ANALISI MATEMATICA 2 — ING. AEROSPAZIALE — APPELLO DEL 23.01.2020 **A**

Cognome: VERSIONE **Nome:** PRELIMINARE

Solo durante le prime 2 ore è consentita la consultazione di un libro di testo di teoria. È sempre vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per ottenere la sufficienza occorre SIA risolvere correttamente e completamente almeno 2 esercizi, SIA ottenere almeno 18 punti. È possibile ritirarsi in qualunque momento. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. Consultare il docente SOLO in caso di dubbi sul testo. Questo documento è composto da 5 fogli e contiene 4 esercizi e lo spazio per rispondere alle domande che saranno consegnate in seguito.

(1) Determinare l'area del seguente insieme:

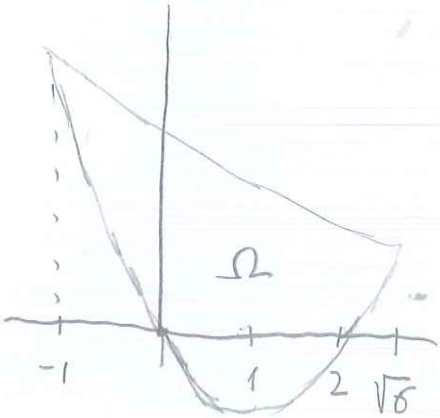
$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x(x-2) < y < \frac{6}{x+3} \ , \ x \geq -1\right\}.$$

6 punti

Risposta: $6 \log\left(\frac{3+\sqrt{6}}{2}\right) - 2\sqrt{6} + \frac{14}{3}$

Svolgimento:

Riscrivo Ω come dominio semplice:



$$x(x-2) < \frac{6}{x+3} \underset{x \geq -1}{\iff} (x^2-2x)(x+3) < 6$$

$$\iff x^3+3x^2-2x^2-6x-6<0$$

$$\iff (x+1)(x^2-6)<0 \underset{x\geq -1}{\iff} -1 \leq x < \sqrt{6}$$

$$|\Omega| = \int_{-1}^{\sqrt{6}} \int_{x(x-2)}^{\frac{6}{x+3}} dy\, dx = \int_{-1}^{\sqrt{6}} \left(\frac{6}{x+3} - x(x-2)\right) dx$$

$$= \left[6 \log|x+3| - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{\sqrt{6}} = 6 \log \frac{3+\sqrt{6}}{2} - 2\sqrt{6} - \frac{1}{3} + 5$$

(2) Sia $y(x)$ l'unica soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x\,y'(x) = 2\,y(x) \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Determinare la minima distanza del grafico di y dal punto $(0,3)$.

.... $\boxed{\text{6 punti}}$

Risposta: $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

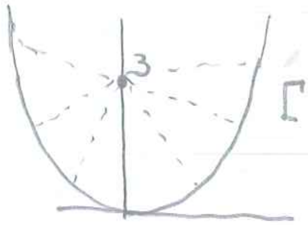
....

Svolgimento:

Si ha $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x}$, quindi $\log|y| = 2\log|x| + c$,

quindi $y(x) = Kx^2$, e da $y(1)=1$ si ottiene $K=1$.

Pertanto $y(x) = x^2$ è la soluzione cercata.



$$\Gamma = \operatorname{graf} y = \{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$$

$$d(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

Metodo di sostituzione diretta; si può usare anche il metodo dei moltiplicatori, oppure considerazioni geometriche

$$d(x,y)\big|_{\Gamma} = f(x) = \sqrt{x^2 + (x^2-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+(x^2-3)^2}}\left[x + 2(x^2-3)x\right] = \frac{x(2x^2-5)}{\sqrt{x^2+(x^2-3)^2}}$$

Candidati : $x = 0, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$, ovvero $(0,0), \left(\sqrt{\frac{5}{2}}, 2\right), \left(-\sqrt{\frac{5}{2}}, 2\right)$

$$d(0,0) = 3$$

$$d\left(\pm\sqrt{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}\right) = \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

(3) Sia Σ^+ la superficie definita da

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2=4, \ y \geq 0, \ 0 \leq z \leq 2\},$$

orientata in modo che $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_2 \geq 0$. e sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (3x, y, 2z).$$

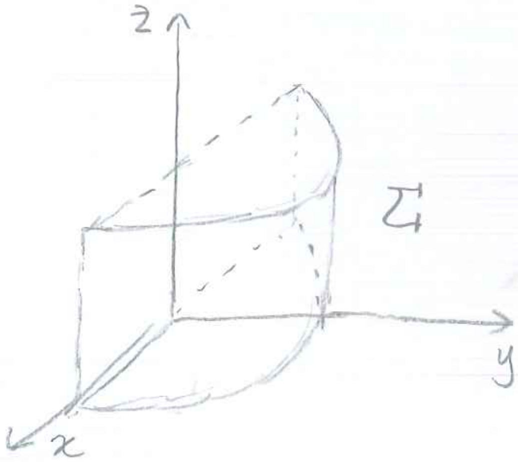
Determinare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso Σ^+.

.... 6 punti

Risposta: 16π

....

Svolgimento:



Due strade possibili (al meno):

I. Calcolo diretto

$$\sigma(\varphi, z) = (2\cos\varphi, 2\sin\varphi, z) \quad \varphi \in [0,\pi]$$

$$\sigma_\varphi(\varphi, z) = (-2\sin\varphi, 2\cos\varphi, 0)$$

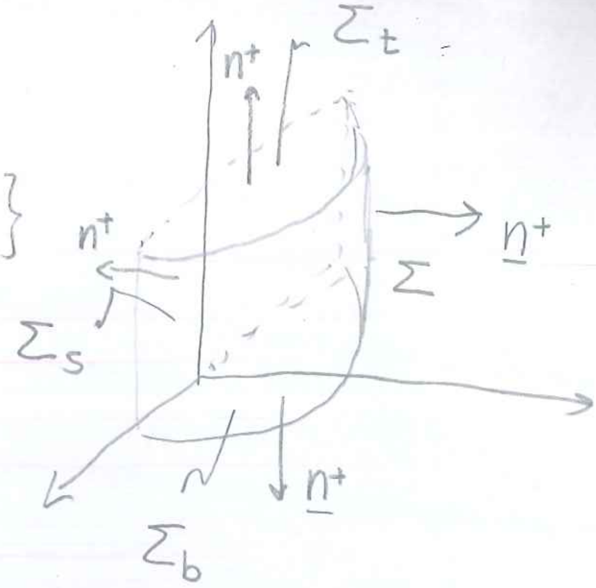
$$\sigma_z(\varphi, z) = (0, 0, 1)$$

$$\sigma_\varphi \wedge \sigma_z = (2\cos\varphi, \underset{\underset{0}{\vee\!/}}{2\sin\varphi}, 0) \quad \text{OK}, \quad |\sigma_\varphi \wedge \sigma_z| = 2$$

$$\iint_{\Sigma_1} \underline{F} \cdot \underline{n} \, dS = \int_0^2 \int_0^\pi (6\cos\varphi, 2\sin\varphi, 2z) \cdot \frac{(2\cos\varphi, 2\sin\varphi, 0)}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \, d\varphi \, dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^\pi 12\cos^2\varphi + 4\sin^2\varphi = 2 \cdot (12+4)\frac{\pi}{2} = 16\pi.$$

II. Utilizzo Teo divergenza



$$\Omega = \{ x^2+y^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 2 \}$$

$$\partial\Omega = \Sigma + \Sigma_t + \Sigma_b + \Sigma_s$$

(vedi figura)

$$\iint_{\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{n}^+ dS = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \underline{F} - \iint_{\Sigma_b} \underline{F} \cdot \underline{n}^+ - \iint_{\Sigma_t} \underline{F} \cdot \underline{n}^+ - \iint_{\Sigma_s} \underline{F} \cdot \underline{n}^+$$

Su Σ_b: $\underline{F} = (3x, y, 0)$, $\underline{n} = (0,0,-1) \Rightarrow \underline{F} \cdot \underline{n}^+ = 0$

