

Elementi della teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa

G. Vergara Caffarelli*, P. Loreti*, L. Giacomelli*

(Versione preliminare)

Indice

Premessa	2
Notazioni	3
1 Richiami: Forma algebrica dei numeri complessi	3
2 Richiami: Forma trigonometrica dei numeri complessi	5
3 La funzione esponenziale	7
4 Radici n-esime di un numero complesso	10
5 Logaritmi e potenze di un numero complesso	12
6 Funzioni di variabile complessa: proprietà differenziali e olomorfia	13
7 Funzioni di variabile complessa: proprietà integrali	17
8 Proprietà integrali e olomorfia	20
9 Serie di Taylor di funzioni olomorfe	23
10 Teorema di Liouville e Teorema fondamentale dell'Algebra	24
11 Serie di potenze – Serie bilatere	25
12 Principi di identità	28
13 Singolarità di funzioni olomorfe, teorema dei residui e applicazioni	30
14 Formula di Green nel disco	36
15 Soluzione degli esercizi	37

*Dipartimento di Metodi e Modelli Matematici per le Scienze Applicate – via A. Scarpa, 16 – 00161 Roma

Premessa

Il concetto di numero complesso scaturisce principalmente dal bisogno di rendere uniformi i calcoli. Infatti persino le più elementari operazioni algebriche sui numeri reali, quali ad esempio l'estrazione della radice quadrata, possono portare al di fuori del campo dei numeri reali. Ciò è legato al fatto che non tutte le equazioni algebriche con coefficienti reali, ad esempio $x^2 + 1 = 0$, ammettono soluzione reale. È perciò necessario estendere il campo dei numeri reali in modo che le operazioni elementari, algebriche, abbiano sempre significato.

I numeri complessi sono appunto tale estensione del campo reale e una loro notevole proprietà è che ogni equazione algebrica a coefficienti complessi ammette sempre radici complesse (cioè, come si dice, il campo complesso è algebricamente chiuso).

L'introduzione dei numeri complessi e delle funzioni di variabile complessa, che si è dimostrata utilissima in molti campi, spiega anche fenomeni inspiegabili nel campo reale. Ad esempio la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è infinitamente derivabile su tutto l'asse reale ma la sua serie di Mac Laurin

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

cessa di convergere se $|x| \geq 1$. La causa è incomprensibile nell'ambito reale: infatti i punti $x = \pm 1$ che separano gli insiemi di convergenza e di non convergenza della serie non hanno niente di particolarmente rilevante per $f(x)$. Ma il passaggio al campo complesso spiega questa situazione: la circonferenza $|x| = 1$ contiene i punti $x = \pm\sqrt{-1}$ ($= \pm i$) nei quali la funzione $f(x)$ “diventa infinita” e la serie cessa di convergere.

Il passaggio all'analisi complessa ci permette anche di analizzare in profondità le funzioni elementari e di stabilire delle interessanti relazioni fra di esse. Così le funzioni trigonometriche sono delle combinazioni semplici delle funzioni esponenziali, per esempio:

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$$

Lo studio delle funzioni di variabile complesse mette poi in evidenza delle relazioni abbastanza impreviste tra quantità reali e immaginarie, quali per esempio

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Inoltre, mentre in analisi reale è stata messa a punto una teoria solo per le funzioni ad un valore essendo le funzioni a più valori abbastanza “intrattabili”, in analisi complessa si riesce a chiarire la natura della polidromia ed a fornire una teoria coerente delle funzioni polidrome.

L'introduzione della classe di funzioni analitiche di una variabile complessa, detta delle funzioni olomorfe, oltre ad essere utile nell'integrazione di funzioni elementari e nella risoluzione di equazioni differenziali, è strettamente connessa alla risoluzione dell'equazione di Laplace alla quale si riconducono numerosi problemi di meccanica e fisica.

Per queste ragioni i metodi della teoria delle funzioni olomorfe di una variabile complessa hanno trovato ampio uso nella risoluzione di molti problemi in idrodinamica, aereodinamica, teoria dell'elasticità, elettrodinamica ed altri settori delle scienze fisiche e naturali.

Le idee di fondo dell'analisi complessa sono emerse durante la seconda metà del XVIII secolo e sono principalmente legate al nome di Leonardo Eulero. Il corpo di questa teoria si è formato nel XIX secolo grazie essenzialmente al lavoro di Cauchy–Riemann–Weierstrass. Occorre tuttavia fare attenzione, poiché alcuni risultati dell'analisi reale classica cessano di valere quando consideriamo funzioni a valori complessi di variabile reale o di variabile complessa.

Precisamente i teoremi fondamentali del calcolo differenziale — ossia i teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange e le conseguenti formule di de L'Hospital — cessano di esser valide, come mostra l'esempio della funzione e^{ix} : si ha $e^{i0} = e^{i2\pi} = 1$, mentre $De^{iz} = ie^{iz} \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$ (sulla forma indeterminata ottenuta facendo il limite del rapporto di due funzioni olomorfe in uno zero comune e sulla conseguente applicabilità delle formule di de L'Hospital, torneremo in seguito).

Notazioni

Riepiloghiamo i principali insiemi numerici:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, \dots\} && \text{numeri naturali} \\ \mathbb{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} && \text{interi relativi} \\ \mathbb{Q} &= \{p/q \mid p \in \mathbb{Z} \ q \in \mathbb{N}\} && \text{numeri razionali} \\ \mathbb{R} &= && \text{numeri reali (completamento di } \mathbb{Q}) \\ \mathbb{C} &= && \text{numeri complessi (chiusura algebrica di } \mathbb{R}) \end{aligned}$$

1 Richiami: Forma algebrica dei numeri complessi

Un numero complesso z corrisponde ad una coppia ordinata di numeri reali (x, y) . La forma algebrica di un numero complesso $z = (x, y)$ consiste nell'espressione

$$z = x + iy.$$

I numeri reali x e y sono detti rispettivamente parte reale e coefficiente dell'immaginario di z

$$x = \operatorname{Re} z \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

Due numeri complessi sono uguali se e solo se lo sono parte reale e coefficiente dell'immaginario:

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \\ \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 \end{cases}.$$

Se $w = u + iv$ è un altro numero complesso, le operazioni di somma e prodotto fra z e w si definiscono come

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u) + i(y + v) \\ z \cdot w &= (xu - yv) + i(yu + xv). \end{aligned}$$

Nella somma si sommano separatamente parte reale e coefficienti dell'immaginario, mentre nel prodotto si opera simbolicamente tenendo conto che

$$i^2 = -1.$$

In particolare l'opposto $-z$ ed il reciproco z^{-1} ($z \neq 0$) di un numero complesso sono dati da

$$-z = -x - iy$$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

I numeri complessi si possono identificare con i punti del piano reale ed è particolarmente importante la riflessione rispetto all'asse delle ascisse, che prende il nome di **coniugio**:

$$z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy.$$

Il coniugio è una funzione complessa di variabile complessa che conserva le operazioni di somma e prodotto e se applicato due volte consecutive, torna al valore z di partenza:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$\overline{\bar{z}} = z \quad (\text{automorfismo involontario}).$$

Con il simbolo $|z|$ — **modulo di z** — si indica la distanza nel piano xy del punto (x, y) dal punto $(0, 0)$, ovvero di z da 0 :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

Osserviamo che

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad (1.1)$$

e che

$$|z| = 0 \iff z = 0$$

Ora per $z \neq 0$ si ha dalla (1.1)

$$z \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1 \quad \text{per cui} \quad z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2},$$

da cui si ritrova la formula del reciproco.

I numeri complessi, diversamente da quelli reali, non sono un campo ordinabile e conseguentemente non hanno significato le disequaglianze fra essi. Ha invece senso parlare di disequaglianze fra i moduli ed in particolare si ha

a) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

b) $|z + w| \leq |z| + |w|$ disequaglianza triangolare

La dimostrazione di a) è immediata. Infatti:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \iff |z \cdot w|^2 = |z|^2 \cdot |w|^2$$

$$|z \cdot w|^2 = z \cdot w \cdot \overline{z \cdot w} = z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w} = z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w} = |z|^2 |w|^2.$$

Alla dimostrazione di b) premettiamo le disequaglianze

$$|\operatorname{Re} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

$$|\operatorname{Im} z| \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

(che seguono immediatamente da $|z| = \sqrt{|\operatorname{Re} z|^2 + |\operatorname{Im} z|^2}$) e le ovvie relazioni

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Notiamo infine che

$$|\bar{z}| = |z|.$$

Quindi

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = |z|^2 + 2 \operatorname{Re}(w\bar{z}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + |w\bar{z}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|w| |z| + |w|^2 \\ &= (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

da cui segue b).

Esercizi

1.1) Dimostrare che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha

$$\frac{\sqrt{1+x^2} + ix}{x - i\sqrt{1+x^2}} = i$$

1.2) Disegnare nel piano complesso i seguenti luoghi di punti:

- a) $|z| \geq 4$
- b) $\operatorname{Im}(z - 3i) > 4$
- c) $3 < |z - i| < 5$.

1.3) Risolvere la disequaglianza

$$\left| \frac{z+i}{z-i} \right| < 9.$$

2 Richiami: Forma trigonometrica dei numeri complessi

2° Lezione

La rappresentazione nel piano dei numeri complessi permette la loro rappresentazione mediante il passaggio in coordinate polari:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

In tal modo, posto

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$

si ha

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

che prende il nome di **forma trigonometrica**.

