VERSIONE PROVVISORIA – SI PREGA DI SEGNALARE EVENTUALI ERRORI

(*) Determinare (purché esistano) i punti critici della seguente funzione e stabilirne la natura:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x(4 - x^2 - y^2).$$

Facoltativo: stabilire la natura di uno dei punti critici senza utilizzare la matrice hessiana.

. . . . 6 punti

Risposta: $(0, \pm 2)$ punti di sella, $(2/\sqrt{3}, 0)$ punto di massimo locale, $(-2/\sqrt{3}, 0)$ punto di minimo locale.

. . . .

Svolgimento. Si ha

$$\begin{aligned} f_x &= 4 - 3x^2 - y^2 = 0 \\ f_y &= -2xy = 0 \end{aligned}$$

se e solo se

$$\begin{aligned} 4 - y^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{aligned} 4 - 3x^2 &= 0 \\ y &= 0. \end{aligned}$$

Quindi i punti critici sono

$$P_1 = (0, 2), \ P_2 = (0, -2), \ P_3 = (2/\sqrt{3}, 0), \ P_4 = (-2/\sqrt{3}, 0).$$

Si ha

$$\det D^2 f(x, y) = \det \begin{pmatrix} -6x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix} = 12x^2 - 4y^2.$$

Quindi P_1 e P_2 sono punti di sella, P_3 è un punto di massimo locale e P_4 è un punto di minimo locale.

Si ha $f(0, 2) = 0$ e

$$f(x, 2) = -x^3 \gtrless 0 \iff x \lessgtr 0,$$

perciò $(0, 2)$ è un punto di sella.

(*) Determinare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2) - x^2 - y$$

e stabilirne la natura.

. . . . 7 punti

Risposta: $(0, 2)$ punto di massimo locale, $(\pm\sqrt{3}/2, 1/2)$ punti di sella.

. . . .

Svolgimento. Si ha

$$\begin{cases} f_x = \frac{2x}{x^2+y^2} - 2x = 2x\left(\frac{1}{x^2+y^2} - 1\right) = 0 \\ f_y = \frac{2y}{x^2+y^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

se e solo se

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ \frac{2}{y} - 1 = 0 \end{array} \right\} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2y - 1 = 0. \end{cases}$$

Perciò i punti critici sono $(0,2)$, $(\sqrt{3}2, 1/2)$ e $(-\sqrt{3}2, 1/2)$. Si ha

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} - 2 & \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Valutandolo nei punti critici si ottiene la risposta.

(*) Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}y, \qquad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 1\right\}.$$

.... 7 punti

Risposta: $\max f = 3/8$, $\min f = -3/4$.

....

Svolgimento. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{y}{2} + \frac{1}{2}\right) = \mathbf{0} \iff (x,y) = (0,1),$$

quindi f non ha punti critici interni. Perciò il massimo e il minimo (che esistono per il Teorema di Weierstrass) sono assunti su $\partial\Omega$. Posto

$$L(x,y,\lambda) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}y + \lambda(1 - x^2 - y^2),$$

si ha

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \left(\frac{x}{2} - 2\lambda x, -\frac{y}{2} + \frac{1}{2} - 2\lambda y, 1 - x^2 - y^2\right) = \mathbf{0}$$

se e solo se

$$x = 0, \ y = \pm 1 \quad \text{oppure} \quad (\lambda = 1/4,)\ y = 1/2, \ x = \pm\sqrt{3}/2.$$

Si ha

$$f(0,1) = 1/4, \ f(0,-1) = -3/4, \ f(\pm\sqrt{3}/2, 1/2) = 3/8,$$

da cui segue la risposta.

Per studiare f su $\partial\Omega$ si può in alternativa considerare la funzione

$$g(y) = f(1-y^2, y) = \frac{1}{4}(1 - 2y^2 + 2y), \quad y \in [-1,1]$$

e osservare che g ha massimo assoluto in $y = 1/2$ e minimo assoluto in $y = -1$, oppure passare in coordinate polari.

(*) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x,y) = 3x^3 + y^3$.

(a) Determinare la natura dei punti critici.

(b) Determinare i punti di massimo assoluto e i punti di minimo assoluto di f nel seguente insieme:

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 3x^4 + y^4 \le 1\right\}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

(a) $(0,0)$ punto di sella; (b) $\max_K f = \sqrt{2}$, $\min_K f = -\sqrt{2}$.

. . . .

Svolgimento:

(a) Si verifica facilmente che $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e solo se $(x,y) = (0,0)$. Poiché $f(0,0) = 0$, si ha

$$f(x,y) - f(0,0) = (3^{1/3}x + y)\underbrace{(3^{2/3}x - 3^{1/3}xy + y^2)}_{>0\ \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2} \gtreqless 0 \iff 3^{1/3}x \gtreqless -y,$$

quindi $(0,0)$ è un punto di sella (per esempio, $f(0,y) - f(0,0) \gtreqless 0$ se e solo se $y \gtreqless 0$).

(b) Sia

$$L(x,y,\lambda) = 3x^3 + y^3 - \lambda(3x^4 + y^4 - 1).$$

Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} L_x = 9x^2 - 12\lambda x^3 = 3x^2(3 - 4\lambda x) = 0 \\ L_y = 3y^2 - 4\lambda y^3 = y^2(3 - 4\lambda y) = 0 \\ L_\lambda = 1 - 3x^4 - y^4 = 0 \end{cases}$$

si ottiene

$$(x,y) = (\pm 1/3^{1/4}, 0) \ \text{ oppure } \ (x,y) = (0, \pm 1) \ \text{ oppure } \ (x,y) = \pm(1,1)/\sqrt{2}.$$

Valutando la funzione in tali punti si ottiene, rispettivamente,

$$\pm 3^{1/4},\ \pm 1,\ \pm\sqrt{2},$$

da cui segue la risposta ($3^{1/4} < 2^{1/2}$ visto che $3 < 4$).

(*) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = (1 - x^2 - y^2)(x + y)$$

e sia

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0\}.$$

Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto di f in Ω.

. . . . 7 punti

Risposta:

$\max_\Omega f = f(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, $\quad \min_\Omega f = f(0, -1/\sqrt{3}) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

. . . .

