ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 07.10.2017 B

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime due ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno due esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate dopo due ore.

(1) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = x^4 - x^2y^2 + 2y^4.$$

a) Determinare gli eventuali punti critici di f;

b) stabilire la natura degli eventuali punti critici di f;

c) trovare massimo e minimo assoluti di f in $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

punti: 6

Risposta: a) $(0,0)$; b) punto di minimo;

c) $\max_K f = 2$, $\min_K f = 0$.

Svolgimento:

a) $$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 2xy^2 = 2x(2x^2 - y^2) = 0 \\ f_y = -2x^2y + 8y^3 = 2y(4y^2 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ 8y^3 = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} 7y^2 = 0 \\ 4y^2 = x^2 \end{cases}$$

Quindi l'unico punto critico è $(0,0)$.

b) Un semplice calcolo mostra che $D^2 f(0,0) = 0$.

Tuttavia, si ha

$$f(x,y) \geq f(0,0) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (*)$$

quindi $(0,0)$ è un punto di minimo (assoluto).

Ci sono almeno tre modi per verificare $(*)$:

1) utilizzando la disuguaglianza di C.S.,

$$x^2y^2 \le \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}y^4 \Rightarrow x^4 - x^2y^2 + 2y^4 \ge \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{2}y^4 > 0;$$

2) osservando che, per $y \neq 0$,

$$f(x,y) > 0 \iff z^2 - z + 2 \ge 0 \quad , \quad z = x^2/y^2,$$

che è vera perché $\Delta < 0$, mentre, per $y=0$, $f(x,0) = x^4 \ge 0$.

3) osservando che

$$f(x,y) = (x^2 - y^2/2)^2 + 7/4\, y^4 \ge 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

perché somma di quadrati.

c) Candidati punti di estremo su ∂K:

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^4 - x^2y^2 + 2y^4 - \lambda(x^2+y^2-1)$$

$$\nabla \mathcal{L}(x,y,\lambda) = 0 \iff \begin{cases} 4x^3 - 2xy^2 - 2\lambda x = 2x(2x^2 - y^2 - \lambda) = 0 \\ -2x^2y + 8y^3 - 2\lambda y = 2y(4y^2 - x^2 - \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \underset{\text{I}}{\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}} \text{ oppure } \underset{\text{II}}{\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 1 \end{cases}} \text{ oppure } \begin{cases} \lambda = 2x^2 - y^2 = 4y^2 - x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5y^2 = 3x^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = 3/8 \\ x^2 = 5/8 \end{cases} \quad \text{III}$$

In corrispondenza si hanno i seguenti valori di f:

$$f(\text{I}) = 2$$

$$f(\text{II}) = 1$$

$$f(\text{III}) = \frac{25}{64} - \frac{15}{64} + 2 \cdot \frac{9}{64} = \frac{28}{64} < 1$$

Aggiungendo $f(0,0) = 0$ (punto critico interno) si ottiene la risposta.

(2) Sia
$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 0 \le y \le x \le 2\sqrt{1-y^2-z^2} \right\}.$$
Calcolare
$$\iiint_\Omega x \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \ .$$

.... punti: 6

Risposta: $\frac{2\pi}{\sqrt{5}}$

....

Svolgimento:

Per fili: $\quad y \le 2\sqrt{1-y^2-z^2} \overset{y \ge 0}{\iff} y^2 \le 4(1-y^2-z^2)$

$\iff 5y^2 + 4z^2 \le 4$

Quindi:

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D, \quad y \le x \le 2\sqrt{1-y^2-z^2} \right\}$$

con
$$D = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : y \ge 0, \ 5y^2 + 4z^2 \le 4 \right\}$$

$$\iiint_\Omega x \, d\underline{x} = \iint_D \left(\int_y^{2\sqrt{1-y^2-z^2}} x \, dx \right) dy dz$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D \left[4(1-y^2-z^2) - y^2 \right] dy dz$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D (4 - 5y^2 - 4z^2) dy dz$$

Passando in coordinate ellittiche,

$$\begin{cases} y = \frac{2}{\sqrt{5}} \rho \cos\varphi \\ z = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

si ottiene $\quad 5y^2 + 4z^2 = 4\rho^2\cos^2\varphi + 4\rho^2\sin^2\varphi = 4\rho^2 \leq 4$

$$\iff \rho \leq 1$$

e $\quad y \geq 0 \iff \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Quindi

$$\iiint_\Omega x \, d\underline{x} = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^1 4(1-\rho^2) \cdot \overbrace{\frac{2}{\sqrt{5}}\rho}^{\text{determ. Jacobiano}}$$

$$= \frac{4\pi}{\sqrt{5}} \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

(3) Sia $\gamma^+ : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da $\gamma(t) = \big(\sin^2(t), \sin(t)\cos(t)\big)$, $t \in [0,\pi]$, e orientata nel verso delle t crescenti.

a) Verificare che γ è semplice e chiusa e/o disegnarla;

b) calcolarne la lunghezza;

c) calcolare l'area del dominio limitato Ω delimitato da γ;

d) determinare il valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per il quale il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{V}(x,y) = \left(\frac{y}{1+x}, \log(1+x) + \alpha\sqrt{x}\right)$$

lungo γ^+ sia uguale a -2.

punti: 6

Risposta: b) π ; c) $\pi/4$; d) $\alpha = 1/3$.

Svolgimento:

a) Chiusa: $\gamma(0) = \gamma(\pi) = (0,0)$.