È chiaro che ad ogni coppia (ρ, θ) è associato un unico numero complesso z . Viceversa ad ogni numero complesso $z \neq 0$ corrisponde un insieme numerabile di valori dell'angolo θ , definiti a meno di multipli di 2π : $\{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Tale insieme di valori si chiama **argomento di z** , e può essere interpretato come funzione a più valori:

$$z \mapsto \arg z = \{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \quad z \neq 0.$$

Se $z = 0$, ovvero $\rho = 0$, allora $\arg z$ resta indeterminato.

Allo scopo di lavorare con una funzione nel senso classico (ovvero ad un valore), è conveniente fissare un **argomento principale** ($\text{Arg } z$):

$$-\pi < \text{Arg } z \leq \pi.$$

Ovviamente

$$\arg z = \{\text{Arg } z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

L'argomento principale assume i seguenti valori sugli assi:

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R}^+ &\iff \text{Arg } z = 0 \\ z = iy, \quad y > 0 &\iff \text{Arg } z = \pi/2 \\ z \in \mathbb{R}^- &\iff \text{Arg } z = \pi \\ z = iy, \quad y < 0 &\iff \text{Arg } z = -\pi/2. \end{aligned}$$

Più in generale, per un numero complesso $z = x + iy$, posto

$$\begin{aligned} \rho &= |z|, \quad \theta = \text{Arg } z, \quad -\pi < \theta \leq \pi \\ z &= \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \end{aligned}$$

si ha

$$\text{Arg } z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{se } x < 0, \quad y \geq 0 \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x} & \text{se } x < 0, \quad y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, \quad y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x = 0, \quad y < 0 \end{cases}.$$

Si osservi che fra il II e il III quadrante (semiasse reale negativo) $\text{Arg } z$ presenta un salto, mentre $\arg z$ si incrementa di 2π : infatti per $x < 0$ e $z = x + iy$ si ha

$$\lim_{y \rightarrow 0^-} \text{Arg } z = -\pi, \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} \text{Arg } z = \pi.$$

Uguaglianza. È facile verificare che due numeri complessi coincidono se e solo se coincidono i moduli e gli argomenti (o gli argomenti principali):

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg z_1 = \arg z_2 \end{cases} \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \text{Arg } z_1 = \text{Arg } z_2 \end{cases}.$$

Prodotto. Dati due numeri complessi in forma trigonometrica

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad r = |z| \quad \theta \in \arg z,$$

$$w = \rho(\cos \rho + i \sin \rho) \quad \rho = |z| \quad \varphi \in \arg w,$$

si ha

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r\rho[(\cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi) + i(\sin \theta \cos \varphi + \sin \varphi \cos \theta)] \\ &= r\rho[\cos(\theta + \varphi) + i \sin(\theta + \varphi)]. \end{aligned}$$

Poiché d'altra parte

$$z \cdot w = |z \cdot w|[\cos(\arg(z \cdot w)) + i \sin(\arg(z \cdot w))],$$

si ottiene

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w.$$

3 La funzione esponenziale

Per ogni $z \in \mathbb{C}$, la funzione esponenziale è definita da

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Essa converge assolutamente in \mathbb{C} , e totalmente su ogni sottinsieme compatto. Si può quindi scrivere, utilizzando la formula per il prodotto di serie,

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!},$$

ovvero

$$e^a e^b = e^{a+b}. \quad (3.1)$$

Osserviamo anche che

$$e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \dots \quad \begin{pmatrix} i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \\ i^5 = i \\ \dots \end{pmatrix}$$

Separando parte reale e parte immaginaria

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

da cui, ricordando gli sviluppi in serie di Taylor delle funzioni reali seno e coseno, si ottiene la formula

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta. \quad (3.2)$$

Questo consente di scrivere

$$z = |z|e^{i\theta},$$

che prende il nome di **forma esponenziale** di un numero complesso. In particolare

$$|e^{i\theta}| = 1.$$

Inoltre, poiché

$$\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w,$$

moltiplicare z per $e^{i\varphi}$ equivale a far effettuare a z una rotazione di φ .

Dalle (3.1) e (3.2) segue che

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Infatti

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Si ha quindi

$$|e^z| = e^x, \quad \arg e^z = \{y + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

Si osservi in particolare che $e^z = e^{z+2\pi i}$:

$$e^{z+2\pi i} = e^x(\cos(y+2\pi) + i \sin(y+2\pi)) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Formule di Eulero.

$$\begin{aligned} e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta & e^{-i\theta} &= e^{i\bar{\theta}} \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

Definizione di $\sin z$ e $\cos z$ in \mathbb{C} . Generalizzando le formule di Eulero, si definiscono

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned} \sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (\text{funzioni dispari, } \sin(-z) = -\sin z) \\ \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (\text{funzioni pari, } \cos(-z) = \cos z), \end{aligned}$$

che generalizzano i rispettivi sviluppi in serie di Mac Laurin.

Funzioni iperboliche. Per $z \in \mathbb{C}$, si definiscono

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

che coincidono con l'usuale nozione se $\text{Im}(z) = 0$.

Legame fra funzioni iperboliche e funzioni trigonometriche.

$$\cos z = \cosh iz \quad \sin z = \frac{\sinh iz}{i} = -i \sinh iz$$

Applicazioni. Diamo alcune applicazioni della rappresentazione dei numeri complessi in forma esponenziale.

(i) (Formule di triplicazione) Dall'identità

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \sin 3\theta &= (e^{i\theta})^3 = (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= \cos^3 \theta - i \sin^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \sin \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned}$$

seguono le formule di triplicazione

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \sin^2 \theta \cos \theta \\ \sin 3\theta &= -\sin^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin \theta. \end{aligned}$$

È chiaro come generalizzare al caso $\cos n\theta$, $\sin n\theta$.

(ii) (Riduzione delle potenze di funzioni trigonometriche) Applichiamo la forma esponenziale dei numeri complessi al calcolo di

$$\int \sin^4 \theta d\theta.$$

Si scrive

$$\begin{aligned} \sin^4 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^4 = \frac{1}{16} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4i\theta} + e^{-4i\theta} - 4e^{2i\theta} - 4e^{-2i\theta} + 6) \\ &= \frac{1}{8} \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int \sin^4 \theta d\theta = \frac{\sin 4\theta}{32} - \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{3}{8} \theta + C.$$

(iii) (Calcolo di $|\sin z|^2$) Dalla definizione

$$|\sin z|^2 = \left| \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right|^2 = \frac{1}{4} |e^{iz} - e^{-iz}|^2.$$

Poiché

$$\begin{aligned} e^{iz} &= e^{ix-y} = e^{-y} (\cos x + i \sin x) \\ e^{-iz} &= e^{-ix+y} = e^y (\cos x - i \sin x), \end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned} e^{iz} - e^{-iz} &= (e^{-y} - e^y) \cos x + i(e^{-y} + e^y) \sin x \\ &= -2 \sinh y \cos x + 2i \cosh y \sin x. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Quindi

$$|e^{iz} - e^{-iz}|^2 = 4 \left(\sinh^2 y \cos^2 x + \underbrace{\cosh^2 y \sin^2 x}_{1 + \sinh^2 y} \right) = 4(\sin^2 x + \sinh^2 y)$$

da cui

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

Inoltre, dalla (3.3),

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\sin z) &= \sin x \cosh y, \\ \operatorname{Im}(\sin z) &= \cos x \sinh y. \end{aligned}$$

Esercizi

3.1) Trovare le soluzioni di $(1+i)z - (1-i)\bar{z} = i$.

3.2) Risolvere la disequazione $|z| \leq |z+1|$.

3.3) Risolvere la disequazione $|z + \bar{z}| + |z - \bar{z}| \leq 2$.

4 Radici n-esime di un numero complesso

3° Lezione

Ricordiamo preliminarmente che

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |w| \\ \arg z = \arg w \end{cases} \quad (4.1)$$

Definizione 4.1 Siano $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$. Un numero complesso w si dice **radice n-esima di z** se e solo se $w^n = z$.

Se $z = 0$, l'unica radice ennesima è ovviamente $w = 0$; altrimenti vale il seguente

Teorema 4.1 Siano $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Esistono esattamente n distinte radici n-esime w_0, \dots, w_{n-1} di z ; posto $z = r e^{i\theta}$ e $w_k = r_k e^{i\varphi_k}$, $k = 0, \dots, n-1$, risulta:

$$\begin{aligned} r_k &= \sqrt[n]{r} \\ \varphi_k &= \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k = 0, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si ha, ricordando la (4.1),

$$w^n = |w|^n e^{in\varphi} = |z| e^{i\theta} \iff \begin{cases} |w|^n = |z| \\ n\varphi = \theta + 2k\pi \end{cases} \iff \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi_n = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Per $k = 0, \dots, n-1$ troviamo le n distinte radici w_k . Successivamente i valori si ripetono: infatti

$$\varphi_{k+pn} = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} + 2p\pi$$

coincide (modulo 2π) con φ_k . □

Come mostra la successione esplicita degli angoli φ_k ,

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n}, \quad \varphi_1 = \frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}, \quad \varphi_2 = \frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}, \quad \dots, \quad \varphi_{n-1} = \frac{\theta}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)2\pi,$$

per passare da una radice alla successiva si compie un passo pari a $1/n$ dell'angolo giro. In effetti, geometricamente, le radici n -esime di un numero complesso si dispongono, a partire dall'angolo $\frac{\theta}{n}$, sulla circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|z|}$ e centro l'origine ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza. Dopo n passi si ritorna nella posizione di partenza.