Svolgimento:

I punti critici interni si determinano risolvendo

$$\nabla f = (-2x(x+y) + 1 - x^2 - y^2, -2y(x+y) + 1 - x^2 - y^2) \overset{!}{=} (0,0).$$

Sottraendo le due equazioni e svolgendo semplici calcoli, si ottiene che l'unico punto critico *interno* ad Ω è $P_1 = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})$. Per quanto riguarda $\partial\Omega$, si ha

$$f|_{\Gamma_1} \equiv 0, \quad \Gamma_1 = \partial\Omega \cap \{x^2 + y^2 = 1\}$$

mentre su $\Gamma_2 = \partial\Omega \cap \{x = 0\}$ si studia la funzione

$$g : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad g(y) := f(0, y) = y(1 - y^2)$$

e si verifica che $y = -1$ e $y = 1/\sqrt{3}$ sono punti di massimo locale per g in $[-1, 1]$, mentre $y = -1/\sqrt{3}$ e $y = 1$ sono punti di minimo locale. Confrontando i valori dei candidati ottenuti si ottiene la risposta.

(*) Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto della funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x\left(x^2 - y + 2\right), \quad \Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 \leq y \leq x^2 + 4\right\}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$$\max_{\Omega} f = 4, \quad \min_{\Omega} f = -4.$$

. . . .

Svolgimento: Si ha

$$\nabla f(x, y) = (0, 0) \iff \left(3x^2 - y + 2, -x\right) = (0, 0) \iff (x, y) = (0, 2),$$

quindi $P_0 := (0, 2)$ è un punto critico interno ad Ω. Si ha inoltre $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, \ y = 2x^2\}$$
$$\Gamma_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, \ y = x^2 + 4\}$$

Restringendo la funzione su Γ_1 si ottiene

$$\phi_1(x) := f|_{\Gamma_1} = x\left(2 - x^2\right), \quad x \in [-2, 2]$$

e si verifica che $x = -2$ ed $x = \sqrt{2/3}$ sono punti di massimo locale per ϕ_1, mentre $x = -\sqrt{2/3}$ ed $x = 2$ sono punti di minimo locale per ϕ_1. A tali punti corrispondono i candidati $P_1 := (-2, 8)$ e $P_2 := (\sqrt{2/3}, 4/3)$ (possibili punti di massimo locale per f) e $P_3 := (-\sqrt{2/3}, 4/3)$ e $P_4 := (2, 8)$ (possibili punti di minimo locale per f). Su Γ_2 si ha invece che

$$\phi_2(x) := f|_{\Gamma_2} = -2x, \quad x \in [-2, 2]$$

da cui segue che $x = -2$ ed $x = 2$ sono, rispettivamente, punti di massimo locale e di minimo locale per $\phi_2(x)$, cui corrispondono i candidati P_1 e P_4. Confrontando i valori dei candidati $P_0, \ldots, P_4$ si ottiene la risposta.

(*) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2.$$

Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto di f su

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 + 2x \leq 0, \ x \geq -\frac{3}{2}\right\}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$$\min_{\Omega} f = 0, \quad \max_{\Omega} f = 19/16.$$

. . . .

Cenno di svolgimento:
La funzione ha un punto critico interno $(-1/2, 0)$. Su $\partial\Omega$ si ottengono i punti critici vincolati $(0, 0)$, $(-1/3, \pm\sqrt{5}/6)$ e $(-3/2, 0)$. Inoltre si devono considerare a parte i "vertici" $(-3/2, \pm\sqrt{3}/4)$. Confrontando i valori si ottiene la risposta.

(*) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^5 - x^2 y + 1.$$

Verificare che il Teorema delle funzioni implicite (o di Dini) è applicabile in un intorno del punto $(1, 0)$ e determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x = 1$ della funzione $x \mapsto g(x)$ definita implicitamente da

$$f(x, y) = f(1, 0).$$

. . . . 7 punti

Risposta: $5(x - 1)$.

. . . .

Svolgimento. Si ha

$$\nabla f(x, y) = (5x^4 - 2xy, -x^2), \quad \nabla f(1, 0) = (5, -1),$$

quindi il teorema di Dini è applicabile rispetto a entrambe le variabili. Segue dal Teorema di Dini che

$$g'(x) = -\frac{5x^4 - 2xg(x)}{-x^2} = 5x^2 - \frac{2g(x)}{x}, \quad g''(x) = 10x - \frac{2g'(x)}{x} + \frac{g(x)}{x^2},$$

quindi

$$g(1) = 0,\ g'(1) = 5,\ g''(1) = 10 - 10 = 0$$

da cui segue la risposta.

Si noti che in questo caso g può anche essere ricavata esplicitamente:

$$f(x, y) = f(1, 0) \iff x^5 - x^2 y + 1 = 2 \iff y = \frac{x^5 - 1}{x^2} = x^3 - \frac{1}{x^2} =: g(x),$$

da cui

$$g'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x^3},\ g''(x) = 6x - \frac{6}{x^4},$$

e valutando in $x = 1$ si riottiene la risposta.

(*) Verificare che, in un intorno del punto $(x, y) = (1, \pi)$, l'equazione

$$\sin(xy) - x = -1$$

individua implicitamente una funzione $y = g(x)$ oppure $x = h(y)$. Determinare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine (con centro in $x_0 = 1$ oppure in $y_0 = \pi$, rispettivamente) della funzione cosí ottenuta.

7 punti

Risposta:

$g(x) = \pi - (1+\pi)(x-1) + (1+\pi)(x-1)^2$.

Svolgimento:
Lo svolgimento mediante il Teorema di Dini è standard e si rimanda allo svolgimento della prova precedente. Si osservi che, in alternativa, l'equazione può essere risolta esplicitamente rispetto a x in un intorno di $(1, \pi)$, osservando che $\sin(xy) = -\sin(xy - \pi)$: si ottiene

$$y = g(x) = \frac{\pi + \arcsin(1-x)}{x}.$$

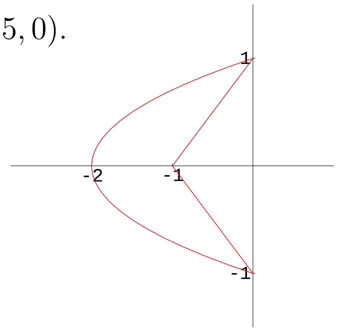
(*) Disegnare l'insieme

$$\Omega = \left\{(x, y) : \ 2(y^2 - 1) \le x \le |y| - 1\right\}$$

e calcolarne il baricentro.

