ANALISI MATEMATICA — ING. GESTIONALE (A-L) — PROVA PRATICA — 05.07.10

Cognome: .... **Nome:** ....

È consentita solo la consultazione di un libro di testo di teoria. È vietata la consultazione di ogni altro materiale (strumenti elettronici, fotocopie, appunti, dispense, libri di esercizi, ecc.). Per l'ammissione alla prova teorica, è sufficiente svolgere correttamente 3 esercizi contrassegnati dall'asterisco (*) e ottenere almeno 18 punti. Le risposte devono essere motivate. Il punteggio indicativo si riferisce a risposte e svolgimenti corretti e completi. In caso di dubbi sul testo consultare il docente. Questo documento contiene 5 domande numerate da 1 a 5.
VERSIONE PRELIMINARE - SI PREGA DI SEGNALARE POSSIBILI ERRORI

(1)* Determinare il dominio naturale $D \subseteq \mathbb{R}$ della funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x^2+2} - 3x\right) \ .$$

.... 6 punti

Risposta:

$$(-\infty, 1/2).$$

....

Svolgimento:

$$\sqrt{x^2+2} > 3x \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 0 \quad \text{oppure} \quad x^2+2 > 9x^2 \ .$$

(2)* Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} \ .$$

Calcolare (purché esista)

$$\lim_{x \to 0} f'(x) \ .$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

0.

....

Svolgimento:

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg}(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg}(x)}{x^2} \overset{?}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}}{2x} = 0.$$

(3)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Determinare (purché esistano) il massimo assoluto e il minimo assoluto della funzione $F : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in [0, 3].$$

. . . . 8 punti

Risposta:

$$\max_{[0,3]} F = 4, \ \min_{[0,3]} F = 0.$$

. . . .

Svolgimento:

$$F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x 0\,dt = 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ \displaystyle\int_0^1 0\,dt + \int_1^x 2\,dt = 2(x-1) & \text{se } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

(4)* Determinare l'area del seguente insieme:

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 \leq x \leq 4, \ x \geq 1 + |y+1| \right\} \ .$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

8.

....

Svolgimento:

Rappresentando graficamente Ω, si vede che è un trapezio di basi 2 e 6 e altezza 2.

(5) Determinare l'integrale generale della seguente equazione differenziale:

$$y''(x) + y(x) = 2x^2 - \cos x \ .$$

.... $\boxed{\text{7 punti}}$

Risposta:

$$y(x) = A \sin x + B \cos x + 2x^2 - 4 - \frac{1}{2} x \sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

....

Svolgimento:

Omogenea associata. Il polinomio caratteristico $\lambda^2 + 1$ ha zeri per $\lambda = \pm i$, quindi

$$y_{omogenea}(x) = A \cos x + B \sin x.$$

Non omogenea. Per la linearità dell'equazione, se y_1 e y_2 sono soluzioni di, rispettivamente,

$$y''(x) + y(x) = 2x^2 \quad \text{e} \quad y''(x) + y(x) = -\cos x \ ,$$

allora $\tilde{y} = y_1 + y_2$ è soluzione dell'equazione considerata. Sia y_1 che y_2 si ottengono con metodo ad-hoc: per esempio $y_1(x) = ax^2 + bx + c$ e $y_2(x) = ax \cos x + bx \sin x$, da cui $y_1(x) = 2x^2 - 4$ e $y_2(x) = -\frac{1}{2} x \sin x$.