ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 18.07.2019

A

Cognome: VERSIONE Nome: PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Determinare l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} 2y''(x) = 3\,(y(x)+1)^2 \\ y(0) = 0, \ y'(0) = -1. \end{cases}$$

6 punti

Risposta: $y(x) = 4\,(x+2)^{-2} - 1 \quad , \quad x > -2.$

Svolgimento:

EDO del II ordine autonoma.

$v(y) = y'(x(y)) \qquad v'(y) = y''(x(y))\, x'(y)$

$= y''(x(y)) \dfrac{1}{y'(x(y))} = \dfrac{3(y+1)^2}{2\, v(y)}$

Separazione di variabili:

$2\int v(y)\, v'(y)\, dy = \int 3(y+1)^2\, dy$

$v^2(y) = (y+1)^3 + C \iff (y'(x))^2 = (y(x)+1)^3 + C$

(a questo risultato si arriva anche più facilmente, moltiplicando la EDO per y'; controllate!)

$$\begin{cases} y(0)=0 \\ y'(0)=-1 \end{cases} \iff (-1)^2 = (0+1)^3 + C \iff C = 0$$

$$y'^2(x) = (y(x)+1)^3 \iff y'(x) = \pm (y(x)+1)^{3/2}$$

Poiché $y'(0) = -1$, scelgo il segno $-$:

$$y'(x) = -(y(x)+1)^{3/2}$$

Variabili separabili:

$$-\int (y(x)+1)^{-3/2} y'(x)\,dx = \int 1\,dx$$

$$\cancel{2}(y(x)+1)^{-1/2} = \frac{x+C}{2}$$

$$y(0) = 0 \iff 1 = \frac{C}{2} \iff C = 2$$

$$y(x) = -1 + \left(\frac{2}{x+2}\right)^2, \quad x > -2.$$

(2)

a) Verificare che, in un intorno di $x = 0$, l'equazione

$$y^2 e^{-xy} + (x+1)y - 2\cos x = 0$$

ha due soluzioni $y_1(x)$, $y_2(x)$.

b) Sia r_1 la retta tangente al grafico di $y = y_1(x)$ in $x = 0$ e sia r_2 la retta tangente al grafico di $y = y_2(x)$ in $x = 0$. Determinare (purché esista) il punto di intersezione tra r_1 e r_2.

6 punti

Risposta: (a) vedi svolgimento

(b) $\left(3/2, 1\right)$

Svolgimento:

(a) $f(x,y) = y^2 e^{-xy} + (x+1)y - 2\cos x$

$f(0,y) = y^2 + y - 2 \qquad \Delta = +1 + 8 = 9$

$y_1, y_2 = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$

Considero i punti $P_1 = (0,1)$ e $P_2 = (0,-2)$ e verifico le ipotesi del Teorema di Dini:

$\nabla f(x,y) = \left(-y^3 e^{-xy} + y + 2\sin x, \ -xy^2 e^{-xy} + 2y e^{-xy} + x + 1\right)$

$\nabla f(0,1) = (0, 3)$, $\nabla f(0,-2) = (6, -3)$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \neq 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,-2) \neq 0$, si può applicare Dini in un intorno di ciascuno dei due punti.

(b) $$y_1'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,1)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1)} = 0$$

$$\boxed{r_1 : \quad y = 1}$$

$$y_2'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,-2)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,-2)} = \frac{-6}{-3} = 2$$

$$\boxed{r_2 : \quad y = -2+2x}$$

$1 = -2 + 2x \iff x = 3/2$

(3) Per $A \in \mathbb{R}$, sia $\mathbf{V}_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{V}_A = (\ 2xyz - z\ ,\ x^2z + 1\ ,\ x^2y - x + Ay\ ).$$

a) Determinare (purché esistano) i valori di A per cui $\mathbf{V}_A$ è conservativo in $\mathbb{R}^3$; per tali valori, determinare una funzione potenziale.

b) Determinare (purché esistano) i valori di A per cui è nullo il lavoro di $\mathbf{V}_A$ lungo la curva $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (\ 2^t - t^2 - 1\ ,\ \cos(\pi t)\ ,\ t^2\ ), \quad t \in [0,1].$$

$\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta: (a) $A = 0, \quad U(x,y,z) = x^2yz + y - xz$

(b) $A = -\pi^2/2$

Svolgimento:

(a) $U(x,y,z) = \int (x^2z+1)\,dy = x^2yz + y + C(x,z)$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2xyz + \frac{\partial C}{\partial x}(x,z) \overset{\nabla}{\underset{\circ}{=}} 2xyz - z$$

$$\iff \frac{\partial C}{\partial x}(x,z) = -z \iff C(x,z) = -xz + D(z)$$

Quindi $\quad U(x,y,z) = x^2yz + y - xz + D(z)$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^2y - x + D'(z) \overset{\nabla}{\underset{\circ}{=}} x^2y - x + Ay$$

$$\iff A = 0, \quad D'(z) = 0$$

(b) Riscrivo $\quad \underline{V_A} = \underline{V_0} + (0,0,Ay)$

$\underline{V_0}$ è conservativo, quindi

$$\int_\gamma \underline{V_0} \cdot d\underline{x} = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0))$$

$$= U(0,-1,1) - U(0,1,0)$$

$$= -1 - 1 = -2$$

$$\int_\gamma (0,0,Ay) \cdot d\underline{x} = \int_\gamma Ay\, dz = \int_0^1 A\cos(\pi t) \cdot 2t\, dt$$

$$= 2A \int_0^1 t\cos(\pi t)\, dt$$

$$= \frac{2A}{\pi}\left(\left[t\sin(\pi t) \right]_0^1 - \int_0^1 \sin(\pi t)\, dt \right)$$

$$= \frac{2A}{\pi^2} \left[\cos(\pi t) \right]_0^1 = -\frac{4A}{\pi^2}$$

$$\int_\gamma \underline{V} \cdot d\underline{x} = -2 - \frac{4A}{\pi^2} = 0 \iff A = -\frac{\pi^2}{2}$$

(4) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ il solido ottenuto ruotando l'insieme

$$E = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z \geq 0, \ 0 \leq y \leq 1 - z\}$$

di un angolo 2π intorno all'asse z. Calcolare

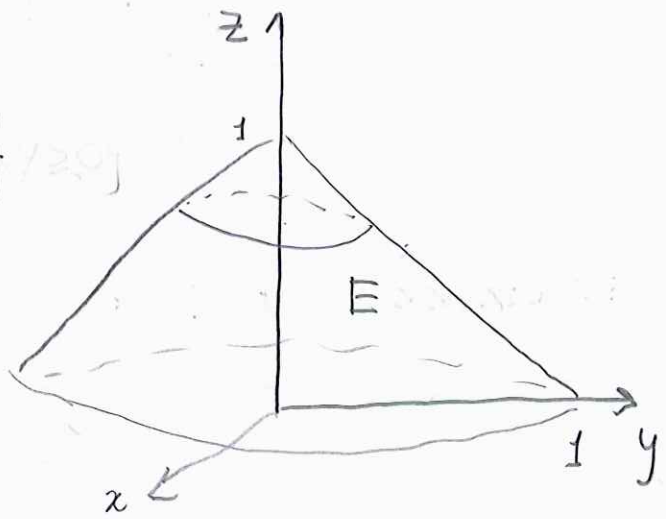
$$\iiint_\Omega |y|z \, dxdydz.$$

6 punti

Risposta: $1/15$

Svolgimento:

$$\Omega = \{ z \in [0,1], \ x^2 + y^2 \leq 1 - z \}$$



Per strati:

$$\iiint_\Omega |y| z \, dx = \int_0^1 \left(\iint_{\Omega_z} |y| z \, dx dy \right) dz = \int_0^1 z \left(\iint_{\Omega_z} |y| \, dx dy \right) dz$$

$$\Omega_z = \left\{ \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - z \right\}$$ Coord. polari: $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$

$$= \int_0^1 z \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} \rho^2 |\sin\varphi| \, d\varphi \, d\rho \, dz$$

$$= 2 \int_0^1 z \int_0^{\pi} \int_0^{1-z} \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\rho \, dz$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^1 z (1-z)^3 dz = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-z)^4 dz \overset{4/5}{=} \frac{1}{15}.$$

In alternativa, si può integrare per fili:

in tal caso

$$\Omega = \{ x^2 + y^2 \le 1 , \quad 0 \le z \le 1-\rho \}$$

da cui, in coordinate cilindriche,

$$\iiint_\Omega |y| z \, d\underline{x} = 2 \int_0^{\pi} \int_0^{1} \int_0^{1-\rho} \rho^2 \sin\varphi \, z \, dz \, d\rho \, d\varphi$$

e svolgendo i calcoli si giunge alla stessa conclusione (controllate!)