7 punti

Risposta: $(x_b, y_b) = (-27/25, 0)$.



Svolgimento. La rappresentazione di Ω segue dal grafico delle due funzioni elementari $y \mapsto 2(y^2 - 1)$ e $y \mapsto |y| - 1$. Per simmetria, $y_b = 0$. Si ha

$$|\Omega| = 2 \int_0^1 \int_{2(y^2-1)}^{y-1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2 \int_0^1 (1 + y - 2y^2)\mathrm{d}y = 2(1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}) = \frac{5}{3},$$

da cui

$$\begin{aligned} x_b &= \frac{6}{5} \int_0^1 \int_{2(y^2-1)}^{y-1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3}{5} \int_0^1 ((y-1)^2 - 4(y^2-1)^2)\mathrm{d}y \\ &= \frac{3}{5} \int_0^1 (-2y - 4y^4 + 9y^2 - 3)\mathrm{d}y = \frac{3}{5} \left(-1 - \frac{4}{5} + 3 - 3\right) = -\frac{27}{25}. \end{aligned}$$

(*) Determinare il baricentro del seguente insieme:

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| \le y \le \sqrt{|x| + 2}\right\}.$$

7 punti

Risposta:

$\left(0, \dfrac{5}{2(5-2\sqrt{2})}\right)$.

. . . .

Svolgimento: Il dominio è simmetrico rispetto a $x = 0$ perché le funzioni $x \mapsto |x|$ e $x \mapsto \sqrt{|x|+2}$ sono pari. Quindi $x_b = 0$ e

$$|\Omega| = 2|\Omega_1|, \quad y_b = \frac{1}{|\Omega_1|} \iint_{\Omega_1} y \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

dove

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, \ x \leq y \leq \sqrt{x+2}\}.$$

Si verifica facilmente che, per $x \geq 0$, $x \leq \sqrt{x+2}$ se e solo se $x \leq 2$. Pertanto

$$\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0,2], \ x \leq y \leq \sqrt{x+2}\}$$

e quindi

$$|\Omega_1| = \int_0^2 \int_x^{\sqrt{x+2}} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(5-2\sqrt{2})$$

$$y_b = \frac{3}{2(5-2\sqrt{2})} \int_0^2 \int_x^{\sqrt{x+2}} y\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \frac{5}{2(5-2\sqrt{2})}.$$

(*) Determinare le coordinate del baricentro del seguente insieme:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y^3 \leq x \leq \sqrt{y}\right\}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$(3/7, 12/25)$

. . . .

Svolgimento:
Per definzione

$$x_b = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega x \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \qquad y_b = \frac{1}{|\Omega|} \iint_\Omega y \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

dove $|\Omega|$ è l'area di Ω. Poiché

$$0 \leq y^3 \leq \sqrt{y} \Longleftrightarrow y \in [0,1],$$

Ω si riscrive come dominio semplice come segue:

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [0,1], \ y^3 \leq x \leq \sqrt{y}\right\}.$$

Pertanto

$$|\Omega| = \int_0^1 \left(\int_{y^3}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\sqrt{y} - y^3\right) \mathrm{d}y = \frac{5}{12}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} y_b = \frac{12}{5} \int_0^1 \left(\int_{y^3}^{\sqrt{y}} y \ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \ &= \ \frac{12}{5} \int_0^1 y \left(\sqrt{y} - y^3\right) \mathrm{d}y \\ &= \ \frac{12}{5} \int_0^1 \left(y^{3/2} - y^4\right) \mathrm{d}y = \frac{12}{25}, \end{aligned}$$

mentre

$$x_b = \frac{12}{5}\int_0^1 \left(\int_{y^3}^{\sqrt{y}} x \, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \frac{6}{5}\int_0^1 x^2\Big|_{y^3}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y$$
$$= \frac{6}{5}\int_0^1 \left(y - y^6\right) \mathrm{d}y = \frac{3}{7}.$$

(*) Calcolare

$$\iint_\Omega xy \; \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \quad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le y \le x, 1 \le x^2 + y^2 \le 4\right\}.$$

. . . . 7 punti

Risposta: 15/16.

. . . .

Svolgimento:

(*) Calcolare

$$I = \iiint_\Omega (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 \le z \le x - y\}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

0

. . . .

Svolgimento:

Primo metodo. Ponendo $u = x + y$ e $v = x - y$, si ottiene

$$I = -\frac{1}{2}\iiint_T u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}z, \quad T = \{(u,v,z) \in \mathbb{R}^3 : \; \frac{1}{2}(u^2+v^2) \le z \le v\}$$

e il risultato segue poiché l'integranda è dispari rispetto a $u = 0$ e il dominio è simmetrico rispetto ad $u = 0$.

Secondo metodo. Passando in coordinate cilindriche, si ottiene

$$I = \iiint_S r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z,$$

dove

$$S = \{(r,\varphi,z) \in [0,\infty) \times [-\pi,\pi] \times \mathbb{R} : \; r^2 \le z \le r(\cos\varphi - \sin\varphi)\}.$$

Si ha

$$r^2 \le r(\cos\varphi - \sin\varphi) \iff r \le \cos\varphi - \sin\varphi,$$

perciò, integrando per fili,

$$I = \iint_E \left(\int_{r^2}^{r(\cos\varphi - \sin\varphi)} r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\mathrm{d}z\right),$$

dove

$$E = \{(r,\varphi):\ \varphi \in [-\pi,\pi],\ 0 \le r \le \cos\varphi - \sin\varphi\}.$$

Si ha

$$0 \le \cos\varphi - \sin\varphi \iff \varphi \in [-3\pi/4, \pi/4].$$

Perciò

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \left(\int_0^{\cos\varphi - \sin\varphi} r^3(\cos\varphi + \sin\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi - r)\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{20}(\cos\varphi + \sin\varphi)(\cos\varphi - \sin\varphi)^5 \mathrm{d}\varphi = -\frac{1}{120}(\cos\varphi - \sin\varphi)^6 \Big|_{-3\pi/4}^{\pi/4} = 0. \end{aligned}$$

Naturalmente i due metodi presentati non sono i soli: si può anche integrare per fili prima di passare in coordinate cilindriche, oppure osservare le proprietà di simmetria in qualunque momento del procedimento.

(*) Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando il triangolo (definito sul piano $z = 0$) di vertici $(1,1,0)$, $(2,4,0)$, $(1,4,0)$ di un angolo 2π attorno all'asse y.

. . . . 7 punti

Risposta:

4π.

. . . .

Cenno di svolgimento:
Si tratta del volume di un solido di rotazione (un tronco di cono meno un cilindro), che quindi vale

$$\int_1^4 \pi \left(\left(\frac{y+2}{3} \right)^2 - 1 \right) \mathrm{d}y = 4\pi.$$

(*) Data la curva

$$\gamma : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \cos(2t)),$$

calcolare

$$\int_\gamma x \,\mathrm{d}s.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$(17^{3/2} - 1)/24$.

. . . .

Cenno di svolgimento:

Applicando la definizione di integrale curvilineo di prima specie e ossefvando che l'integranda è pari, si ottiene

$$\int_\gamma x \,\mathrm{d}s = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t |\sin t| (1 + 16\cos^2 t)^{1/2} \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t (1 + 16\cos^2 t)^{1/2} \mathrm{d}t$$

che si integra con la sostituzione $y = \cos^2 t$.

(*) Sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t, t^2/2)$. Calcolare

$$\int_\gamma xy\mathrm{d}s.$$

. . . . 7 punti

Risposta: $(1+\sqrt{2})/15$.

. . . .

Svolgimento:

(*) Determinare un insieme connesso $E \subset \mathbb{R}^2$ in cui la forma differenziale

$$\omega = -\frac{y}{x(3x-y)}\mathrm{d}x + \frac{1}{3x-y}\mathrm{d}y$$

sia esatta; in E determinare una funzione potenziale (ovvero una primitiva) di ω.

. . . . 7 punti

Risposta:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0, y > 3x\}, \quad U(x,y) = -\log\left|\frac{x}{3x-y}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

. . . .

Svolgimento. Il dominio della forma è

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \neq 0, y \neq 3x\}.$$

Verifichiamo che ω è esatta su ciascuna componente connessa di D determinandone una funzione potenziale:

$$U(x,y) = \int \frac{1}{3x-y}\mathrm{d}y = -\log|3x-y| + C(x),$$

da cui

$$\partial_x U(x,y) = -\frac{3}{3x-y} + C'(x) \stackrel{!}{=} -\frac{y}{x(3x-y)}$$

se e solo se

$$C'(x) = \frac{3}{3x-y} - \frac{y}{x(3x-y)} = \frac{3x-y}{x(3x-y)} = \frac{1}{x}.$$

Perciò $C(x) = \log|x| + C$, ovvero

$$U(x,y) = -\log\left|\frac{x}{3x-y}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Si può quindi scegliere qualunque componente connessa di D, per esempio

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x > 0, y > 3x\}.$$

(*) Disegnare l'insieme

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 < 0\}$$

e determinare il valore di $A \in \mathbb{R}$ per cui la forma differenziale

$$\omega = \frac{A(x-1)\mathrm{d}x + 2(y-2)\mathrm{d}y}{4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4}$$

è esatta in D.

. . . . 7 punti

Risposta: D è l'interno dell'ellisse di centro $(1,2)$ e semiassi paralleli agli assi, di lunghezza 1 e 2; $A = 8$.

. . . .

Svolgimento. Si ha

$$4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 4(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4,$$

da cui segue la caratterizzazione di D. Dalla precedente identità segue anche facilmente che ω è esatta se e solo se $A = 8$ in tal caso una primitiva di ω è

$$U(x,y) = \log|4(x-1)^2 + (y-2)^2 - 4|.$$

(*) Sia

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \left(1 - t^2 - \cos(\pi t^3), \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - t^2 + 5\right).$$

Calcolare

$$\int_\gamma \left(\frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + e^y \arctan x\,\mathrm{d}y\right).$$

. . . . 7 punti

Risposta: $\frac{\pi e^5}{4}$

. . . .

Svolgimento. Verifichiamo che la forma differenziale è esatta:

$$U(x,y) = \int \frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = e^y \arctan x + C(y)$$

da cui

$$U_y = e^y \arctan x + C'(y) \stackrel{!}{=} e^y \arctan x \iff C'(y) = 0,$$

ovvero

$$U(x,y) = e^y \arctan x + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Perciò, osservando che $\gamma(1) = (1,5)$ e $\gamma(0) = (0,5)$, si ottiene

$$\int_\gamma \left(\frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + e^y \arctan x\,\mathrm{d}y\right) = U(1,5) - U(0,5) = \frac{\pi e^5}{4}.$$

(*) Sia

$$\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x + \left(\frac{y}{x^2+y^2+1} + 3x\right)\mathrm{d}y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e sia $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (t^7 - t, t^2)$. Calcolare

$$\int_\gamma \omega\,.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$\log 2 - \frac{4}{3}$.

. . . .

Svolgimento:
La forma differenziale

$$\omega_1(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}x + \frac{y}{x^2+y^2+1}\mathrm{d}y$$

è esatta in $\mathbb{R}^2$, con funzione potenziale

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\log(1+x^2+y^2).$$

Perciò

$$\int_\gamma \omega = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0)) + \int_\gamma 3x\mathrm{d}y = \log 2 + 6\int_0^1 (t^8 - t^2)\mathrm{d}t = \log 2 - \frac{4}{3}.$$

(*) Sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 2x\right)\mathrm{d}x + \frac{x}{1+x^2y^2}\mathrm{d}y, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e sia $\gamma : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\gamma(t) = \left(t^4\cos\left(\pi(t-1)\right), |t|\right), \quad t \in [-1,1]$$

orientata nel verso delle t crescenti. Calcolare

$$\int_{\gamma^+} \omega.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$$0.$$

. . . .

Cenno di svolgimento:
La curva è chiusa e la forma è esatta, con funzioni potenziali

$$U(x,y) = \arctan(xy) - x^2 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(*) Sia $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, 2\sin t), \quad t \in [0,2\pi]$$

(orientata nel verso delle t crescenti) e sia ω la forma differenziale definita da

$$\omega(x,y) = \frac{2xy}{1+x^4y^2}\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{1+x^4y^2} + x\right)\mathrm{d}y.$$

Calcolare
$$\int_{\gamma^+} \omega \ .$$

. . . . 7 punti

Risposta:

-2π

. . . .

Svolgimento:
La forma differenziale
$$\omega_1 := \omega - x \ \mathrm{d}y$$
è esatta in $\mathbb{R}^2$ (le sue funzioni potenziali sono $U(x, y) = \arctan(x^2 y) + C$, $C \in \mathbb{R}$). Poiché γ è chiusa, si ottiene
$$\int_{\gamma^+} \omega = \int_{\gamma^+} x \ \mathrm{d}y = -2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \ \mathrm{d}t = -2\pi.$$

(*) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(-1, 0)$, e sia ω la forma differenziale definita da
$$\omega(x, y) = \frac{4x^3}{1 + x^4 + y^4}\mathrm{d}x + \left(\frac{4y^3}{1 + x^4 + y^4} + x\right) \mathrm{d}y.$$
Calcolare
$$\int_{\partial\Omega^+} \omega.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

1/2

. . . .

Svolgimento:

Si ha
$$\int_{\partial\Omega^+} \omega = \int_{\partial\Omega^+} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s,$$
dove
$$\mathbf{v} = \left(\frac{4y^3}{1 + x^4 + y^4} + x, -\frac{4x^3}{1 + x^4 + y^4}\right).$$
Applicando il Teorema della divergenza, si ottiene
$$\int_{\partial\Omega^+} \omega = \iint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = |\Omega| = \frac{1}{2}.$$

In alternativa, siano
$$\omega_1 = \frac{4x^3}{1 + x^4 + y^4}\mathrm{d}x + \frac{4y^3}{1 + x^4 + y^4}\mathrm{d}y, \quad \omega_2 = x\mathrm{d}y.$$

Si verifica che ω_1 è esatta (osservando che è chiusa in $\mathbb{R}^2$ o determinandone un potenziale), quindi
$$\int_{\partial\Omega^+} \omega = \int_{\partial\Omega^+} x\mathrm{d}y$$

che si calcola facilmente (ponendo attenzione al verso di percorrenza!).

(*) (a) Determinare $A \in \mathbb{R}$ in modo tale che la forma differenziale

$$\omega = \frac{1}{(x+y)^2}\,(Ay\mathrm{d}x - 2x\mathrm{d}y)$$

sia chiusa nel suo dominio naturale D;
(b) per tale valore di A calcolare $\int_\gamma \omega$, dove γ è una qualunque curva regolare in D che parte dal punto $(0,1)$ e arriva al punto $(1,0)$.

. . . . 7 punti

Risposta:

. . . .

Svolgimento:

(*) Calcolare

$$\int_{\partial\Omega^+} xy\ \mathrm{d}y, \qquad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \geq 0,\ y \leq 5x,\ y \leq \frac{7}{x} - 2\right\}.$$

. . . . 7 punti

Risposta: $\frac{80}{3} - 14\log\frac{7}{2}$.

. . . .

Svolgimento. Segue dalle formule di Green che

$$I = \int_{\partial\Omega^+} xy\ \mathrm{d}y = \iint_\Omega y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

L'insieme Ω è semplice rispetto a entrambi gli assi:

$$\begin{aligned}\Omega &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \in [0,7/2], 0 \leq y \leq \min\left\{5x, \frac{7}{x} - 2\right\}\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y \in [0,5], \frac{y}{5} \leq x \leq \frac{7}{y+2}\right\}.\end{aligned}$$

Quindi

$$I = \int_0^1 \int_0^{5x} y\mathrm{d}y\mathrm{d}x + \int_1^{7/2} \int_0^{7/x-2} y\mathrm{d}y\mathrm{d}x \quad \text{oppure} \quad I = \int_0^5 \int_{y/5}^{7/(y+2)} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

e svolgendo correttamente gli integrali si ottiene la risposta.

(*) Sia $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ la curva piana definita da $\gamma(t) = (\sin t,\, t\, \sin t)$.

(a) Verificare che γ è una curva di Jordan.

(b) Calcolare l'area del suo interno.

. . . . 7 punti

Risposta:

$\pi/4$

. . . .

Svolgimento:

La curva in esame è chiusa in quanto $\gamma(0) = (0,0) = \gamma(\pi)$, ed è semplice in quanto

$$\begin{aligned} \gamma(t_1) = \gamma(t_2) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} t_1 \sin t_1 = t_2 \sin t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \end{cases} \\ &\Longrightarrow \quad t_1 = t_2 \quad \text{(sostituendo la seconda nella prima).} \end{aligned}$$

Quindi è una curva di Jordan. Perciò l'area del suo interno, Ω, è, a meno del segno che dipende dall'orientazione di γ,

$$\int_{\partial\Omega} y \mathrm{d}x = \int_0^\pi t \sin t \cos t \mathrm{d}t = -\frac{\pi}{4},$$

da cui segue il risultato.

(*) Calcolare

$$\int_{\partial\Omega} \left(x + y^2 - 3, y + x^2 - 6\right) \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s$$

dove $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4y + 2x + 1 \leq 0\}$ ed $\mathbf{n}$ è la normale esterna ad Ω.

. . . . 7 punti

Risposta:

. . . .

Svolgimento:

(*) Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{V} = (xz, yz, xy)$ uscente da $\Omega = [0,1]^3$.

. . . . 7 punti

Risposta: 1

. . . .

Svolgimento:

(*) Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio di Green di volume 3 e baricentro $(0,1,0)$, e sia $\mathbf{V}$ il seguente campo vettoriale:

$$\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{V}(x,y,z) = \left(3x^2, y^2, 5z^2 + z\right).$$

Calcolare il flusso di $\mathbf{V}$ uscente da Ω.

