ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 20.07.2017

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime due ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno due esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate dopo due ore.

(1) Sia $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^4 + 2y^4 = 2\}$.

a) Determinare i punti di Γ che hanno minima e massima distanza dall'origine.

b) Scrivere una parametrizzazione di $\Gamma \cap \{x < 0, \ y > 0\}$ e tracciarne il grafico.

punti: 4+2

Risposta: a) $(0, \pm 1)$ punti di minima distanza

$(\pm (4/3)^{1/4}, \pm (1/3)^{1/4})$ pti di massima distanza

b) vedi svolgimento

Svolgimento:

a) Poichè $z \mapsto \sqrt{z}$ è strettamente monotona, è equivalente massimizzare / minimizzare la distanza al quadrato (ma i calcoli senza questa osservazione non sono più complicati)

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(x^4 + 2y^4 - 2)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x = 2x - 4\lambda x^3 = 2x(1 - 2\lambda x^2) = 0 \\ \mathcal{L}_y = 2y - 8\lambda y^3 = 2y(1 - 4\lambda y^2) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda = x^4 + 2y^4 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^4 = 1 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y = 0 \\ x^4 = 2 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} \lambda = \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{4y^2} \\ x^4 + 2y^4 = 2 \end{cases}$$

da cui segue

$$P_{1,2} = (0, \pm 1), \quad P_{3,4} = (\pm 2^{1/4}, 0), \quad P_{5,6,7,8} = \left(\pm\left(\frac{4}{3}\right)^{1/4}, \pm\left(\frac{1}{3}\right)^{1/4}\right)$$

Calcolando

$$(x^2+y^2)\big|_{P_{1,2}} = 1$$

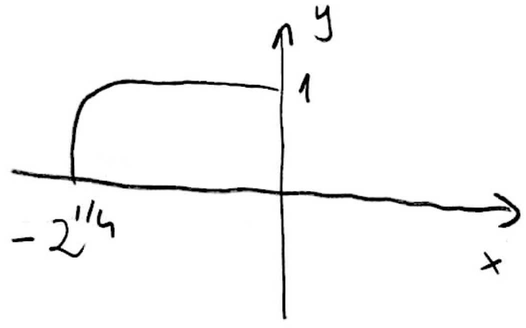
$$(x^2+y^2)\big|_{P_{3,4}} = \sqrt{2}$$

$$(x^2+y^2)\big|_{P_{5,6,7,8}} = \sqrt{3}$$

si ottiene la risposta.

b) $y^4 = 1 - \frac{x^4}{2}$

$$y = \left(1 - \frac{x^4}{2}\right)^{1/4}$$



Quindi $x \mapsto \left(x, \left(1 - \frac{x^4}{2}\right)^{1/4}\right) \quad x \in [-2^{1/4}, 0]$

è una parametrizzazione (cartesiana), da cui segue il grafico in figura

(2) Sia

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y > 0 \, , \ \frac{\sqrt{y}}{2} \le x \le \sqrt{y} \, , \ \frac{y}{2} \le x \le y \right\} .$$

Calcolare

$$\iint_\Omega \frac{1}{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \, .$$

.... punti: 6

Risposta:

$\log 2$

....

Svolgimento:

Si ha $\quad \frac{1}{2} \le \frac{x}{\sqrt{y}} \le 1 \, , \quad \frac{1}{2} \le \frac{x}{y} \le 1$

Posto $\begin{cases} u = \frac{x}{\sqrt{y}} \\ v = \frac{x}{y} \end{cases} \iff \quad y = \frac{x^2}{u^2} = \frac{y^2 v^2}{u^2} \, , \quad x = yv$

ovvero $\begin{cases} x = u^2/v \\ y = \frac{u^2}{v^2} \end{cases} \qquad J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2u}{v} & -\frac{u^2}{v^2} \\ \frac{2u}{v^2} & -\frac{2u^2}{v^3} \end{pmatrix}$

