svolgimento: