ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 20.07.2018

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ definiti da

$$f(x,y) = x^2\, y\, e^{x-y}, \qquad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq -4,\ y \geq 0,\ y \leq -x\}.$$

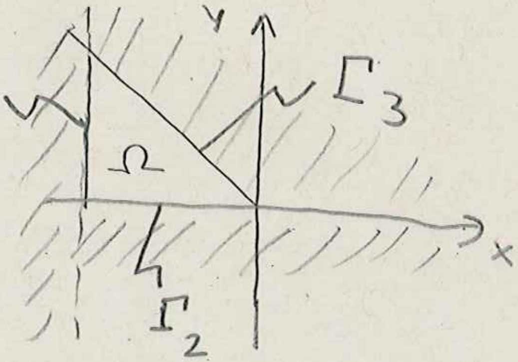
Determinare $\max_\Omega f$ e $\min_\Omega f$.

6 punti

Risposta: $\min_\Omega f = 0, \quad \max_\Omega f = 4e^{-3}$.

Svolgimento:

Punti critici interni:



$$f_x = e^{x-y}(2xy + x^2y) = 0$$

$$f_y = e^{x-y}(x^2 - x^2y) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} xy(2+x) = 0 \\ x^2(1-y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

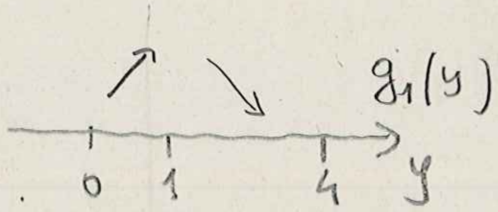
$$\text{oppure } \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Quindi l'unico punto critico interno è $P_0 = (-2, 1)$.

Candidati su $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$

Γ_1: $f|_{\Gamma_1} = 16 y e^{-4-y} =: g_1(y)$

$$g_1'(y) = 16e^{-4-y}(1-y)$$



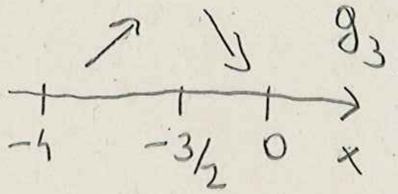
Quindi $P_1 = (-4,0)$ e $P_2 = (-4,4)$ candidati punti di minimo

$P_3 = (-4,1)$ candidato punto di massimo

Γ_2 : $f|_{\Gamma_2} \equiv 0$ tutti candidati

Γ_3 : $f|_{\Gamma_3} = -x^3 e^{2x} = g_3(x)$

$$g_3'(x) = -e^{2x}(3x^2+2x^3)$$
$$= -e^{2x}\, x^2 (3+2x)$$



Quindi $P_1 = (-4,4)$ e $P_4 = (0,0)$ candidati pti di min

$P_5 = (-3/2, 3/2)$ candidati pti max

$f(P_0) = 4e^{-3}$

$f(P_1) = 0 = f(P_4)$

$f(P_2) = 64e^{-8}$

$f(P_3) = 16e^{-5}$

$f(P_5) = \frac{27}{8} e^{-3} < 4e^{-3}$

(2) Calcolare

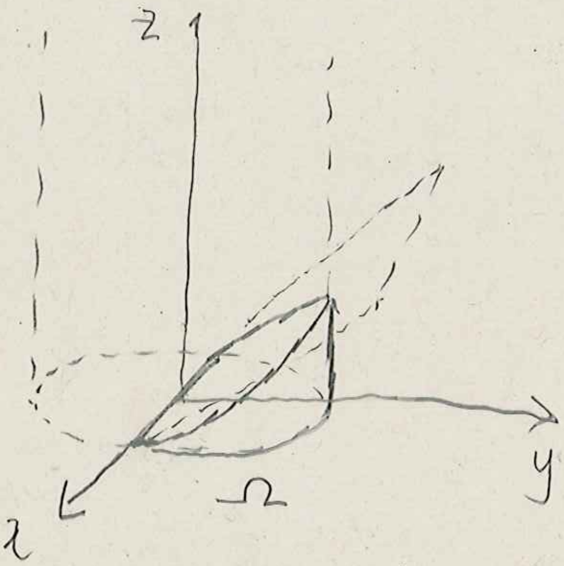
$$\iiint_\Omega x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \qquad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \le 1, \ 0 \le z \le y \}.$$

6 punti

Risposta: $2/15$.