Anche la radice n -esima (come l'argomento) è una funzione a più valori (precisamente n). Una scelta univoca si può compiere considerando l'argomento principale di z ; in questo modo si prenderà il valore di φ dato da:

$$\varphi_0 = \frac{\theta}{n}$$

dove θ è l'argomento principale di z . Diamo quindi la seguente

Definizione 4.2 *Dati $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, si definisce radice n -esima principale di z il numero complesso*

$$w = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\text{Arg} z}{n}}.$$

Esempio: Calcoliamo le radici quarte di 4.

$$4 = 4e^{i0} = 4e^{2k\pi i} \quad \boxed{\varphi_k = \frac{2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3.}$$

$$|w_k| = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$$

$$\text{Arg } w_0 = 0, \quad \text{Arg } w_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Arg } w_2 = \pi \quad \text{Arg } w_3 = \frac{3}{2}\pi$$

La radice n -esima principale di 4 è $\sqrt{2}$.

5 Logaritmi e potenze di un numero complesso

Indicheremo con \ln il logaritmo naturale su \mathbb{R}^+ .

Definizione 5.1 Sia $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Si chiama **logaritmo di z** , e si indica con $w = \log z$, ogni numero complesso w tale che $e^w = z$.

Come l'argomento, così anche il logaritmo assume un'infinità numerabile di valori. Siano infatti $w = u + iv$, $z = |z|e^{i\theta}$; si ha

$$e^w = e^u e^{iv} = |z|e^{i\theta} \iff \begin{cases} e^u = |z| \\ v = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff \begin{cases} u = \ln |z| \\ v = \arg z \end{cases}$$

e quindi

$$\boxed{\log z = \ln |z| + i \arg z} \quad \underline{\underline{z \neq 0}},$$

funzione ad infiniti valori. Verifichiamo che si ha $e^{\log z} = z$:

$$e^{\log z} = e^{\ln |z| + i \arg z} = e^{\ln |z|} e^{i \arg z} = |z| e^{i\theta} = z,$$

e che vale la proprietà fondamentale dei logaritmi, ossia quella "del prodotto":

$$\begin{aligned} \log(z_1 z_2) &= \ln |z_1 z_2| + i \arg(z_1 \cdot z_2) = \ln(|z_1| |z_2|) + i(\arg z_1 + \arg z_2) \\ &= \ln |z_1| + i \arg z_1 + \ln |z_2| + i \arg z_2 \\ &= \log z_1 + \log z_2. \end{aligned}$$

Come al solito, il **logaritmo principale** è una funzione ad un solo valore che si ottiene scegliendo come argomento l'argomento principale:

$$\text{Log} z = \ln |z| + i \text{Arg} z.$$

Si osservi che però il logaritmo principale **non** verifica la proprietà del prodotto!

Le potenze con esponente complesso di un numero complesso si definiscono attraverso il logaritmo. Si pone cioè

$$z^w := \begin{cases} e^{w \log z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

Per $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ l'applicazione

$$z \mapsto z^w$$

è (come il logaritmo) una funzione ad infiniti valori. Se vogliamo una funzione ad un valore, prendiamo il logaritmo principale.

Esempio. Si ha

$$i^i = e^{i \log i} = e^{-\pi/2 + 2k\pi},$$

essendo

$$\log i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) i.$$

Il valore principale è dato da

$$i^i = e^{i \text{Log} i} = e^{-\pi/2}.$$

Esercizi

5.1) Calcolare

- a) i^{1+i} ,
- b) $(-1+i)^{-3i}$,
- c) $(1+i)^{2i}$,

specificando il valore principale.

6 Funzioni di variabile complessa: proprietà differenziali e olomorfia

4° Lezione

Prime proprietà

Ne seguito, $f(z)$ indicherà una funzione di variabile complessa definita per $z \in A \subset \mathbb{C}$, con A aperto.

Definizione 6.1 Diremo che la funzione f è derivabile in senso complesso in $z_0 \in A$ se esiste finito il limite per $\Delta z \rightarrow 0$ del rapporto incrementale complesso

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

In tal caso si definisce

$$f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Esempio. Sia $f(z) = \bar{z}$, z_0 fissato. Si ha

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

Se z si avvicina al punto z_0 , rimanendo sull'asse dei numeri immaginari puri, si può scrivere $\Delta x = 0$, $\Delta z = i\Delta y$, e risulta

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1.$$

Ovviamente, passando al limite si ha

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta x = 0}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = -1.$$

Se invece z si avvicina al punto z_0 nella direzione dell'asse reale, allora $\Delta y = 0$, $\Delta z = \Delta x$ e risulta

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Quindi

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = 1.$$

Osserviamo perciò che in questo esempio il valore del limite del rapporto incrementale dipende dalla direzione. Nella definizione precedente si richiede, come per le funzioni di più variabili, l'esistenza del limite finito quando la distanza tra z e z_0 tende a zero, qualunque sia il modo in cui z si avvicina a z_0 . In conclusione, $f(z) = \bar{z}$ non è derivabile in z_0 .

Le funzioni complesse derivabili in tutti punti di un aperto A , o in tutto \mathbb{C} , rivestono un ruolo essenziale:

Definizione 6.2 Una funzione derivabile in senso complesso in tutti i punti di un aperto A si dice **olomorfa** in A ; una funzione olomorfa in tutto il piano \mathbb{C} si dice **intera**. L'insieme delle funzioni olomorfe in un aperto A si indica con $\mathcal{O}(A)$.

Esempio. La funzione $f(z) = z^3$ è olomorfa in \mathbb{C} , ossia intera (in effetti questo vale per ogni polinomio in z a coefficienti complessi). Infatti, preso un qualunque $z \in \mathbb{C}$, si ha:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^3 - z_0^3}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z^2 + zz_0 + z_0^2) = 3z_0^2.$$

Poiché z_0 è qualunque, f è derivabile in \mathbb{C} e si ha $f'(z) = 3z^2$.

Porremo con abuso di notazione

$$f(z) = f(x, y), \quad z = x + iy,$$

identificando una funzione di variabile complessa $z = x + iy$ con la corrispondente funzione di due variabili reali (x, y) . Ad esempio scriveremo

$$f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y) =: f(x, y).$$

Scriveremo inoltre

$$\Delta z = (z - z_0) = \Delta x + i\Delta y, \quad \text{dove } \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0.$$

Ogni funzione complessa si può decomporre in parte reale e parte immaginaria: ovvero

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

con

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x, y), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x, y).$$

Supponiamo f derivabile in senso complesso nel punto z_0 , cioè tale che

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

Se $\Delta y = 0$ si ha

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f_x(z_0)$$

Se $\Delta x = 0$ si ha

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{i\Delta y} = \frac{f_y(z_0)}{i}.$$

Abbiamo così dimostrato la seguente

Proposizione 6.1 Se f è derivabile in $z_0 = x_0 + iy_0$, allora è parzialmente derivabile e risulta

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{1}{i} f_y(x_0, y_0). \quad (6.1)$$

Se f è olomorfa in A , allora è parzialmente derivabile in A e (6.1) vale in ogni punto di A .

La relazione

$$f_x = \frac{1}{i} f_y \quad (6.2)$$

è una equazione alle derivate parziali — detta equazione di monodromia — che caratterizza le funzioni olomorfe. Infatti vale la seguente proposizione (che non dimostriamo):

Proposizione 6.2 Sia $f(x, y)$ differenziabile in A (come funzione di due variabili reali (x, y)) e supponiamo che valga la (6.2). Allora f è olomorfa in A (come funzione di $z = x + iy$).

Posto $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, risulta $f_x = u_x + iv_x$ e $f_y = u_y + iv_y$. Se vale la (6.2), allora si ha

$$f_x = u_x + iv_x \stackrel{(6.2)}{=} \frac{1}{i}(u_y + iv_y) = v_y - iu_y,$$

da cui

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ v_x = -u_y \end{cases} \quad (6.3)$$

Il sistema (6.3) si dice sistema di Cauchy–Riemann. Viceversa, se vale (6.3) allora vale anche (6.2) con $f = u + iv$. Ricapitolando:

$$\begin{aligned} f(z) \text{ è olomorfa in } A & \\ \iff & \\ f(x, y) \text{ è differenziabile in } A \text{ e soddisfa (6.2) in } A, & \\ \iff & \\ u(x, y) \text{ e } v(x, y) \text{ sono differenziabili in } A \text{ e soddisfano (6.3).} & \end{aligned}$$

Esempio. Consideriamo la funzione

$$f(z) = e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y; \quad u = e^x \cos y \quad v = e^x \sin y.$$

Le funzioni u e v sono regolari in \mathbb{R}^2 , e si ha

$$u_x = e^x \cos y = v_y,$$

$$v_x = e^x \sin y = -u_y.$$

Quindi e^z è olomorfa in \mathbb{C} (ossia intera) e, come si verifica immediatamente,

$$\frac{de^z}{dz} = \frac{\partial e^z}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial e^z}{\partial y} = e^z.$$

Problema. La conoscenza della sola parte reale o della sola parte immaginaria ci consente di determinare la funzione olomorfa ?

Osserviamo che assegnata ad esempio $u(x, y)$, dal sistema di Cauchy–Riemann sono note $v_x = -u_y$ e $v_y = u_x$ (ovviamente si ha $v_{xy} = v_{yx}$ essendo $\Delta u = 0$). La forma differenziale lineare

$$-u_y dx + u_x dy$$

è integrabile (localmente) e quindi una primitiva fornisce $v(x, y)$. Comunque, è opportuno ricordare che valgono anche le relazioni dirette

$$f(z) = 2u \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i} \right) - \overline{f(z_0)}$$

$$f(z) = 2iv \left(\frac{z + \bar{z}_0}{2}, \frac{z - \bar{z}_0}{2i} \right) + \overline{f(z_0)}$$

ove z_0 è un punto fissato e $f(z_0)$ un valore assegnato. Nelle due formule precedenti u e v sono pensate come funzioni di due variabili complesse.