Su Σ_t: $\underline{F} = (3x, y, 4)$, $\underline{n} = (0,0,1) \Rightarrow \underline{F} \cdot \underline{n}^+ = 4$

Su Σ_s: $\underline{F} = (3x, 0, z)$, $\underline{n} = (0,-1,0) \Rightarrow \underline{F} \cdot \underline{n}^+ = 0$

$$\operatorname{div} \underline{F} = 3 + 1 + 2 = 6$$

$$\iint_{\Sigma} \underline{F} \cdot \underline{n}^+ dS = 6 \operatorname{vol}(\Omega) - 4 \operatorname{area} \Sigma_t$$

$$= 6 \cdot \frac{8\pi}{2} - 4 \cdot \frac{4\pi}{2} = (24-8)\pi = 16\pi$$

(4) Sia $\gamma^+ : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da $\gamma(t) = (e^{-t}, e^{t})$ e orientata nel verso di t crescente.

a) Determinare una parametrizzazione equivalente di γ che sia cartesiana e utilizzarla per tracciare il sostegno di γ;

b) calcolare $\int_\gamma x^{\cancel{6}\,5}\,\mathrm{d}s$;

c) calcolare il lavoro lungo γ^+ del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (\log x, \log y)$.

. . . . 6 punti

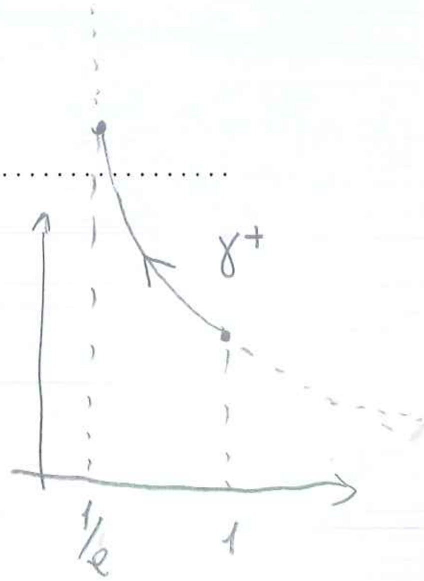
Risposta: a) vedi svolgimento

b) $\frac{1}{6}\left(2^{3/2} - (1+e^{-4})^{3/2}\right)$

c) $2 - 2/e$

. . . .

Svolgimento:



a) $\gamma^+(t) = (e^{-t}, e^{t}) \qquad t \in [0,1]$

$$\underset{x}{e^{-t}} \qquad \underset{y}{e^{t}}$$

$$\bar{\gamma}(x) = \left(x, \frac{1}{x}\right), \quad x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$$

b) $\gamma'(t) = (-e^{-t}, e^{t}) \qquad |\gamma'(t)| = \sqrt{e^{-2t} + e^{2t}}$

$$\int_\gamma x^5\,ds = \int_0^1 e^{-5t}\sqrt{e^{-2t}+e^{2t}}\,dt = \int_0^1 e^{-5t}\sqrt{e^{2t}(1+e^{-4t})}$$

$$= \int_0^1 e^{-4t}\sqrt{1+e^{-4t}}\,dt = -\frac{1}{6}\left(1+e^{-4t}\right)^{3/2}\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{6}\left[(1+e^{-4})^{3/2} - 2^{3/2}\right]$$

c) $$\int_{\gamma^+} \underline{F}\cdot d\underline{x} = \int_0^1 (-t, t)\cdot(-e^{-t}, e^{t})\,dt = \int_0^1 (te^{-t} + te^{t})\,dt$$

$$= 2 - 2/e$$

(1) Si considerino funzioni $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $N \geq 2$.

a) Dare la definizione di f differenziabile in $\mathbf{x}_0 \in \overset{\circ}{\Omega}$.

b) Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat.

c) Dedurre da (b) un elenco completo e non banale dei possibili candidati ad essere punto di estremo locale per f in Ω.

2) Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ e sia $\gamma \in C^1([0,1])$ una curva piana. Dire quanto vale $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(f(\gamma(s)))$ e dimostrarlo.