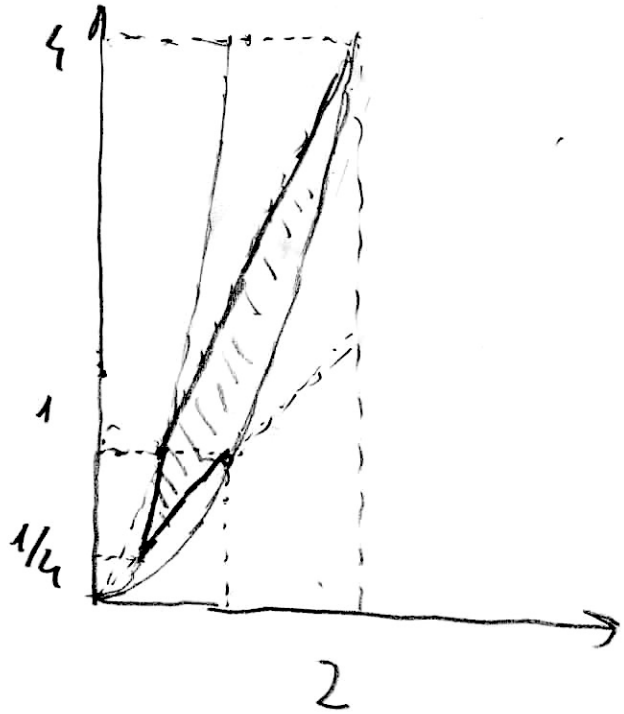
$$|\det J| = \left| -\frac{4u^3}{v^4} + \frac{2u^3}{v^4} \right| = \frac{2u^3}{v^4} \, ,$$

si ottiene

$$\iint_\Omega \frac{1}{y^2} dxdy = \iint_{[1/2,1]^2} \frac{v^4}{u^4} \cdot \frac{2u^3}{v^4} \, du \, dv$$

$$= \int_{1/2}^{1} \frac{1}{u} \, du = \log 2 .$$

L'esercizio può anche essere svolto senza cambi di coordinate:



$\sqrt{y} = \frac{y}{2} \iff y = 4$

$\sqrt{y} = y \iff y = 1$

$\frac{\sqrt{y}}{2} = \frac{y}{2} \iff y = 1$

$\frac{\sqrt{y}}{2} = y \iff y = 1/4$

$$\int_{1/4}^{1} \int_{\sqrt{y}/2}^{y} \frac{1}{y^2}\, dx\, dy + \int_{1}^{4} \int_{y/2}^{\sqrt{y}} \frac{1}{y^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_{1/4}^{1} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2y^{3/2}}\right) dy + \int_{1}^{4} \left(\frac{1}{y^{3/2}} - \frac{1}{2y}\right) dy$$

$$\left(\log y + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)_{1/4}^{1} + \left(-\frac{2}{\sqrt{y}} - \frac{1}{2}\log y\right)_{1}^{4}$$

$$\cancel{1} - \log\frac{1}{4} - \cancel{2} - \cancel{1} - \frac{1}{2}\log 4 + \cancel{2} = \frac{1}{2}\log 4 = \log 2$$

(3) Sia Σ^+ la superficie ottenuta ruotando il grafico della funzione $y(x) = x^3$, $x \in [0,1]$, di un angolo 2π attorno all'asse x, orientata in modo tale che $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_1 < 0$.

a) Calcolare l'area di Σ.

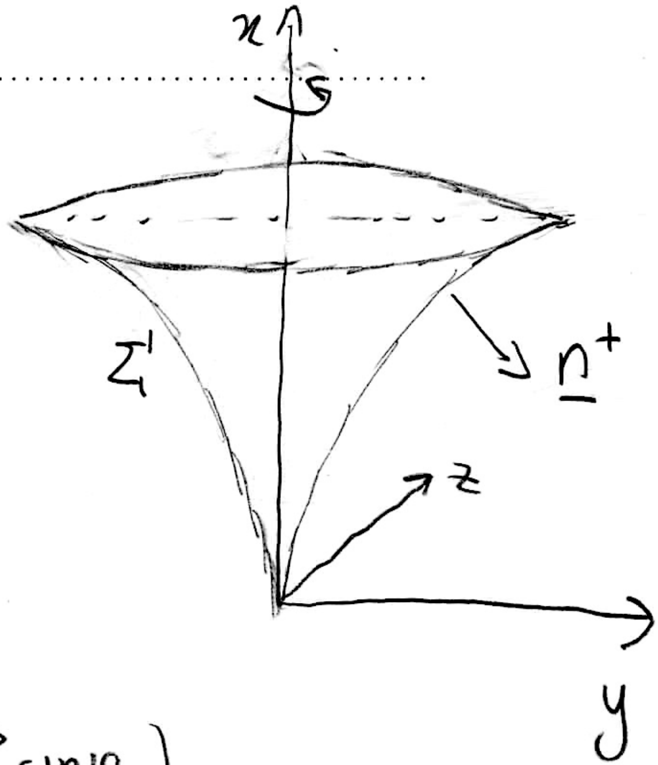
b) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{V} = (1, -z, y)$ attraverso Σ^+.