Teorema di Goursat e conseguenze

Teorema 6.1 (Goursat) *La derivata complessa di una funzione olomorfa è continua.*

Questo teorema è alla base dell'importante corollario:

Corollario 6.1 *Ogni funzione olomorfa è infinitamente derivabile, e le sue derivate sono olomorfe.*

Osservazione 6.1 Notiamo che l'infinita derivabilità nel solo campo reale non garantisce l'olomorfia. Ad esempio, consideriamo la funzione

$$f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^2}} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che sull'asse reale

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è di classe C^∞ , mentre nel piano complesso $f(z)$ non è olomorfa in 0. Infatti per $z = iy$ si ottiene

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{z^2}} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\frac{1}{y^2}} = +\infty$$

Osservazione 6.2 La parte reale e la parte immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche. Infatti, utilizzando l'infinita derivabilità di funzioni olomorfe, le formule di Cauchy–Riemann e il Teorema di Schwarz, si ottiene

$$\begin{aligned} u_{xx} &= (v_y)_x = (v_x)_y = -u_{yy} \\ v_{xx} &= -(u_y)_x = -(u_x)_y = v_{yy}. \end{aligned}$$

Perciò $\Delta u = 0$ e $\Delta v = 0$. Due funzioni armoniche u, v che siano rispettivamente parte reale e parte immaginaria di una funzione olomorfa si dicono **armoniche coniugate**.

7 Funzioni di variabili complessa: proprietà integrali

Integrazione nel campo complesso

Sia $f(z) \in C^0(A)$, con A aperto connesso di \mathbb{C} , e sia $\mathcal{C} = \mathcal{C}(z_0, z_1)$ un arco di curva semplice regolare orientata di estremi z_0 e z_1 . Sia

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [t_0, t_1]$$

una parametrizzazione concorde di \mathcal{C} . Ricordiamo che, poiché \mathcal{C} è semplice, si ha $z(t_0) = z(t_1)$ se e solo se la curva è chiusa; inoltre, poiché la curva è regolare,

$$z(t) \in C^1([t_0, t_1]), \quad \dot{z}(t) = \dot{x}(t) + i\dot{y}(t)$$

e

$$|\dot{z}(t)|^2 = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Definiamo

$$\int_{\mathcal{C}(z_0, z_1)} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_0}^{t_1} f(z(t)) \dot{z}(t) dt.$$

Ad esempio se \mathcal{C} è la circonferenza di centro l'origine e raggio R , parametrizzata (in coordinate polari, $t = \theta$) da

$$z(\theta) = Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

essendo $\dot{z}(\theta) = iRe^{i\theta}$ avremo

$$\oint_{+\mathcal{C}} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} iR \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) e^{i\theta} d\theta$$

(con $+\mathcal{C}$ si indica il verso di percorrenza antiorario).

Gli integrali nel campo complesso si possono anche intendere come integrali di forme differenziali di due variabili reali (secondo la convenzione $f(z) = f(x, y)$). Ovvero, ponendo

$$dz = dx + idy,$$

vale la seguente eguaglianza:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} f(x, y) dx + i f(x, y) dy.$$

Se, con le notazioni usuali, si pone

$$X(x, y) = f(x, y) \quad Y(x, y) = if(x, y),$$

la condizione di chiusura della forma

$$X_y = Y_x$$

equivale alla condizione di olomorfia:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Le regole per il calcolo di un integrale di una funzione di variabile complessa su una curva (generalmente) regolare del piano complesso sono le seguenti:

- 1) Scrivere la curva \mathcal{C} in forma parametrica $z = x(t) + iy(t)$ — in particolare, $z = z_0 + re^{i\theta}$ nel caso di una circonferenza $\mathcal{C}_r(z_0) = \{z : |z - z_0| = r\}$;
- 2) Calcolare mediante composizione la funzione integranda sulla curva

$$f(z(t)), \quad - \text{ in particolare } f(z_0 + re^{i\theta})$$

- 3) Calcolare il differenziale

$$dz = (\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))dt \quad - \text{ in particolare } dz = ire^{i\theta}d\theta.$$

- 4) Integrare fra gli estremi la funzione di variabile reale così ottenuta

$$\int_{t_0}^{t_1} f(z(t))(\dot{x}(t) + i\dot{y}(t))dt \quad - \text{ in particolare } \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta.$$

Esempio. Presa come curva \mathcal{C} il segmento di estremi $z_0 = 0$ e $z_1 = 2 + i$, calcoliamo

$$\int_{\mathcal{C}} z^2 dz.$$

Scelto x come parametro

$$z = x + \frac{ix}{2} \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$dz = (1 + i/2)dx$$

e quindi

$$\int_{\mathcal{C}} z^2 dz = \int_0^2 x^2 (1 + i/2)^2 (1 + i/2) dx = 8/3 (1 + i/2)^3 = 2/3 + \frac{11}{3}i$$

Consideriamo ora l'integrale della stessa funzione lungo la spezzata coordinata

$$\begin{cases} y = 0 \\ 0 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ 0 \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Si ottiene

$$\int_{\mathcal{C}} z^2 dz = \int_0^2 x^2 dx + \int_0^1 (4 + 4iy - y^2)idy = \frac{8}{3} + 4i - 2 - \frac{i}{3} = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i,$$

che ha lo stesso valore del precedente. Vedremo in seguito in generale che per le funzioni olomorfe si ha l'indipendenza del cammino di integrazione negli aperti semplicemente connessi.

Teorema di Darboux

Dimostriamo ora che per gli integrali nel campo complesso risulta

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f(z)| |dz| = \int_{\mathcal{C}} |f(z)| ds \quad (7.1)$$

essendo $f(z)$ una funzione continua, ed s l'ascissa curvilinea di \mathcal{C} con orientamento concorde.

Osservazione 7.1 Per quanto riguarda l'uguaglianza tra il secondo e il terzo integrale in (7.1), si noti che, poiché $dz = (\dot{x} + i\dot{y})dt$, valgono le identità $|dz| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt = |\dot{z}|dt = ds$.

Come conseguenza immediata, posto $M = \max_{\mathcal{C}} |f(z)|$ e $L =$ lunghezza di \mathcal{C} , si ottiene la stima

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq ML, \quad (7.2)$$

valida per funzioni continue su curve regolari a tratti, e nota come Teorema di Darboux.

Dimostrazione. Poniamo

$$I = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \quad \text{cosicché } |I| = \left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right|.$$

Esprimiamo I in forma esponenziale come $I = |I|e^{i\omega}$, con $\omega \in \arg I$. Presa una parametrizzazione $z = z(t)$ di $\mathcal{C} = \mathcal{C}(z_0, z_1)$ di estremi $z_0 = z(t_0)$ e $z_1 = z(t_1)$, si ha

$$|I| = Ie^{-i\omega} = \int_{\mathcal{C}} e^{-i\omega} f(z) dz = \int_{t_0}^{t_1} e^{-i\omega} f(z(t)) \dot{z}(t) dt.$$

Sia ora

$$f(z(t)) \dot{z}(t) e^{-i\omega} = u(t) + iv(t).$$

Poiché $|I|$ è reale, deve essere

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = 0;$$

quindi

$$|I| = \int_{t_0}^{t_1} u(t) dt.$$

Ci siamo così ricondotti ad un integrale di funzione reale di variabile reale, per cui vale

$$\begin{aligned} |I| &\leq \int_{t_0}^{t_1} |u(t)| dt \leq \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u^2(t) + v^2(t)} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} |f(z(t)) \dot{z}(t) e^{i\omega}| dt = \int_{t_0}^{t_1} |f(z(t))| |\dot{z}(t)| dt \\ &= \int_{\mathcal{C}} |f(z)| ds \end{aligned}$$

essendo $|e^{i\omega}| = 1$ e ricordando l'osservazione 7.1. □

Esercizi

7.1) Stimare il modulo dell'integrale

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^4},$$

dove \mathcal{C} è il segmento di estremi $z_0 = 1$, $z_1 = i$.

8 Proprietà integrali e olomorfa

6° Lezione

Cominciamo con una precisazione relativa alla continuità della derivata di una funzione olomorfa $f(z)$ (Teorema 6.1). Nelle dimostrazioni dei teoremi che seguono, per semplicità adopereremo le formule di Green, che richiedono la continuità della derivata $f'(z)$. Sottolineiamo però che, intorno al 1900, il matematico francese E. Goursat ha dato la dimostrazione di tali teoremi integrali solo nell'ipotesi che $f'(z)$ esista.

Teorema 8.1 (Esistenza della primitive) *Ogni funzione $f(z)$ olomorfa in un aperto A semplicemente connesso è ivi dotata di primitiva olomorfa.*

Dimostrazione. Consideriamo la forma differenziale

$$\omega = f(x, y) dx + if(x, y) dy.$$

Per la condizione di olomorfa (6.2), vale

$$f_y = if_x = (if)_x \quad \forall z \in A,$$

per cui ω è chiusa. Poiché A è semplicemente connesso, ω è esatta e quindi ammette primitiva $F(z)$. Inoltre

$$iF_x = if = F_y;$$

quindi F verifica la condizione di olomorfa (6.2). Pertanto tale primitiva $F(z)$ è una funzione olomorfa che ha per derivata complessa $f(z)$. \square

Teorema 8.2 (Morera) *Sia $f(z)$ continua in A e sia $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$ per ogni curva regolare semplice e chiusa \mathcal{C} il cui interno è contenuto in A . Allora $f(z)$ è olomorfa in A .*

Dimostrazione. Verifichiamo l'olomorfa localmente, ovvero in un qualunque dominio D semplicemente connesso contenuto in A . La condizione

$$0 = \int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} f(x, y) dx + if(x, y) dy$$

è necessaria e sufficiente per l'esattezza della forma $f(x, y) dx + if(x, y) dy$ in D . Detta $F(z)$ una primitiva in D , poiché

$$F_x = f \quad \text{e} \quad F_y = if$$

$F(z)$ è olomorfa ed essendo

$$F'(z) = f(z)$$

anche $f(z)$ è olomorfa in D . Essendo D arbitrario, f è olomorfa in tutto A . \square

Teorema 8.3 (1° Teorema integrale di Cauchy) Sia $f(z)$ olomorfa in un aperto A . Se $D \subseteq A$ è un dominio regolare, allora

$$\int_{\partial D} f(z) dz = 0.$$

Osservazione 8.1 Ricordiamo che un dominio regolare D è definito come un insieme che si lasci decomporre in unione finita di domini normali, e la cui frontiera ∂D sia una curva regolare a tratti. In particolare, un dominio regolare D può presentare lacune.

Dimostrazione. La dimostrazione è conseguenza immediata delle formule di Green e della condizione di olomorfia. Si ha infatti

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \int_{\partial D} f(z) dx + i f(z) dy = \int \int_D (i f_x - f_y) dx dy = 0.$$

Si noti che per il teorema 6.1 la derivata di una funzione olomorfa é continua. □

Teorema 8.4 (2° Teorema integrale di Cauchy) Sia $f(z)$ olomorfa in un aperto A , sia $D \subset A$ un dominio regolare, e sia $z_0 \in \overset{\circ}{D}$ un punto interno di D . Allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz .$$

Osservazione 8.2 Con questa formula integrale si rappresentano i valori di una funzione olomorfa nei punti interni di D mediante l'integrale dei valori sulla frontiera ∂D .

Dimostrazione. Sia $B_r(z_0)$ un dischetto aperto di centro $z_0 \in \overset{\circ}{D}$ e raggio $r < \text{dist}(z_0, \partial D)$. Nel dominio $D \setminus B_r(z_0)$, la funzione

$$\frac{f(z)}{z - z_0}$$

è olomorfa in quanto quoziente di funzioni olomorfe. Applicando il 1° teorema integrale di Cauchy a tale funzione, si ha quindi

$$\int_{\partial(D \setminus B_r(z_0))} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

da cui

$$\int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{+\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta$$

avendo rappresentato punti della circonferenza $C_r(z_0)$, frontiera di $B_r(z_0)$, come $z = z_0 + r e^{i\theta}$. Passando al limite per $r \rightarrow 0$ si ricava

$$2\pi i f(z_0) = \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

□

Osservazione 8.3 La funzione $1/(z - z_0)$ è olomorfa — e quindi infinitamente derivabile — per $z \neq z_0$, e si ha

$$\frac{\partial^n}{(\partial z_0)^n} \left(\frac{1}{z - z_0} \right) = \frac{n!}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Potendosi derivare sotto il segno di integrale, si ottiene come corollario la rappresentazione delle derivate di f :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{+\partial D} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \forall n \geq 0. \quad (8.1)$$

Scegliendo nel Teorema precedente come dominio D un disco, si ottiene una formula integrale particolarmente semplice:

Teorema 8.5 (1° Teorema della media) Sia $z_0 \in A$, $f(z) \in \mathcal{O}(A)$ e $\overline{B_r(z_0)} \subset A$; allora

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{+\partial B_r(z_0)} f(z) ds.$$

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalle relazioni

$$z = z_0 + re^{i\theta} \text{ e } dz = ire^{i\theta} d\theta,$$

e dal secondo Teorema integrale di Cauchy:

$$\begin{aligned} f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

ed essendo $ds = rd\theta$ sulla circonferenza, segue la tesi. □

Osservazione 8.4 Il teorema afferma che il valore di una funzione olomorfa nel centro di un disco è la media integrale dei valori assunti dalla funzione sul bordo di tale disco.

Dal risultato precedente otteniamo:

Teorema 8.6 (2° Teorema della media) Per una funzione olomorfa in A il valore nel centro di un disco chiuso contenuto in A uguaglia la media integrale sul disco medesimo:

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R(z_0)} f(x, y) dx dy, \quad \overline{B_R(z_0)} \subset A.$$

Dimostrazione. Consideriamo un disco $\overline{B_R(z_0)} \subset A$ e tutte le circonferenze $C_r(z_0) \subset B_R(z_0)$ con $0 < r < R$. Si ha per il risultato precedente

$$2f(z_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

moltiplicando per rdr ed integrando in $(0, R)$

$$\int_0^R f(z_0) 2rdr = \frac{1}{\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) r dr d\theta,$$

da cui la tesi. □

Osservazione 8.5 Analoghi risultati valgono per $u = \operatorname{Re} f$ e $v = \operatorname{Im} f$. In formule

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi r} \oint_{\mathcal{C}_r(x_0, y_0)} u(x, y) ds, \\ v(x_0, y_0) &= \frac{1}{2\pi r} \oint_{\mathcal{C}_r(x_0, y_0)} v(x, y) ds, \\ u(x_0, y_0) &= \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R(x_0, y_0)} u(x, y) dx dy, \\ v(x_0, y_0) &= \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R(x_0, y_0)} v(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

9 Serie di Taylor di funzioni olomorfe

Poiché una funzione olomorfa in un intorno di z_0 è infinitamente derivabile in z_0 , è ben definita la serie di Taylor

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Il prossimo risultato asserisce che ogni funzione olomorfa è localmente sviluppabile in serie di Taylor, ovvero che la serie di Taylor di f converge ad f . Più precisamente:

Proposizione 9.1 *Sia $f(z)$ olomorfa nel disco $B_\rho(z_0)$; allora*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \quad \forall z \in B_\rho(z_0).$$

Dimostrazione. Sia $z \in B_\rho(z_0)$. Poiché $|z - z_0| < \rho$, si può scegliere $r \in (|z - z_0|, \rho)$: in questo modo $z \in \overline{B_r(z_0)} \subset B_\rho(z_0)$. Dalla (8.1) risulta

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d\zeta, \\ f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{+\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{C}_r(z_0)} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \forall n \geq 0. \quad (9.1)$$

Essendo $|z - z_0| < r = |\zeta - z_0|$, dal carattere di uniformità della convergenza della serie geometrica segue quindi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n &\stackrel{(9.1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{+\mathcal{C}_r(z_0)} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \int_{+\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{+C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} d\zeta \\
&= \int_{+C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= f(z)
\end{aligned}$$

dove nell'ultima eguaglianza abbiamo utilizzato il secondo teorema integrale di Cauchy (Teorema 8.4). risulta \square

Dalla Proposizione precedente segue immediatamente il seguente

Teorema 9.1 *Se f è olomorfa in un aperto A e $z_0 \in A$, allora*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \forall z \in B_R(z_0),$$

dove $B_R(z_0)$ è il più ampio disco aperto centrato in z_0 e contenuto in A :

$$R = \sup\{\rho > 0 : B_\rho(z_0) \subset A\}.$$

La convergenza è assoluta in $B_R(z_0)$ e totale sui sottinsiemi compatti.

10 Teorema di Liouville e Teorema fondamentale dell'Algebra

7° Lezione

Teorema 10.1 (Liouville) *Una funzione olomorfa in tutto \mathbb{C} e ivi limitata in modulo è costante.*

Dimostrazione. Sia $f(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ con $|f(z)| < L \forall z \in \mathbb{C}$. Allora possiamo scrivere

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{+C_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz, \quad \forall z_0 \in \mathbb{C}, \forall R > 0.$$

Dal Teorema di Darboux otteniamo

$$|f'(z_0)| \leq \frac{L}{R},$$

e passando al limite per $R \rightarrow +\infty$ si conclude che $f'(z_0) = 0$. Per l'arbitrarietà di z_0 , $f'(z) \equiv 0$ e quindi $f(z) = \text{cost.}$ \square

Utilizziamo il teorema di Liouville per dimostrare il

Teorema 10.2 (Teorema fondamentale dell'algebra, o di d'Alambert–Gauss)

Ogni polinomio $P(z)$ di grado $n \geq 1$ ammette in \mathbb{C} almeno uno zero.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ciò non sia vero, ovvero che esista un polinomio $P(z)$ di grado $n \geq 1$ tale che $P(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Allora $\frac{1}{P(z)} \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ ed inoltre, posto $\zeta = \frac{1}{z}$ ed essendo $|\zeta| = \frac{1}{|z|}$, risulta

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1}{P(z)} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{P\left(\frac{1}{\zeta}\right)} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{1}{a_n \zeta^n + \dots + a_1 \frac{1}{\zeta} + a_0}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per ζ^n e tenendo conto che $a_n \neq 0$ si ha

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1}{P(z)} = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta^n}{a_n + a_{n-1}\zeta + \dots + a_1\zeta^{n-1} + a_0\zeta^n},$$

e quindi

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{1}{P(z)} = 0.$$

Poiché la funzione intera $\frac{1}{P(z)}$ è infinitesima per $|z| \rightarrow +\infty$, risulterà limitata in \mathbb{C} ; dunque per il teorema di Liouville $\frac{1}{P(z)}$ è costante in \mathbb{C} e quindi anche $P(z)$ è costante, cioè un polinomio di grado zero contro l'ipotesi. \square

11 Serie di potenze - Serie bilatere

8° Lezione

Diremo serie di potenze di punto iniziale z_0 la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

In accordo con il criterio della radice, diremo raggio di convergenza il numero

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}}$$

e precisamente:

- 1) se $R = 0$ la serie converge solo per $z = z_0$;
- 2) se $R > 0$ la serie converge per $|z - z_0| < R$ e non converge per $|z - z_0| > R$;
- 3) se $R = +\infty$ la serie converge in tutto \mathbb{C} .

Raccogliamo le principali proprietà delle serie di potenze nel seguente

Teorema 11.1 *Se il raggio di convergenza R di una serie di potenze è positivo, la serie converge assolutamente per $|z - z_0| < R$, e totalmente per $|z - z_0| \leq R_1$ per ogni $R_1 \in (0, R)$. La somma $f(z)$ della serie è infinitamente differenziabile, e si ha:*

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!} a_{n+k} (z - z_0)^k$$

con lo stesso raggio di convergenza. Inoltre vale la relazione

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Generalizziamo ora il concetto di serie di potenze.

Esempio. Consideriamo la funzione $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$. La funzione è olomorfa eccetto che in $z = 0$ e $z = 1$. Osserviamo che comunque si può scrivere

$$f(z) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k-1} = \sum_{h=-1}^{\infty} z^h$$

a patto che la serie geometrica converga e che si eviti la divisione per zero: ovvero nell'anello $0 < |z| < 1$.

In generale vale:

Teorema 11.2 *Sia $f(z)$ olomorfa in $C = \{R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, con $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$. Allora*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \forall z \in C,$$

con

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$$

dove γ è una qualunque curva regolare semplice e chiusa contenuta nella corona e avente z_0 nel suo interno. Questa rappresentazione è unica.

Alla dimostrazione del teorema facciamo le seguenti premesse. Una serie del tipo

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$$

prende il nome di **serie bilatera (o serie di Laurent)** ed il suo insieme di convergenza è sempre una corona circolare (eventualmente degenerare). Infatti se scriviamo la serie bilatera nella forma

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{a_{-h}}{(z - z_0)^h} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

essa ci appare come somma di due serie di potenze: una nella variabile $\frac{1}{z-z_0}$ che ha come insieme di convergenza $|z - z_0| > R_1$, l'altra nella variabile $z - z_0$ convergente quindi per $|z - z_0| < R_2$. Ne segue che l'insieme di convergenza di una serie bilatera ha sempre la struttura di una corona circolare, e che le serie bilatere hanno gli stessi caratteri di convergenza delle serie di potenze.

Dimostrazione. Ometteremo nel corso della dimostrazione di specificare i versi di percorrenza delle curve, che assumeremo sempre antiorari. Per $z \in C$, siano r ed R tali che $R_1 < r < |z - z_0| < R < R_2$, $A = \{r < |z - z_0| < R\}$ e $\gamma \subset A$. In questo modo, per il primo Teorema integrale di Cauchy (applicato ai due domini delimitati rispettivamente da γ , $\mathcal{C}_r(z_0)$ e da γ , $\mathcal{C}_R(z_0)$) si ha

$$\int_{\mathcal{C}_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} dz = \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} dz = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} dz, \quad (11.1)$$

Dal secondo Teorema integrale di Cauchy applicato al punto z in A

$$\int_{\mathcal{C}_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z). \quad (11.2)$$

Valutiamo i due integrali. Per $\zeta \in \mathcal{C}_R(z_0)$ si ha

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) \left[1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right]} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n,$$

dove abbiamo tenuto conto che $|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}| < 1$ su $\mathcal{C}_R(z_0)$. Pertanto, ricordando i caratteri di convergenza della serie geometrica,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{\mathcal{C}_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Se $\zeta \in \mathcal{C}_r(z_0)$ si procede allo stesso modo tenendo conto che in questo caso si ha $|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}| < 1$: pertanto

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{(z - z_0) \left[1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right]} = -\frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^n,$$

da cui

$$\begin{aligned} -\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} g(\zeta) d\zeta &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}} d\zeta \right) (z - z_0)^{-n-1} \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\int_{\mathcal{C}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^n. \end{aligned} \quad (11.4)$$

In conclusione, combinando le (11.1)–(11.4) si ottiene

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} dz \right) (z - z_0)^n,$$

che per l'arbitrarietà di z dimostra la rappresentazione in serie di Laurent di f . Per provare l'unicità di tale rappresentazione, osserviamo preliminarmente che

$$\int_{\partial B_\rho(z_0)} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq -1 \\ 2\pi i & \text{se } m = -1 \end{cases}.$$

Infatti, posto $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$

$$\int_{+\partial B_\rho(z_0)} (z - z_0)^m dz = i\rho^{m+1} \int_0^{2\pi} e^{i(m+1)\theta} d\theta$$

da cui le tesi per la periodicità dell'esponenziale. Sia ora $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k$. Presa una circonferenza $\mathcal{C}_\rho(z_0)$ interna alla corona di convergenza e non intersecante γ , si ha

$$\int_{+\mathcal{C}_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{+\mathcal{C}_\rho(z_0)} (\zeta - z_0)^{k-n-1} d\zeta = 2\pi i a_n.$$

Il primo teorema integrale di Cauchy permette poi di integrare indifferentemente su γ o sulla circonferenza $\mathcal{C}_\rho(z_0)$. \square

Esercizi

11.1) Scrivere gli sviluppi in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ per

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

negli insiemi

$$|z| < 1, \quad 1 < |z| < 2, \quad |z| > 2.$$

12 Principi di identità

9° Lezione

Iniziamo dal

Teorema 12.1 (di identità locale) *Siano $f(z)$ e $g(z)$ analitiche in un aperto A contenente il punto z_0 e supponiamo che entrambe le funzioni e tutte le loro derivate abbiano lo stesso valore in $z = z_0$:*

$$f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0) \quad k = 0, 1, \dots$$

allora $f(z) = g(z)$ per tutti i punti z nel disco di sviluppo dell'espansione di Taylor di centro in z_0 (contenuto in A).

Dimostrazione. Immediata: infatti, dal Teorema 9.1 risulta $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e

$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k$ con $a_k = b_k$, e quindi le somme delle serie coincidono.

Ci occuperemo ora del seguente

Problema di prolungamento. Se $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$ per $k = 0, 1, \dots$, possiamo affermare che $f = g$ nel loro comune insieme di olomorfia A ?

Studiamo preliminarmente gli zeri di una funzione olomorfa.

Definizione 12.1 *Sia $f \in \mathcal{O}(A)$, A aperto di \mathbb{C} . Il punto $z_0 \in A$ si dice uno **zero** di $f(z)$ se $f(z_0) = 0$. Se inoltre $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ e $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, n si dice **ordine dello zero** e z_0 si dice uno **zero di ordine n** .*

Osservazione 12.1 Non esistono zeri di ordine infinito a meno che non sia $f \equiv 0$ localmente. Infatti dal teorema di identità locale abbiamo che se $f(z)$ non è identicamente nulla in un intorno, per qualche n deve essere $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Facciamo ora vedere che gli zeri di una funzione olomorfa non banale sono isolati.

Proposizione 12.1 (Gli zeri sono isolati) *Sia f olomorfa e non identicamente nulla in un intorno di z_0 , e tale che $f(z_0) = 0$. Allora esiste $r > 0$ tale che*

$$f(z) \neq 0 \quad \forall z \in B_r(z_0) \setminus \{z_0\}.$$

Dimostrazione. Sia n l'ordine di z_0 (come abbiamo osservato, l'ordine è finito poiché f è non banale). Scrivendo la serie di Taylor di f con centro in z_0 abbiamo

$$f(z) = a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \dots$$

con $a_n \neq 0$ e quindi

$$f(z) = (z - z_0)^n(a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \dots) =: (z - z_0)^n g(z),$$

dove

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^k.$$

Si osservi che la funzione g è ben definita nel disco di convergenza della serie di Taylor di f , poiché le due serie hanno lo stesso raggio di convergenza. Inoltre la convergenza è totale sui compatti, quindi g è continua in un intorno di z_0 . Poiché $g(z_0) = a_n \neq 0$, concludiamo che $g(z)$ (e quindi f) è diversa da zero in un disco aperto di centro z_0 privato del centro.

□

Ciò mostra che gli zeri sono isolati e non esistono punti di accumulazione degli zeri interni all'aperto di olomorfia. Vale inoltre il seguente risultato che ci permette di rispondere anche al problema di prolungamento:

Proposizione 12.2 (“Bonus topologico”) *Se l'insieme di olomorfia A di una funzione f è un aperto connesso (per archi), il principio di identità locale si estende a tutto l'insieme di olomorfia.*

Dimostrazione. Presi due punti z_0 e z_1 in A , poiché A è connesso esiste una curva continua $\gamma(t)$, $t \in [a, b]$ contenuta in A che connette z_0 e z_1 . Per il Teorema di identità locale $f \equiv g$ in un intorno di z_0 . Quindi

$$c := \sup \{t \in [a, b] : f(\gamma(\tau)) = g(\gamma(\tau)) \forall \tau \in [a, t]\} > a.$$

Per definizione di c e per la continuità della composizione, si avrà

$$f(c) = \lim_{t \rightarrow c^-} f(\gamma(t)) \equiv \lim_{t \rightarrow c^-} g(\gamma(t)) = g(c).$$

Resta quindi da dimostrare che $c = b$. Se per assurdo ciò non fosse vero, si avrebbe

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t_\varepsilon \in (c, c + \varepsilon) \text{ tale che } f(\gamma(t_\varepsilon)) - g(\gamma(t_\varepsilon)) \neq 0. \quad (12.1)$$

D'altra parte, poiché $f - g$ è olomorfa in un intorno di $\gamma(c)$ e $\gamma(c)$ non è uno zero isolato di $f - g$ (infatti $(f - g)(\gamma(t)) = 0$ per ogni $t \in [a, c]$), per la proposizione precedente $f - g$ deve essere identicamente nulla in un intorno di $\gamma(c)$. Questo contraddice la (12.1) e conclude la dimostrazione. □

Soluzione del problema di prolungamento. Dal risultato precedente abbiamo che due funzioni con uguale espansione in serie o che coincidono su un insieme dotato di punti di accumulazione in A coincidono in tutto il loro aperto di olomorfia (connesso) A .

13 Singolarità di funzioni olomorfe, teorema dei residui e applicazioni.

Singolarità

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un disco di centro z_0 e raggio r privato del centro, ovvero

$$f \in \mathcal{O}(B_r(z_0) \setminus \{z_0\}). \quad (13.2)$$

Per quanto visto, esiste un unico sviluppo in serie bilatera per f di centro z_0 , convergente ad f in tale insieme:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{in } B_r(z_0) \setminus \{z_0\}. \quad (13.3)$$

Su queste basi, diamo la seguente definizione.

Definizione 13.1 *Dati (13.2), (13.3), il punto z_0 si dice:*

- a) *singolarità essenziale per f se esistono infiniti distinti indici $k_j < 0$ tali che $a_{k_j} \neq 0$;*
- b) *singolarità isolata, o polo, di ordine n per f se $a_{-n} \neq 0$ e $a_k = 0$ per ogni $k < -n$;*
- c) *singolarità apparente per f se $a_k = 0$ per ogni $k < 0$.*

Esempio 13.1 La funzione

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{-2n-1}$$

ha in $z = 0$ una singolarità essenziale. La funzione

$$\frac{\sin z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1}$$

ha in $z = 0$ un polo di ordine 1. La funzione

$$\frac{\sin z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}$$

ha in $z = 0$ una singolarità apparente.

Residui

Nei punti singolari è particolarmente importante il coefficiente a_{-1} dello sviluppo (13.3), che prende il nome di **residuo** di f in z_0 , $R_f(z_0)$, ed ha la rappresentazione integrale (cf. Teorema 11.2)

$$R_r(z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{+C_\varepsilon(z_0)} f(z) dz, \quad (13.4)$$

dove $C_\varepsilon(z_0)$ è una circonferenza di centro z_0 e raggio $\varepsilon < r$.

Per il calcolo dei residui nelle singolarità isolate, si utilizza il seguente risultato.

Proposizione 13.1 Se z_0 è un polo di ordine n , risulta

$$R_f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z-z_0)^n f(z)]. \quad (13.5)$$

Dimostrazione. Moltiplicando (13.3) per $(z-z_0)^n$ si ottiene

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + \dots,$$

e derivando $n-1$ volte si ottiene (13.5). □

Esempio 13.2 Per un polo del primo ordine la formula (13.5) diviene

$$R_f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^n f(z).$$

Se $f(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$, con A e B continue in z_0 , B derivabile in z_0 , e con $B(z_0) = 0$, $B'(z_0) \neq 0$ e $A(z_0) \neq 0$, allora

$$R_f(z_0) = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}.$$

Infatti

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0) \frac{A(z)}{B(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{A(z)}{\frac{B(z)-B(z_0)}{z-z_0}} = \frac{A(z_0)}{B'(z_0)}.$$

Un criterio utile per stabilire l'ordine di una singolarità è il seguente:

Proposizione 13.2 La funzione $f(z)$ ha un polo di ordine n in z_0 se e solo se la funzione $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ ha in $z = z_0$ uno zero di ordine n .

Dimostrazione. La funzione f ha un polo di ordine n se e solo se

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \\ &= \frac{1}{(z-z_0)^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-n} (z-z_0)^k \\ &=: \frac{F(z)}{(z-z_0)^n} \end{aligned}$$

con $F(z)$ olomorfa e non nulla in z_0 , essendo $F(z_0) = a_{-n} \neq 0$. D'altra parte, g ha uno zero di ordine n se e solo se

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} b_k (z-z_0)^k \\ &= (z-z_0)^n G(z) \end{aligned}$$

con G olomorfa e non nulla in z_0 . Poiché $f = \frac{1}{g}$ se e solo se $F = \frac{1}{G}$, si ottiene la tesi. □

L'utilizzo dei residui permette una drastica semplificazione del calcolo degli integrali definiti, come segue dal seguente risultato.

Teorema 13.1 (Teorema dei residui) Sia D un dominio regolare, e sia f olomorfa in A , con A aperto, $A \supset \overline{D}$, eccezion fatta per un numero finito di poli $\{z_1, \dots, z_m\}$ interni a D . Allora

$$\int_{+\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m R_f(z_j).$$

Osservazione 13.1 Il teorema dei residui generalizza i due teoremi integrali di Cauchy. Infatti se f è priva di punti singolari interni a D , allora

$$\int_{+\partial D} f(z) dz = 0,$$

essendo per definizione nullo il residuo di una funzione in un suo punto regolare. Se inoltre z_0 è interno a D , la funzione $g(z) = f(z)/(z - z_0)$ ha un polo del primo ordine in z_0 , e $R_g(z_0) = f(z_0)$, per cui

$$\int_{+\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

Dimostrazione. Isoliamo ciascun polo z_k con dischetti $B_\varepsilon(z_k)$, con raggio talmente piccolo che i dischetti siano separati fra loro e da ∂D :

$$\overline{B_\varepsilon(z_j)} \cap \overline{B_\varepsilon(z_k)} = \emptyset \quad \forall j \neq k \quad \text{e} \quad \overline{B_\varepsilon(z_j)} \cap \partial D = \emptyset \quad \forall j.$$

Sia

$$E = D \setminus \left(\bigcup_{j=1}^m B_\varepsilon(z_j) \right).$$

Poiché $f \in \mathcal{O}(E)$, segue dal primo teorema integrale di Cauchy che

$$\int_{+\partial E} f(z) dz = 0.$$

D'altra parte, per costruzione,

$$\partial E = \partial D \cup \left(\bigcup_{j=1}^m \partial B_\varepsilon(z_j) \right).$$

Pertanto

$$\int_{+\partial D} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \int_{\partial B_\varepsilon(z_j)} f(z) dz,$$

e la tesi segue dalla definizione di (13.4) di residuo. □

Applicazione del teorema dei residui al calcolo di integrali definiti

Il teorema dei residui risulta estremamente utile per il calcolo di integrali definiti. Illustriamo ciò attraverso alcuni esempi.

Esempio 13.3 *Calcolo di*

$$\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta,$$

con $R(x, y)$ funzione razionale di x, y .

Posto $z = e^{i\theta}$, si ha

$$\sin z = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos z = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}.$$

Quindi

$$\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = \int_{+\partial B(0,1)} S(z) dz,$$

dove

$$S(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)$$

è una funzione razionale di z . Pertanto

$$\int_0^{2\pi} R(\sin \theta, \cos \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{j=1}^m R_r(z_j),$$

dove $R_S(z_j)$ sono i residui di $S(z)$ nei suoi punti singolari $\{z_1, \dots, z_m\}$ interni a $B(0, 1)$.

Al secondo esempio premettiamo il seguente Lemma.

Lemma 13.1 *Sia f continua nel semipiano $y \geq 0$. Indichiamo con S_R la semicirconferenza di centro nell'origine e raggio R :*

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, 0 \leq \text{Arg } z \leq \pi\}.$$

Se esistono due costanti $M > 0$ e $p > 1$ tali che

$$\max_{z \in S_R} |f(z)| \leq \frac{M}{R^p} \quad \text{per } R \gg 1,$$

allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Dal teorema di Darboux

$$\left| \int_{S_R} f(z) dz \right| \leq \int_{S_R} |f(z)| dz \leq \pi R \frac{M}{R^p} = \pi \frac{M}{R^{p-1}}$$

e la tesi segue essendo $p > 1$. □

Esempio 13.4 *Calcolo di*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

con $f(x)$ continua e senza zeri (reali), e tale che $|f(z)| \leq M|z|^{-p}$ per qualche $M > 0$, $p > 1$, e $|z| \gg 1$.