Semplice: $\gamma(t) = \gamma(s) \iff \begin{cases} \sin^2 t = \sin^2 s \\ \sin t \cos t = \sin s \cos s \end{cases}$

$\iff t = s$ oppure $\begin{cases} t = \pi - s \\ \sin t \cos t = -\sin s \cos s = \sin s \cos s \end{cases}$

$\iff \sin s \cos s = 0 \iff \begin{cases} s = 0, \pi \\ s = t (= \pi/2) \end{cases}$

Quindi le uniche possibilità sono $t = s$ o $s = 0, \pi$.

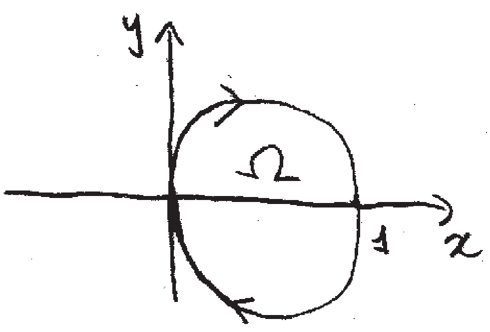
Pertanto la curva è semplice. Il grafico si ottiene osservando che, per $t \in [0, \pi/2]$,

$\sin t \cos t \underset{\sin t > 0}{=} \sqrt{\sin^2 t}\sqrt{1 - \sin^2 t}$,

$\iff v = \sin^2 t \in [0,1]$

$(v, \sqrt{v(1-v)})$

e poi per simmetria per $t \in [\pi/2, \pi]$



b) $|\gamma| = \int_0^{\pi} |\dot{\gamma}|\,dt = \int_0^{\pi} 1 = \pi$

$\boxed{\begin{array}{l}\cos t =: c \\ \sin t =: s\end{array}}$

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = (2\sin t\cos t,\ \cos^2 t - \sin^2 t) \\ |\dot{\gamma}|^2 = 4s^2c^2 + c^4 - 2c^2s^2 + s^4 = (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 \equiv 1 \end{cases}$$

c) $|\Omega| = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\,dy - y\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} s^2(c^2-s^2) - sc\,(2sc)$

orientazione di γ ?

$= -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} -s^4 - s^2c^2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi}{4}.$

d) $\underline{V} = \underline{V}_1 + \underline{V}_2$ con $\underline{V}_1 = \left(\frac{y}{1+x},\ \log(1+x)\right)$

$\underline{V}_2 = (0,\ \alpha\sqrt{x})$

$\underline{V}_1$ è conservativo in $x > -1$, con $U(x,y) = y\log(1+x)$.

Quindi

$$L = \int_{\gamma^+} \underline{V}_2 \cdot d\underline{x} = \int_{\gamma^+} \alpha\sqrt{x}\,dy = \int_0^{\pi} \alpha \sin t(\cos^2 t - \sin^2 t)\,dt$$

$$= \alpha\int_0^{\pi} \sin t\,(2\cos^2 t - 1)\,dt = \alpha\left[-\frac{2}{3}\cos^3 t + \cos t\right]_0^{\pi}$$

$$= \alpha\left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3}\alpha \overset{?}{=} -2$$

$\iff \alpha = 1/3$

(4)

a) Determinare, se esistono, i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali tutte le soluzioni dell'equazione

$$y''(x) + \alpha y'(x) + y(x) = 0$$

verificano $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

b) Per tali valori di α, determinare l'integrale generale della seguente equazione:

$$y''(x) + \alpha y'(x) + y(x) = e^{-x}.$$

.... 6 punti

Risposta: $\alpha > 0$

$\alpha \in (0,2)$: $y(x) = e^{-\frac{\alpha x}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2}x\right)\right) + \frac{e^{-x}}{2-\alpha}$

$\alpha = 2$: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + \frac{x^2}{2} e^{-x}$.

$\alpha > 2$: $y(x) = c_1 e^{-\lambda_1 x} + c_2 e^{-\lambda_2 x} + \frac{1}{2-\alpha} e^{-x}$ (vedi $(\square)$)

Svolgimento:

Risolvo l'omogenea: $\lambda^2 + \alpha\lambda + 1 = 0 \iff \lambda_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-4}}{2}$

Integrale generale: $y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ se $|\alpha| \neq 2$

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$ se $|\alpha| = 2$

Si ha $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff Re\,\lambda_1 < 0$ e $Re\,\lambda_2 < 0$

$|\alpha| \geq 2$: $(\square)_1$ $\lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2-4}}{2} < 0 \iff \sqrt{\alpha^2-4} < \alpha \iff \alpha > 2$

$(\square)_2$ $\lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2-4}}{2} < 0 \iff -\alpha < \sqrt{\alpha^2-4} \iff \alpha > 2$

$|\alpha| < 2$ $\lambda_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm i\sqrt{4-\alpha^2}$, $Re\,\lambda_{1,2} < 0 \iff \alpha > 0$

Soluzione particolare: $y_p(x) = Ae^{-x}$, $\alpha \neq 2$

$y_p'' + \alpha y_p' + y_p = Ae^{-x}(1 - \alpha + 1) \overset{?}{=} e^{-x} \iff A = \frac{1}{2-\alpha}$

Se $\alpha = 2$, allora
$$y_p(x) = A x^2 e^{-x}$$
$$y_p'(x) = A e^{-x}(2x - x^2)$$
$$y_p''(x) = A e^{-x}(x^2 - 2x + 2 - 2x)$$

$$y_p'' + \overset{\alpha}{\overset{\|}{2}} y_p' + y_p = A e^{-x}\left(\cancel{x^2} - \cancel{4x} + 2 + \cancel{4x} - 2\cancel{x^2} + \cancel{x^2}\right)$$
$$= 2A e^{-x} \overset{?}{=} e^{-x} \iff A = 1/2 .$$