. . . . 6 punti

Risposta: 9

. . . .

Svolgimento. Applicando il teorema della divergenza, si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_{\partial\Omega} \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}_e \mathrm{d}S &= \iiint_\Omega (6x+2y+10z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= |\Omega|\left(\frac{6}{|\Omega|}\iiint_\Omega x\mathrm{d}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{2}{|\Omega|}\iiint_\Omega y\mathrm{d}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{10}{|\Omega|}\iiint_\Omega z\mathrm{d}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+1\right)\\ &= 3\,(2+1)=9.\end{aligned}$$

(*) Determinare l'area della porzione di superficie cilindrica definita da

$$\Sigma=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+(y+2)^2=4,\ 0\le z\le x\}.$$

.... 8 punti

Risposta: 8

....

Svolgimento. Si parametrizza Σ mediante coordinate cilindriche:

$$\sigma : D\to\mathbb{R}^3,\quad \sigma(\varphi,z)=(2\cos\varphi,-2+2\sin\varphi,z).$$

Per determinare D si nota che

$$0\le z\le x \iff 0\le z\le 2\cos\varphi,$$

quindi

$$D=\{(\varphi,z)\in[0,2\pi)\times\mathbb{R} :\ 0\le z\le 2\cos\varphi\}.$$

Poiché

$$\sigma_\varphi=(-2\sin\varphi,2\cos\varphi,0)\quad\text{e}\quad\sigma_z=(0,0,1),$$

si ha

$$\|\sigma_\varphi\wedge\sigma_z\|=\|(2\cos\varphi,2\sin\varphi,0)\|=2.$$

Quindi

$$\iint_\Sigma \mathrm{d}\sigma=\iint_D 2\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z.$$

Si riscrive D come dominio semplice osservando che

$$0\le 2\cos\varphi \iff \varphi\in[-\pi/2,\pi/2].$$

Pertanto

$$\iint_\Sigma \mathrm{d}\sigma=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\varphi}2\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi=4\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=8.$$

(*) Sia Σ^+ la superficie ottenuta ruotando il sostegno della curva

$$\gamma(t)=(0,e^t,t),\quad t\in[0,1]$$

di un angolo 2π attorno all'asse z, orientata in modo tale che $\mathbf{n}^+\cdot\mathbf{e}_3\ge 0$. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{V}(x,y,z)=(x,y,0)$ attraverso Σ^+.

.... 7 punti

Risposta:

$$-\pi(e^2-1).$$

. . . .

Cenno di svolgimento:
La parametrizzazione è

$$\sigma(\varphi,t)=(e^t\cos\varphi, e^t\sin\varphi, t)$$

e la normale da scegliere è $\mathbf{n}^+=-\sigma_\varphi\wedge\sigma_t$. Il resto è un calcolo.

(*) Sia Σ la porzione del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ compresa tra i piani $z=0$ e $z=1$. Calcolare

$$\iint_S z\mathrm{d}\sigma.$$

. . . . 6 punti

Risposta:

. . . .

Svolgimento:

(*) Sia $\mathbf{v}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ il campo vettoriale definito da

$$\mathbf{v}(x,y,z)=(0,y,z)$$

e sia Σ^+ la superficie definita da

$$\Sigma=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ :\ x^2=4(y^2+z^2),\ x\in[1,2]\right\}$$

e orientata in modo tale che $\mathbf{n}^+\cdot\mathbf{e}_1>0$. Calcolare il flusso di $\mathbf{v}$ attraverso Σ^+.

. . . . 7 punti

Risposta:

$7\pi/12$

. . . .

Svolgimento:
Si parametrizza la superficie utilizzando coordinate cartesiane o cilindriche. Nel secondo caso

$$\sigma(r,\varphi)=(2r, r\cos\varphi, r\sin\varphi),\qquad D=[1/2,1]\times[0,2\pi].$$

Si ha

$$\sigma_r=(2,\cos\varphi,\sin\varphi),\qquad \sigma_\varphi=(0,-r\sin\varphi, r\cos\varphi),$$

quindi

$$\sigma_r\wedge\sigma_\varphi=(r,-2r\cos\varphi,-2r\sin\varphi),$$

la cui orientazione coincide con quella richiesta. Pertanto

$$\Phi_\Sigma(\mathbf{v})=\int_\Sigma \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}^+\mathrm{d}\Sigma=\iint_D (v\circ\sigma)\cdot(\sigma_r\wedge\sigma_\varphi)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=\iint_D -2r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi=-7\pi/12.$$

(*) Determinare una parametrizzazione $\sigma : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ della superficie

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0, \ x^8 + y^2 + 4z^2 = 6\}$$

e determinare il piano tangente e i due versori normali a Σ in $(1, 1, 1)$.

.... 6 punti

Risposta: Una possibile parametrizzazione è: $D = \{(u, v) : \ u^2+4v^2 \leq 6\}$, $\sigma(u, v) = ((6 - u^2 - 4v^2)^{1/8}, u, v)$, il piano tangente è $x - 1 + (y - 1)/4 + z - 1 = 0$ e i versori normali sono $\mathbf{n} = \pm\frac{4}{\sqrt{33}}(1, 1/4, 1)$.

....

Svolgimento. Si può parametrizzare Σ come superficie cartesiana rispetto a qualunque asse. Per esempio, poiché $x \geq 0$,

$$x = (6 - y^2 - 4z^2)^{1/8} =: f(y, z), \quad 6 - y^2 - 4z^2 \geq 0,$$

pertanto

$$D = \{(u, v) : \ u^2 + 4v^2 \leq 6\}, \quad \sigma(u, v) = ((6 - u^2 - 4v^2)^{1/8}, u, v).$$

Poiché si tratta di una superficie cartesiana, il piano tangente e i versori normali sono dati rispettivamente da

$$x - 1 - f_y(1, 1)(y - 1) - f_z(1, 1)(z - 1) = 0, \quad \mathbf{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + f_y^2 + f_z^2}}(1, -f_y, -f_z).$$

Poiché

$$f_y(y, z) = -\frac{1}{4}(6 - y^2 - 4z^2)^{-7/8}, \quad f_z(y, z) = -(6 - y^2 - 4z^2)^{-7/8},$$

si ha $f_y(1, 1) = -1/4$, $f_z(1, 1) = -1$, da cui segue la risposta.