Si osservi che a questa classe appartengono, ad esempio, le funzioni razionali del tipo

$$f(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad P \text{ senza zeri reali, } \operatorname{gr}(Q) \leq \operatorname{gr}(P) - 2.$$

Si considera la funzione $f(z)$ nel semicerchio di centro nell'origine e raggio R :

$$C_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi\}.$$

Poiché f non ha zeri reali, dal teorema dei residui segue che per R abbastanza grande

$$\int_{+\partial C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{+S_R} f(z) dz = \sum_{j=1}^m R_f(z_j),$$

dove z_j sono i poli di f . Grazie al Lemma 13.1, concludiamo che

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{+S_R} f(z) dz + \sum_{j=1}^m R_f(z_j) \\ &= \sum_{j=1}^m R_f(z_j). \end{aligned}$$

Al terzo esempio premettiamo due lemma:

Lemma 13.2 *Sia f continua nel semipiano $y \geq 0$. Se*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\max_{z \in S_R} |f(z)| \right) = 0,$$

allora

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} e^{iz} f(z) dz = 0.$$

Dimostrazione. Poiché, $z = R \cos \theta + iR \sin \theta$ per $z \in S_R$, si ha $|e^{iz}| = e^{-R \sin \theta}$, e quindi dal teorema di Darboux

$$\left| \int_{S_R} e^{iz} f(z) dz \right| \leq \left(\max_{z \in S_R} |f(z)| \right) R \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta.$$

D'altra parte, poiché $\sin \theta$ è simmetrica rispetto a $\theta = \frac{\pi}{2}$, si ha

$$\int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R \sin \theta} d\theta.$$

Inoltre, dalla concavità di $\sin \theta$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$ segue che

$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

essendo $\frac{2}{\pi}\theta$ la corda passante per $(0, 0)$ e $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Pertanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_R} e^{iz} f(z) dz \right| &\leq \left(\max_{z \in S_R} |f(z)| \right) 2R \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2R}{\pi}\theta} d\theta \\ &= \left(\max_{z \in S_R} |f(z)| \right) \pi(1 - e^{-R}), \end{aligned}$$

da cui la tesi per $R \rightarrow \infty$. □

Lemma 13.3 *Sia f continua in $y \geq 0$. Allora*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \int_{+S_r} \frac{f(z)}{z} dz = i\pi f(0).$$

Dimostrazione. Immediata:

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \frac{f(z)}{z} dz &= \int_0^\pi \frac{f(re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= i \int_0^\pi f(e^{i\theta}) d\theta \xrightarrow{r \downarrow 0} i\pi f(0). \end{aligned}$$

□

Esempio 13.5 *Calcolo di*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Il metodo illustrato si estende ad integrali del tipo $\int_{-\infty}^\infty f(x) \sin x dx$, con f funzione razionale.

Si utilizza un metodo analogo al precedente. La principale differenza consiste nel fatto che in questo caso il denominatore ha uno zero reale (per $x = 0$). Osserviamo anzitutto che la funzione integranda è pari:

$$\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x}.$$

Quindi

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Consideriamo la funzione

$$f(z) = -i \frac{e^{iz}}{z}$$

cosicché sull'asse reale

$$f(z) = f(x) = \frac{\sin x}{x} - i \frac{\cos x}{x}.$$

Applichiamo il teorema dei residui nell'arco di corona circolare

$$E_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R, 0 < \text{Arg}(z) < \pi\},$$

in cui f è olomorfa: si ha quindi

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial E_{r,R}} f(z) dz \\ &= \int_{+S_R} f(z) dz + \int_{-R}^{-r} f(x) dx - \int_{+S_r} f(z) dz + \int_r^R f(x) dx. \end{aligned}$$

Passando al limite $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0^+$, il primo integrale tende a zero per il Lemma 13.2, e il terzo converge a π . Poiché $\frac{\sin x}{x}$ è pari e $\frac{\cos x}{x}$ è dispari, si ottiene pertanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

14 Formula di Green nel disco

Uno dei problemi più classici dell'analisi è il seguente: dato un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ed una funzione g definita su $\partial\Omega$, determinare $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

In questa sezione risolveremo questo problema nel caso particolare in cui $N = 2$ ed Ω è un disco; più precisamente, ricaveremo la formula esplicita di rappresentazione di una funzione armonica nel disco mediante i valori sulla frontiera, che è la seguente:

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} g(R \cos \theta, R \sin \theta) d\theta.$$

Consideriamo un disco aperto $B_R = B_R(0)$ di centro 0 e raggio R , e indichiamo con $C_R = \partial B_R$ la sua frontiera. Poniamo

$$\begin{aligned} z &= Re^{i\theta} && \text{per } z \in C_R, \\ \zeta &= re^{i\varphi}, \quad r \in [0, R) && \text{per } \zeta \in B_R. \end{aligned}$$

Introduciamo la trasformazione

$$\zeta \mapsto \zeta^* = \frac{R^2}{\bar{\zeta}} = \frac{R^2}{r} e^{i\varphi},$$

detta *trasformazione per raggi vettori reciproci*: essa trasporta i punti ζ interni a B_R in punti ζ^* esterni a \bar{B}_R , lasciando fermi i punti su C_R (cioè $\zeta^* = \zeta$ se $\zeta \in C_R$).

Sia ora f una funzione olomorfa in B_R e continua in \bar{B}_R . Dal primo teorema di Cauchy segue che, per ogni $\zeta \in B_R$,

$$0 = \int_{C_R} \frac{f(z)}{z - \zeta^*} dz = \int_{C_R} \frac{\bar{\zeta} f(z)}{z\bar{\zeta} - R^2} dz.$$

Utilizzando questa uguaglianza, il secondo teorema integrale di Cauchy e ricordando che $R^2 = z\bar{z}$, si ottiene per $\zeta \in B_R$

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \left[\frac{f(z)}{z - \zeta} + \frac{\bar{\zeta} f(z)}{R^2 - z\bar{\zeta}} \right] dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{R^2 - \zeta\bar{\zeta}}{z(z - \zeta)(\bar{z} - \bar{\zeta})} f(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{R^2 - r^2}{z|z - \zeta|^2} f(z) dz. \end{aligned}$$

Tenendo presente la formula di Carnot

$$|z - \zeta|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi),$$

si conclude che

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} f(Re^{i\theta}) d\theta. \quad (14.1)$$

Poiché (Osservazione 6.2) la parte reale e quella immaginaria di una funzione olomorfa sono funzioni armoniche, la (14.1) — separando la parte reale dalla parte immaginaria — fornisce la rappresentazione voluta:

$$u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi)} u(R \cos \theta, R \sin \theta) d\theta.$$

15 Soluzione degli esercizi

1.1) Si ha

$$\frac{\sqrt{1+x^2} + ix}{x - i\sqrt{1+x^2}} = \frac{(\sqrt{1+x^2} + ix)(x + i\sqrt{1+x^2})}{x^2 + 1 + x^2} = \frac{i(x^2 + 1 + x^2)}{1 + 2x^2} = i.$$

1.2) a) $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 4 \iff x^2 + y^2 \geq 16$.

Quindi soddisfano la disuguaglianza tutti e soli i punti esterni alla circonferenza con centro nell'origine e raggio 4.

b) $\operatorname{Im}(x + i(y - 3)) > 4 \iff y - 3 > 4 \iff y > 7$.

Quindi soddisfano la disuguaglianza tutti e soli i punti del semipiano superiore delimitato dalla retta $y = 7$.

c) Corona circolare di centro i e raggi 5 e 3.

1.3) Equivalentemente

$$\begin{aligned} \left| \frac{z+i}{z-i} \right|^2 < 81 &\iff |z+i|^2 < 81|z-i|^2 \\ &\iff x^2 + (y+1)^2 < 81[x^2 + (y-1)^2] \\ &\iff x^2 + y^2 + 2y + 1 < 81(x^2 + y^2 - 2y + 1) \\ &\iff 80x^2 + 80y^2 - 164y + 80 > 0 \\ &\iff x^2 + \left(y - \frac{41}{40}\right)^2 > \left(\frac{41}{40}\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Quindi soddisfano la disuguaglianza i punti esterni alla circonferenza di centro

$$z = \frac{41}{40}i \quad \text{e raggio} \quad \sqrt{\left(\frac{41}{40}\right)^2 - 1}.$$

$$3.1) (1+i)z - \overline{(1+i)z} = i \iff 2 \cdot \operatorname{Im} [(1+i) \cdot z] = 1 \text{ Poiché}$$

$$(1+i) \cdot z = x + iy + ix - y \implies \operatorname{Im} (1+i)z = x + y,$$

si ottiene

$$2 \cdot (x + y) = 1 \iff x + y = 1/2.$$

3.2)

$$\begin{aligned} |z| \leq |z+1| &\iff |z|^2 \leq |z+1|^2 \\ &\iff z \cdot \bar{z} \leq (z+1)(\bar{z}+1) = z \cdot \bar{z} + z + \bar{z} + 1 \\ &\iff 0 = z + \bar{z} + 1 = 2x + 1 \\ &\iff x \geq -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$3.3) |x| + |y| \leq 1.$$

5.1) In ciascun esercizio, i valori principali si ottengono ponendo $k = 0$.

a)

$$i^{1+i} = i e^{i \log i} = i e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} = i e^{-\frac{2i}{2} + 2k\pi}$$

b)

$$(-1+i)^{-3i} = e^{-3i \log(-1+i)} = e^{-3i(\ln \sqrt{2} + i(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi))} = e^{-\frac{3}{4}\pi - 6k\pi} e^{-i\frac{3}{2}\ln 2}.$$

$$c) (1+i)^{2i} = e^{-(\frac{\pi}{2} + k\pi)} e^{i \ln 2}.$$

7.1) Si ha

$$\max_C \frac{1}{|z|^4} = \frac{1}{\min_C |z|^4} = 4.$$

Poiché la lunghezza di \mathcal{C} è pari a $\sqrt{2}$, dal Teorema di Darboux si ottiene

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z^4} \right| \leq 4\sqrt{2}.$$

11.1) Se $|z| < 1$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= -\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \\ -\frac{1}{z-2} &= \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$f(z) = - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n, \quad |z| < 1.$$

Se $1 < |z| < 2$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \\ -\frac{1}{z-2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n = \begin{cases} 1 & n < 0 \\ 2^{-n-1} & n \geq 0, \end{cases} \quad 1 < |z| < 2.$$

Se $|z| > 2$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}}, \\ -\frac{1}{z-2} &= -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

Quindi

$$f(z) = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(2^{-n-1} - 1\right) z^n, \quad |z| > 2.$$