punti: 4+2

Risposta: a) $\frac{\pi}{27}\left(10^{3/2}-1\right)$

b) $-\pi$

Svolgimento:



a)

$$\sigma(x,\varphi) = (x, x^3\cos\varphi, x^3\sin\varphi)$$

$$\sigma_x = (1, 3x^2\cos\varphi, 3x^2\sin\varphi)$$

$$\sigma_\varphi = (0, -x^3\sin\varphi, x^3\cos\varphi)$$

$$\sigma_x \wedge \sigma_\varphi = (3x^5, -x^3\cos\varphi, -x^3\sin\varphi)$$

$$\|\sigma_x \wedge \sigma_\varphi\| = \sqrt{9x^{10}+x^6}$$

$$|\Sigma| = \iint_\Sigma 1\, dS = \int_0^1\int_0^{2\pi} \sqrt{9x^{10}+x^6}\, d\varphi\, dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\, dx = \cancel{2}\pi\, (1+9x^4)^{3/2}\,\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{1}{9\cdot\cancel{4}}\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{27}\left(10^{3/2}-1\right)$$

b) $\underline{n}^+ = \dfrac{\left(-3x^5,\ x^3\cos\varphi,\ x^3\sin\varphi\right)}{\sqrt{x^6+9x^{10}}}$

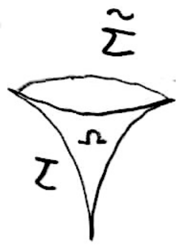
$$\iint_{\Sigma} \underline{V}\cdot\underline{n}^+\, dS = \int_0^1\int_0^{2\pi} \left(1, -x^3\sin\varphi, x^3\cos\varphi\right)\cdot$$

$$\cdot\left(-3x^5, x^3\cos\varphi, x^3\sin\varphi\right) d\varphi\, dx$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi} -3x^5\, d\varphi\, dx$$

$$= -2\pi\cdot\frac{3}{6}x^6\Big|_0^1 = -\pi.$$

In alternativa, detto $\tilde{\Sigma}$ il "tappo circolare" e Ω l'"interno" della superficie, si ottiene



$$\iint_{\Sigma} \underline{V}\cdot\underline{n}^+\, dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\underline{V} - \iint_{\tilde{\Sigma}} \underline{V}\cdot\underline{n}^+\, dS$$

$$= 0 - \iint_{\tilde{\Sigma}} (1, -z, y)\cdot(1,0,0)\, dS$$

$$= -|\tilde{\Sigma}| = -\pi.$$

(4) Determinare tutte le funzioni $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ per le quali il campo vettoriale $\mathbf{V} : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definito da

$$\mathbf{V}(x, y) = (\ 6yf(x)\ ,\ x^2 f'(x)\ )$$

risulta irrotazionale (quindi conservativo) in $(0, +\infty) \times \mathbb{R}$, e determinarne le funzioni potenziale.

6 punti

Risposta:

$$f(x) = Ax^2 + \frac{B}{x^3}\ ,\quad A, B \in \mathbb{R}$$

$$U(x,y) = \left(2Ax^3 - \frac{3B}{x^2}\right)y + C$$

Svolgimento:

$\underline{V}$ irrotazionale $\iff \frac{\partial}{\partial y}\left(6yf(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 f'(x)\right)$

$\iff 6f(x) = x^2 f''(x) + 2x f'(x)$

$\iff x^2 f'' + 2x f' - 6f = 0$

Equazione di Eulero: $\quad x\frac{d}{dx} = \frac{d}{ds}$

$\iff \frac{ds}{dx} = \frac{1}{x} \iff s = \log x$

$$\frac{d^2 f}{ds^2} + \frac{df}{ds} - 6f = 0$$

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \qquad f(s) = Ae^{2s} + Be^{-3s}$

$\lambda = \frac{-1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 2 \\ -3 \end{cases} \qquad f(x) = Ax^2 + \frac{B}{x^3}$

$$\underline{V}(x,y) = \left(6y\left(Ax^2 + \frac{B}{x^3}\right),\ 2Ax^3 - \frac{3B}{x^2}\right)$$

$$U(x,y) = \int \left(2Ax^3 - \frac{3B}{x^2}\right) dy$$

$$= \left(2Ax^3 - \frac{3B}{x^2}\right)y + C_1$$