ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 26.06.2017

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - x^2 - y^2 - x + 1.$$

a) Determinare i punti critici di f e specificarne la natura.

b) Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto di f vincolati su $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$.

6 punti

Risposta: a) $(-1/3, 0)$ pto di massimo locale
$(1, 0)$ pto di sella

b) $\min_\Gamma f = -\sqrt{2} - 1$, $\max_\Gamma f = \sqrt{2} - 1$

Si ha Svolgimento:

$$\begin{cases} f_x = 3x^2 + y^2 - 2x - 1 = 0 \\ f_y = 2xy - 2y = 2y(x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2x - 1 = 3(x-1)(x+1/3) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y^2 = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

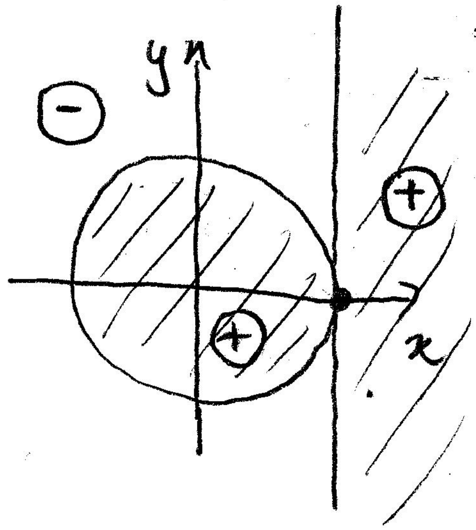
pertanto i punti critici sono $(1,0)$ e $(-1/3, 0)$.

Si ha
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-2 & 2y \\ 2y & 2x-2 \end{pmatrix},$$

$$D^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 f(-1/3, 0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8/3 \end{pmatrix}$$

quindi $(-1/3, 0)$ è punto di massimo locale.

Per stabilire la natura di $(1,0)$ si osserva che



$$f(x,y) = (x-1)(x^2+y^2-1) \qquad (\Delta)$$

da cui il segno di f indicato in figura. Pertanto $(1,0)$ è un punto di sella.

Utilizzando (Δ), si ha

$$f|_\Gamma = (x-1), \quad x^2+y^2=2 \quad \text{ovvero } x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

quindi $\min_\Gamma f = -\sqrt{2}-1$, $\max_\Gamma f = \sqrt{2}-1$

(2) Calcolare area e baricentro del seguente insieme:

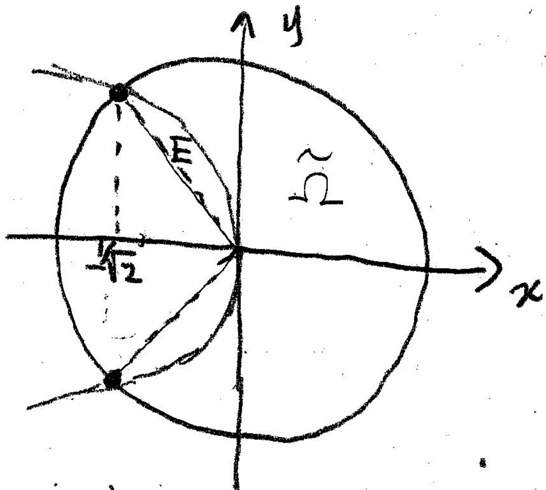
$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x \geq -\sqrt{2}y^2\right\}.$$

6 punti

Risposta: $|\Omega| = 3/4\,\pi - 1/6$

$y_B = 0$, $x_B = \dfrac{1}{\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{12}}\left(\dfrac{5}{24} - \dfrac{1}{40}\right)$

Svolgimento:



$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x=-\sqrt{2}\,y^2 \end{cases} \iff 2y^4+y^2-1=0$$

$$\iff y^2 = \left\langle \begin{matrix} \cancel{-1} \\ 1/2 \end{matrix}\right.$$

$$\iff y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \ x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Questo è solo uno tra i vari possibili metodi:

$\tilde{\Omega} = \Omega \cap \{y > 0\}$ $\quad |\tilde{\Omega} \cup E| = \frac{3}{8}\pi$

$$|E| = \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{-y}^{-\sqrt{2}y^2} 1 \, dx\,dy = \int_0^{1/\sqrt{2}} (y - \sqrt{2}y^2)\, dy$$

$$= \left(\frac{y^2}{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}y^3\right)\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

$$|\tilde{\Omega}| = |\tilde{\Omega} \cup E| - |E| = 3/8\,\pi - \frac{1}{12}$$

Per simmetria, $y_B = 0$ e x_B = baricentro di $\tilde{\Omega}$, che ora calcoliamo.

$$x_B = \frac{1}{|\tilde{\Omega}|}\iint_{\tilde{\Omega}} x\,dx\,dy = \frac{1}{|\tilde{\Omega}|}\left(\iint_{\tilde{\Omega}\cup E} x\,dx\,dy - \iint_E x\,dx\,dy\right)$$

Si ha, passando in coordinate polari,

$$\iint_{\tilde{\Omega}\cup E} x\,dx\,dy = \int_0^{3/4\,\pi}\int_0^1 r^2\cos\varphi\,dr\,d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{3/4\,\pi}\cos\varphi\,d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$\iint_E x\,dx\,dy = \int_0^{1/\sqrt{2}}\int_{-y}^{-\sqrt{2}y^2} x\,dx\,dy = \int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\frac{\cancel{2}y^4}{\cancel{2}} - \frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$= \left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^3}{6}\right)\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{40} - \frac{\sqrt{2}}{24}$$

quindi

$$x_B = \frac{1}{\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{12}}\sqrt{2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{40}\right)$$

(3) Per $A \in \mathbb{R}$, sia $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{V}(x,y,z) = \left(\frac{yz}{1+x^2z^2} + Ay \ , \ \arctan(xz) + x \ , \ \frac{xy}{1+x^2z^2} \right)$$

e sia Σ^+ la superficie definita da $\Sigma = \{(z,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2+z^2 = 1, \ z \le 0\}$ e orientata in modo tale che $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_3 > 0$.

a) Determinare A in modo tale che $\mathbf{V}$ sia conservativo; per tale valore di A, determinarne le funzioni potenziale.

b) Per $A = 2$, calcolare la circuitazione di $\mathbf{V}$ intorno a $\partial\Sigma^+$.

6 punti

Risposta: a) $A=1, \quad U(x,y,z) = y\,\mathrm{atg}(xz) + xy + C$

b) $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} \underline{V} \cdot \underline{t}^+ \, ds = -\pi$

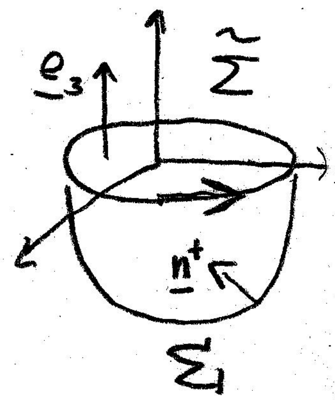
a) Svolgimento: Determino la funzione potenziale

$$U(x,y,z) = \int (\mathrm{atg}(xz) + x)\, dy = y\,\mathrm{atg}(xz) + xy + C(x,z)$$

$$U_x = \frac{yz}{1+x^2z^2} + y + \partial_x C \overset{!}{=} \frac{yz}{1+x^2z^2} + Ay \iff \boxed{\begin{array}{c} A=1 \\ C=C(z) \end{array}}$$

$$U_z = \frac{xy}{1+x^2z^2} + \partial_z C \overset{!}{=} \frac{xy}{1+x^2z^2} \iff \boxed{C=C}$$

Quindi $U(x,y,z) = y\,\mathrm{atg}(xz) + xy + C$



b) Si osserva che $\displaystyle\int_{\partial\Sigma} \underline{V} \cdot \underline{t}^+ \, ds = \int_{\partial\tilde{\Sigma}} \underline{V} \cdot \underline{t}^+ \, ds$

dove $\tilde{\Sigma}^+ = \{x^2+y^2 = 1, \ z = 0\}$

con $\underline{\tilde{n}}^+ = \underline{e}_3$

(questa osservazione semplifica ma non è essenziale)

Applicando il teorema del rotore,

$$\int_{\partial\tilde{\Sigma}} \underline{v} \cdot \underline{t}^{+} ds = \iint_{\tilde{\Sigma}} \mathrm{rot}\underline{V} \cdot \underline{e}_3 \, dS$$

Per $A=2$, si ha

$$\underline{V} = \underbrace{\left(\frac{yz}{1+x^2z^2} + y \, , \, \mathrm{atg}(xz) + x \, , \, \frac{xy}{1+x^2z^2} \right)}_{\mathrm{rot}\,\underline{V} = \underline{0} \text{ per il punto (a)}} + (y, 0, 0)$$

quindi $\mathrm{rot}\underline{V} \cdot \underline{e}_3 = \mathrm{rot}\,(y,0,0) \cdot \underline{e}_3 = (\partial_x 0 - \partial_y y) = -1$

e $\displaystyle\iint_{\tilde{\Sigma}} \mathrm{rot}\underline{V} \cdot \underline{e}_3 \, dS = -|\Sigma| = -\pi$

(4) Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{(y')^2(2y-1)}{y(y-1)} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 2, \end{cases}$$

specificando il suo intervallo massimale di esistenza.

$\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta: $y(x) = \left(1 - \frac{1}{2}e^x\right)^{-1}$, $x \in (-\infty, \log 2)$

Svolgimento:

$$\int \frac{y''}{y'}dx = \int \frac{y'(2y-1)}{y(y-1)}dx \iff \log|y'| = \log|y^2-y| + C$$

$$\iff y' = C(y^2-y)$$

$$y'(0) = 2 = C(4-2) = C(y^2(0)-y(0)) \iff C = 1$$

$$\int \frac{y'\,dx}{y^2-y} = \int 1\,dx \iff \int\left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right)dy = x$$

$$\iff \log\left|\frac{y-1}{y}\right| = x + C$$

$$\iff \frac{y-1}{y} = Ce^x$$

$$\frac{y(0)-1}{y(0)} = \frac{1}{2} = C \Rightarrow \frac{y-1}{y} = \frac{1}{2}e^x \Rightarrow$$

$$y\left(1-\frac{1}{2}e^x\right) = 1 \iff y = \left(1-\frac{1}{2}e^x\right)^{-1}$$

$$1 - \frac{1}{2}e^x = 0 \iff e^x = 2 \iff x = \log 2$$