(*) Sia Σ^+ la superficie definita da

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = xy, \ x^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq \sqrt{3}x\right\}$$

e orientata in modo tale che $\mathbf{n}^+ \cdot \mathbf{e}_3 < 0$.

(a) Calcolare l'area di Σ.

(b) Calcolare la circuitazione del vettore $\mathbf{v} = (x, 0, y)$ lungo $\partial\Sigma^+$.

.... 7 punti

Risposta:
(a) $\frac{\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1)$; (b) $1/3$.

....

Svolgimento:

Σ è una superficie cartesiana parametrizzata da

$$\sigma(u, v) = (u, v, uv), \quad D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 1, \ v \geq \sqrt{3}u\}.$$

Si ha quindi

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (-v, -u, 1), \quad |\sigma_u \wedge \sigma_v| = \sqrt{1 + u^2 + v^2}.$$

Perciò la risposta ad (a) è

$$|\Sigma| = \iint_D \sqrt{1+u^2+v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\pi/3}^{4\pi/3}\int_0^1 \rho\sqrt{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

Per (b), si osserva che versori normali sono

$$\pm\frac{(-v,-u,1)}{\sqrt{1+u^2+v^2}}$$

e quello tale che il prodotto scalare con $\mathbf{e}_3$ è negativo è

$$\mathbf{n}^+ := \frac{(v,u,-1)}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

Si osserva inoltre che

$$\mathrm{rot}\mathbf{v} = (1,0,0), \quad \mathrm{rot}\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}^+ = \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}}.$$

Applicando il teorema del rotore, si conclude che la circuitazione vale

$$\iint_D v\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\pi/3}^{4\pi/3}\int_0^1 \rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}.$$

(*) Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{3}{2}\left(x^2-1\right)\frac{1}{y(x)}e^{-y^2(x)} \\ y(-1) = \sqrt{\log 3} \end{cases}.$$

.... 7 punti

Risposta:

$y(x) = \sqrt{\log\left(x^3-3x+1\right)}$, $y \in (-\sqrt{3}, 0)$.

....

Svolgimento:

L'equazione differenziale è a variabili separabili:

$$2y(x)e^{y^2(x)}y'(x) = 3\left(x^2-1\right) \Longleftrightarrow e^{y^2(x)} = x^3-3x+C.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava $C=1$. Quindi

$$y(x) = \pm\sqrt{\log\left(x^3-3x+1\right)},$$

e per soddisfare la condizione iniziale si deve scegliere la soluzione positiva:

$$y(x) = \sqrt{\log\left(x^3-3x+1\right)}.$$

Tale funzione è definita se

$$\begin{aligned} x^3-3x+1 \geq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad x\left(x^2-3\right) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ x^2-3 \leq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2-3 \geq 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad x \in \left[-\sqrt{3}, 0\right] \cup [\sqrt{3}, +\infty), \end{aligned}$$

quindi l'intervallo aperto massimale che contiene $x = -1$ è $(-\sqrt{3}, 0)$.

(*) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificandone l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} x\, y'(x) &= y(x)\left(1 + y(x)e^{x/y(x)}\right) \\ y(1) = -\frac{1}{\log 4} \end{cases}$$

(si suggerisce di ricondursi a un'equazione a variabili separabili mediante un opportuno cambio di variabile).

. . . . 8 punti

Risposta: $y(x) = -\frac{x}{\log(3+x)}, \quad x \in (-2, +\infty)$.

. . . .

Svolgimento. Ponendo ad esempio

$$u(x) := \frac{x}{y(x)},$$

si ottiene

$$u' = \frac{1}{y} - \frac{xy'}{y^2} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y}(1 + ye^u) = -e^u.$$

Quindi

$$(e^{-u})' = -e^{-u}u' = 1,$$

ovvero

$$e^{-u(x)} = C + x.$$

Si ha $u(1) = 1/y(1) = -\log 4$, quindi

$$e^{-u(1)} = C + 1 \stackrel{!}{=} 4 \iff C = 3.$$

Pertanto

$$-u(x) = \log(3 + x) \iff y(x) = \frac{x}{u(x)} = -\frac{x}{\log(3 + x)}, \quad x \in (-2, +\infty).$$

(*) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$x^2 y''(x) + \tfrac{1}{3} x y'(x) + \tfrac{1}{9} y(x) = \log x, \quad x > 0.$$

. . . . 8 punti

Risposta: $y(x) = (c_0 + c_1 \log x)\, x^{1/3} + 9 \log x + 54$.

. . . .

Svolgimento. L'equazione assegnata una equazione di Eulero. Ponendo

$$x = e^t \iff t = \log x, \quad u(t) = y(e^t),$$

l'equazione differenziale per $u(t)$ diventa

$$u''(t) - \frac{2}{3}u'(t) + \frac{1}{9}u(t) = t.$$

Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{3}$, per cui l'integrale generale dell'omogenea associata risulta essere

$$u_o(t) = (c_0 + c_1 t)\, e^{t/3}.$$

Per determinare una soluzione particolare si utilizza il metodo di somiglianza:

$$u_p(t) = At + B, \quad y_p'(t) = A, \quad y_p''(t) = 0,$$

da cui segue che

$$u_p''(t) - \frac{2}{3}u_p'(t) + \frac{1}{9}u_p(t) = -\frac{2}{3}A + \frac{1}{9}At + \frac{1}{9}B \overset{!}{=} t \iff A = 9,\ B = 54.$$

Da ci segue che l'integrale generale nell'incognita $u(t)$

$$u(t) = (c_0 + c_1 t)\, e^{t/3} + 9t + 54$$

e sostituendo $t = \log x$ si ottiene la risposta.

(*) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y''(x) - 4y'(x) + 13y(x) = 2e^{2x}.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

. . . .

Svolgimento:

(*) Determinare (purché esistano) i valori dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + y(x) = \beta - 2\sin(2x) \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta \end{cases}.$$

è periodica di periodo π.

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$\alpha = \beta = -\frac{4}{3}$.

. . . .

Svolgimento:

L'equazione assegnata è lineare. Le radici del polinomio caratteristico sono $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Di conseguenza l'integrale generale dell'omogenea associata è:

$$y_o(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Per determinare la soluzione particolare si usa il metodo di somiglianza:

$$y_p(t) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + C.$$

Sostituendo nell'equazione differenziale si ricava che $A = 0$, $B = 2/3$ e $C = \beta$, per cui l'integrale generale risulta essere:

$$y_{\text{gen}}(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{2}{3}\sin(2x) + \beta.$$

Imponendo poi le condizioni iniziali si ha che

$$\begin{cases} c_2 + \beta = \alpha \\ -c_1 - \frac{4}{3} = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = -\beta - \frac{4}{3} \\ c_2 = \alpha - \beta \end{cases}$$

da cui si ricava che la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(x) = \left(-\beta - \frac{4}{3}\right)\cos x + (\alpha - \beta)\sin x + \frac{2}{3}\sin(2x) + \beta$$

Annullando infine i coefficienti delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$, uniche a non essere π-periodiche, si ottiene la risposta.

(*) Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y''(x) = 2\,(y(x) + 1)\,y'(x) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} .$$

.... 7 punti

Risposta:

$$y(x) = \frac{x}{1 - x} \qquad I = (-\infty, 1)$$

....

Cenno di svolgimento:
Attraverso il metodo risolutivo per equazioni autonome del secondo ordine oppure, più semplicemente, osservando che si possono integrare una volta entrambi i membri dell'equazione.

(*) Risolvere il seguente problema di Cauchy, determinando anche l'intervallo massimale di esistenza della soluzione:

$$\begin{cases} y'(x) = (x + 3y(x) - 2)^2 - \frac{1}{3} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

.... 7 punti

Risposta:

....

Svolgimento:

(*) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificandone l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} y'(x) + x^2 y(x) = e^{x^3} y^4(x) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

(si suggerisce di utilizzare la sostituzione $u(x) = (y(x))^{-3}$).

. . . . 7 punti

Risposta:

. . . .

Svolgimento:

(*) Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy, specificandone l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} y'' = (y')^2 \dfrac{\sin y}{\cos y} \\ y(-1/2) = \pi/4 \\ y'(-1/2) = 2 \end{cases}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

$y(x) = \arcsin(\sqrt{2}(1+x))$, $I = (-1 - 1/\sqrt{2}, 1 - 1/\sqrt{2})$.

. . . .

Svolgimento:

(*) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y'''' + 4y'' = 1$$

. . . . 7 punti

Risposta: $C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + C_3 + C_4 x + \frac{1}{8}x^2$.

. . . .

Svolgimento:

(*) Dopo aver determinato lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = |\sin x|$, calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

. . . . 7 punti

Risposta:

1/2

. . . .

Svolgimento:

La funzione é pari e periodica di periodo π. Si ha quindi $b_n = 0$ per ogni n e

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos(2nx) \mathrm{d}x.$$

Quindi

$$a_0 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x \mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}$$

e, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin x\cos(2nx)\mathrm{d}x &= \underbrace{\frac{2}{n\pi}\left[\sin x\sin(2nx)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\sin(2nx)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{n^2\pi}\cos x\cos(2nx)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos(2nx)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

ovvero

$$\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin x\cos(2nx)\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n^2\pi}\cos x\cos(2nx)\right]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{n^2\pi},$$

quindi

$$a_n = -\frac{4}{(4n^2-1)\pi}.$$

Si conclude che la serie di Fourier è

$$\frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n^2-1)\pi}\cos(2nx).$$

Valutando la serie in $x = 0$ e tenendo conto che $f(0) = 0$, si ottiene

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}.$$

(*) Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodica di periodo 2π, definita in $[-\pi, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

e utilizzarlo per calcolare la somma della seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

. . . . $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

. . . .

Svolgimento:

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia ω una forma differenziale di classe $C^1(A)$. Dimostrare che se ω è esatta in A, allora è chiusa in A.
- Sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in (x_0, y_0). Utilizzando la definizione, calcolare $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(x_0 + t^2, y_0e^t)$ nel punto $t = 0$.

- Calcolare, purché esista, il seguente limite: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3+xy}{x^2+y^2}$.

- Dimostrare che per ogni x in un intorno di $x_0 = 1$ esiste un unico $y(x)$ in un intorno di $y_0 = 1$ tale che $(x, y(x))$ risolve l'equazione
$$2x^5y^7 - x^8y^2 - 1 = 0$$
e dimostrare che $y(x) < 1$ se $x > 1$.

- Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio regolare a tratti di area 1 e sia $u : C^1(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ tale che $\Delta u(x,y) = 3$ per ogni $(x,y) \in \Omega$. Calcolare
$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n}_e \, \mathrm{d}s.$$

- Sia f una funzione continua 2π-periodica e sia
$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$
il suo sviluppo in serie di Fourier. Dimostrare che se f è pari allora $b_k = 0$ per ogni $k \geq 1$.

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Determinare la direzione di massima pendenza del grafico di f in (x_0, y_0).

- Determinare (purché esistano) le soluzioni dell'equazione differenziale
$$y''''(x) - 2y'''(x) + y''(x) = 0$$
che posseggono un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

- Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definiti rispettivamente da
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{e} \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$
Calcolare il flusso del campo vettoriale ∇f uscente da Ω.

- Enunciare e dimostrare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^2$.

- Dimostrare che se $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è differenziabile in (x_0, y_0), allora
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (1, 0)$$
.

- Fornire l'esempio di una forma differenziale chiusa, ma non esatta, in $D \subset \mathbb{R}^2$.

- Determinare i valori del parametro $\alpha \in (0, +\infty)$ per i quali la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y) = |x|^{3\alpha}|y|^{\alpha}$$
è differenziabile in $(x,y) = (0,0)$.

- Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x,y,z) = x^3 - y^3 - z^3,$$
e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un dominio regolare di volume 1 e baricentro in $(1,0,0)$. Determinare il flusso di ∇f attraverso $\partial\Omega$.

- Enunciare e dimostrare le formule di Green in $\mathbb{R}^2$ su un dominio semplice rispetto ad esntrambi gli assi.