Svolgimento:

Per fili:



$$\Omega = \{ x^2+y^2 \le 1 \ , \ 0 \le z \le y \}$$

$$\le$$

$$= \{ (x,y) \in D : \ 0 \le z \le y \}$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 1 \ , \ y \ge 0 \}$$

$$\iiint_\Omega x^2 \, d\underline{x} = \iint_D \int_0^y x^2 \, dz \, dx dy = \iint_D x^2 y \, dx dy$$

$$\underset{\text{coord. cil.}}{=} \int_0^\pi \int_0^1 r^4 \cos^2\varphi \sin\varphi \, dr \, d\varphi$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{\cos^3\varphi}{3} \right]_0^\pi = \frac{2}{15}$$

(3) Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $\mathrm{F}_\alpha : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathrm{F}_\alpha(\mathrm{x}) = \|\mathrm{x}\|^{1-\alpha}\mathrm{x}, \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}.$$

a) Determinare i valori di α per i quali F_α è conservativo, e per tali valori determinarne una funzione potenziale.

b) Calcolare

$$\int_\gamma (\mathrm{F}_\alpha(x,y,z) + (0,0,z^2))\cdot \mathrm{dx}, \qquad \gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (t^5+t^7, \log(2-t^2), t^2).$$

c) Determinare i valori di α per i quali $\operatorname{div} \mathrm{F}_\alpha = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

$\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta: a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $U_\alpha(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{1}{3-\alpha}\|\underline{x}\|^{3-\alpha} & \alpha \neq 3 \\ \log\|\underline{x}\| & \alpha = 3 \end{cases}$

b) $0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ c) $\alpha = 4$

Svolgimento:

a) Osservando che $\nabla\|\underline{x}\| = \dfrac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$ per $\underline{x} \neq \underline{0}$, si può scrivere

$$F_\alpha(\underline{x}) = \|\underline{x}\|^{2-\alpha}\frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \|\underline{x}\|^{2-\alpha}\nabla\|\underline{x}\|$$

quindi per la regola della catena

$$F_\alpha(\underline{x}) = \nabla U_\alpha(\underline{x}) \quad \text{con} \quad U_\alpha(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{1}{3-\alpha}\|\underline{x}\|^{3-\alpha} & \alpha \neq 3 \\ \log\|\underline{x}\| & \alpha = 3 \end{cases}$$

b) Si notie che $\operatorname{im}\gamma \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$. Quindi

$$\int_\gamma F_\alpha(\underline{x})\, d\underline{x} = U(\gamma(1)) - U(\gamma(-1))$$
$$= U(2,0,1) - U(-2,0,1) = 0 \quad \forall \alpha$$

Inoltre (oppure osservando che $\mathrm{rot}(0,0,z^2) = \underline{0}$)

$$\int_\gamma (0,0,z^2) \cdot (dx, dy, dz) = \int_\gamma z^2 \, dz$$

$$= \int_{-1}^{1} t^4 \cdot 2t \, dt = 0 .$$

c) $$\mathrm{div}\left(\|\underline{x}\|^{1-\alpha} \underline{x} \right) = \left(\nabla \|\underline{x}\|^{1-\alpha} \right) \cdot \underline{x} + \|\underline{x}\|^{1-\alpha} \mathrm{div}(\underline{x})$$

$$= (1-\alpha) \|\underline{x}\|^{-\alpha} \cdot \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} \cdot \underline{x} + 3 \|\underline{x}\|^{1-\alpha}$$

$$= (4-\alpha) \|\underline{x}\|^{1-\alpha} = 0 \iff \alpha = 4$$

(4) Per ciascun valore di $\lambda > 0$, determinare tutte le soluzioni del seguente problema:

$$\begin{cases} y''(x) + \lambda^2 y(x) = 1, & x \in (0,1) \\ y'(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

6 punti

Risposta: $y(x) = -\dfrac{1}{\lambda^2 \cos\lambda}\cos(\lambda x) + \dfrac{1}{\lambda^2}$ se $\cos\lambda \neq 0$

nessuna soluzione se $\cos\lambda = 0$

Svolgimento:

Integrale generale dell'omogenea:

$$y_0(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)$$

Soluzione particolare per somiglianza:

$$y_p(x) = 1/\lambda^2$$

Integrale generale: $y(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + 1/\lambda^2$

$$y'(x) = -\lambda A\sin(\lambda x) + B\lambda\cos(\lambda x)$$

$$y'(0) = B\lambda = 0 \underset{\lambda>0}{\iff} B = 0$$

$$y(1) = A\cos(\lambda) + \frac{1}{\lambda^2} = 0$$

$$\iff A = -\frac{1}{\lambda^2\cos\lambda} \quad \text{se } \cos\lambda \neq 0$$

Nessuna soluzione se $\cos\lambda = 0$

(5) Rispondere alle domande che saranno distribuite durante il compito.

(1) Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ tale che $\|\mathbf{v}\| = 1$.

a) Dare la definizione di $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$.

b) Se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, dare una formula alternativa alla definizione per calcolare $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$ e dimostrarla.

c) Se $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, dire qual è la direzione di massima crescita di f in (x_0, y_0) e dimostrarlo.

(2) Enunciare le formule di Green in $\mathbb{R}^2$ e dimostrarle.

.... $\boxed{\text{8 punti}}$

Svolgimento: