ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 22.09.2016

A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Verrà verbalizzata una insufficienza a chi non risolve correttamente e completamente almeno 2 esercizi o non ottiene almeno 18 punti. È possibile ritirarsi entro il termine della prova. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere a 2 domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^3.$$

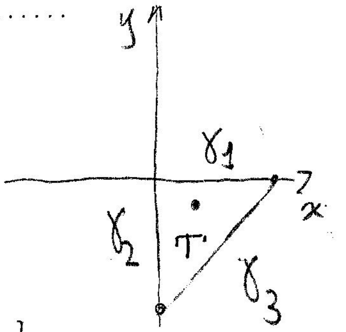
a) Determinare e classificare i punti critici di f.
b) Determinare il massimo e il minimo assoluti di f nel triangolo chiuso di vertici $(0,0)$, $(0,-6)$ e $(6,0)$.

6 punti

Risposta: $(0,0)$ pto di sella, $(2/3,-2/3)$ pto di minimo loc.

$\max_T f = 6^3$, $\min_T f = -\frac{4}{27}$

Svolgimento:



$$\begin{cases} f_x = 2x + 2y = 0 \\ f_y = 2x - 3y^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -x \\ -y(2+3y) = 0 \end{cases}$$

Quindi i punti critici sono $(0,0)$ e $(2/3, -2/3)$. Si ha

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6y \end{pmatrix}, \text{ da cui segue la risposta (a).}$$

$(2/3,-2/3)$ candidato (min)

L'unico punto interno a T è di sella. Su ∂T si ha:

$f|_{\gamma_1} = f(x,0) = x^2$ crescente per $0 \le x \le 6 \Rightarrow \begin{cases} (0,0) \text{ candidato (min)} \\ (6,0) \quad " \quad \text{(max)} \end{cases}$

$f|_{\gamma_2} = f(0,y) = -y^3$ decrescente per $-6 \le y \le 0 \Rightarrow \begin{cases} (0,0) \quad " \quad \text{(min)} \\ (0,-6) \quad " \quad \text{(max)} \end{cases}$

$g(y) = f|_{\gamma_3} = f(y+6, y) = (y+6)^2 + 2y(y+6) - y^3$ per $-6 \le y \le 0$

$g'(y) = 2y + 12 + 4y + 12 - 3y^2 = -3(y^2 - 2y - 8)$

$= 0 \iff y = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} (0,0) \text{ candidato (max)} \\ (0,-6) \quad " \quad \text{(max)} \\ (4,-2) \quad " \quad \text{(min)} \end{cases}$

1/5

Confrontando i valori si ottiene la risposta.

(2) Sia

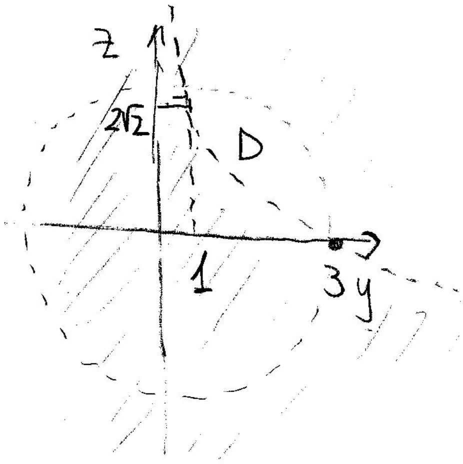
$$D=\left\{(y,z)\in\mathbb{R}^2:\ y^2+z^2\le 9,\ y\ge 0,\ z\ge\sqrt{2}\left(\frac{3}{y}-1\right)\right\}.$$

Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando D intorno all'asse z. 7 punti

Risposta:

$$\frac{20\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Svolgimento:



La rappresentazione grafica di D è in figura. Si ha in particolare

$$y^2+2\left(\frac{3}{y}-1\right)^2=9$$

$$\iff y^4+2(3-y)^2=9y^2$$

$$\iff y^2(y^2-9)+2(3-y)^2=0$$

$$\iff y^2(y+3)(y-3)+2(y-3)^2=0$$

$$\iff (y-3)(y^3+3y^2-6+2y)=0$$

$$\iff (y-3)(y-1)(y^2+4y+6)=0$$

$$z=\sqrt{2}\left(\frac{3}{y}-1\right)$$

$$\iff \frac{z}{\sqrt{2}}=\frac{3}{y}-1$$

$$\iff \frac{3}{y}=1+\frac{z}{\sqrt{2}}=\frac{z+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\iff y=\frac{3\sqrt{2}}{z+\sqrt{2}}$$

Pertanto

$$\mathrm{vol}=\pi\int_0^{2\sqrt{2}}(9-z^2)\,dz-\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\frac{18}{(z+\sqrt{2})^2}\,dz$$

$$=\pi\left[9z-\frac{z^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{2}}+\left[\frac{18\pi}{z+\sqrt{2}}\right]_0^{2\sqrt{2}}$$

$$=\pi\left[18\sqrt{2}-\frac{1}{3}16\sqrt{2}+\frac{18}{3\sqrt{2}}-\frac{18}{\sqrt{2}}\right]$$

$$=\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\left[54-16+9-27\right]=\frac{20\pi\sqrt{2}}{3}$$

(3) Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{(x^3-2y^2)^2}(\alpha(x^3+y^2), 4xy), \quad x^3 > 2y^2$$

sia conservativo. Per tali valori, calcolare il lavoro compiuto da $\mathbf{F}$ per portare una particella dal punto $(1,0)$ al punto $(3,1)$.

.... 6 punti

Risposta: $-22/25$.

....

Svolgimento:

$$U = \int \frac{4xy}{(x^3-2y^2)^2}\,dy = \frac{x}{x^3-2y^2} + c(x)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x^3-2y^2 - x(3x^2)}{(x^3-2y^2)^2} + c'(x)$$

$$= \frac{-2x^3-2y^2}{(x^3-2y^2)^2} + c'(x) \overset{!}{=} \frac{\alpha(x^3+y^2)}{(x^3-2y^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad c'(x) = \frac{(x^3+y^2)}{(x^3-2y^2)^2}(\alpha+2)$$ indipendente da y se e solo se $\alpha = -2$

Quindi $\alpha = -2$, $c' = 0$, $U(x,y) = \dfrac{x}{x^3-2y^2}$ e

$$L = U(3,1) - U(1,0) = \frac{3}{27-2} - \frac{1}{1} = -\frac{22}{25}.$$

(4) Determinare l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy, determinandone anche l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} y''(x) = -y'(x) - \dfrac{8x}{y'(x)} \\ y(0) = 0,\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

7 punti

Risposta: $y(x) = \frac{1}{12}\left[(4-8x)^{3/2} - 8\right]$, $x \in (-\infty, +1/2)$

Svolgimento:

$z = y'$ $\quad \begin{cases} z' = -z - \dfrac{8x}{z} \\ z(0) = -2 \end{cases} \iff zz' = -z^2 - 8x.$

$w = \dfrac{z^2}{2}$ $\quad \begin{cases} w' = -2w - 8x \\ w(0) = 2 \end{cases}$

Int. gen. per w:

$w_{om} = Ce^{-2x}$. $\quad w_p = ax + b$

$w_p' + 2w_p = a + 2ax + 2b \overset{!}{=} -8x$

$\iff a = -4,\ b = 2.$

$w = Ce^{-2x} - 4x + 2$

C. I. $\quad w(0) \overset{!}{=} 2 \iff C + 2 = 2 \iff C = 0$

$\Rightarrow \quad w(x) = 2 - 4x$

$y' = z = \pm\sqrt{2w} = \pm\sqrt{4-8x}$

$y'(0) = -2 \Rightarrow y'(x) = -\sqrt{4-8x}$

$y(x) = -\int_0^x \sqrt{4-8x}\,dx = \frac{1}{12}(4-8x)^{3/2} + C$